

УДК 378.147.88:004.4

**Кобильник Тарас Петрович**

доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та обчислювальної математики  
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, Україна  
taras2408@mail.ru

**Когут Уляна Петрівна**

аспірант  
Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України, м. Київ, Україна  
ulyana\_kogut@mail.ru

## СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ У НАВЧАННІ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ «ІНФОРМАТИКА»

**Анотація.** У статті наведено загальну характеристику найпопулярніших систем комп'ютерної математики як комерційних (Maple, Mathematica, Matlab), так і вільно поширюваних (Scilab, Maxima, комплекс програм GRAN, Sage) й умови ефективного використання даних систем як засобу фундаменталізації навчального процесу бакалаврів інформатики. Розглянуто роль СКМ у підготовці бакалаврів інформатики. Визначено напрями педагогічного використання СКМ у навчанні інформатичних і фізико-математичних дисциплін. Наведено завдання, у яких треба «обережно» використовувати результати, отримані за допомогою СКМ. Визначено перспективні напрямки розвитку СКМ у високотехнологічному середовищі.

**Ключові слова:** підготовка бакалаврів інформатики; інформатичні дисципліни; системи комп'ютерної математики; Maple; Mathematica; Matlab; Maxima; MathCAD; Sage.

### 1. ВСТУП

**Актуальність дослідження.** Засоби ІКТ невідпинно вдосконалюються, причому змінюються не лише окремі програмні продукти і системи, платформи їх реалізації, а також розвиваються принципи і методи їх проектування і використання, концептуальні засади впровадження. Саме тому набуття глибоких фундаментальних знань з інформатичних дисциплін дає змогу випускникові самостійно підвищувати рівень своєї компетентності, адаптуватися до умов швидкої зміни технологічних парадигм, знайти своє місце на ринку праці.

Питання основних чинників, які визначають тенденції розвитку високотехнологічного середовища навчальних закладів, зараз широко обговорюються в наукових виданнях у зв'язку з формуванням нової педагогічної парадигми, що передбачає застосування інноваційних технологій для реалізації принципів масовості і неперервності навчання [3, 15, 12, 24]. У контексті навчання інформатичних дисциплін важливою запорукою реалізації цієї освітньої парадигми є фундаменталізація навчання.

Як інноваційна педагогічна технологія можуть бути використані системи комп'ютерної математики (СКМ), оскільки вони є середовищем для проектування і використання програмних засобів підтримки навчання фундаментальних дисциплін.

**Постановка проблеми.** Використання у навчанні бакалаврів інформатики програмного забезпечення спеціального призначення, до якого належать і системи комп'ютерної математики (СКМ), є надзвичайно важливим, оскільки їх вивчення і використання буде сприяти:

- розширенню і поглибленню знань студентів як з інформатики, так і з математичних дисциплін;
- оволодінню студентами вміннями розв'язувати задачі різноманітного характеру;

- формуванню навичок застосування сучасних математичних пакетів у процесі вивчення фізико-математичних дисциплін і в майбутній професійній діяльності.

Проблема застосування в навчальному процесі комп'ютерних технологій та інформаційного методичного забезпечення інтенсивно досліджується вітчизняними й зарубіжними науковцями і методистами. Зокрема, питання впровадження комп'ютерних освітніх технологій розглядали у своїх роботах М. Жалдак [7], В. Горох, С. Раков [16], С. Рибак [17], В. Клочко [10], Ю. Рамський, О. Співаковський [19], М. Львов [13] та інші дослідники.

**Мета статті:** проаналізувати найбільш поширені й популярні СКМ і можливості їх використання у навчанні студентів напряму підготовки „Інформатика\*” як інформатичних, так і фізико-математичних дисциплін і на основі аналізу визначити можливі напрямки розвитку сучасних СКМ.

## 2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

**Виклад основного матеріалу.** Сукупність теоретичних, методичних, алгоритмічних, апаратних і програмних засобів, які призначені для ефективного розв'язування за допомогою комп'ютерів широкого кола математичних задач з високим ступенем візуалізації всіх етапів обчислень, за тлумаченнями В. П. Дьяконова, Ю. В. Триуса можна визначити як *комп'ютерну математику* [21, с. 116; 21, с. 35]. Поширення набувають різноманітні засоби комп'ютерної математики, зокрема програмні, які, на думку М. І. Жалдака [8], доцільно умовно поділити на дві великі групи: програмне забезпечення **навчально-дослідницького призначення** і програмне забезпечення **науково-дослідницького призначення**.

Науково-дослідницьке програмне забезпечення за призначенням, структурою та функціями науковці умовно поділяють на кілька груп, а саме:

1. *Математичні пакети вузької спеціалізації:* GAP, Macaulay, Singular та ін.
2. *Програмні засоби візуалізації математичних даних:* GnuPlot, JMol, LaTeX.
3. *Системи геометричного моделювання:* Autodesk 3ds Max, ANSYS та ін.
4. *Системи комп'ютерної математики:* Derive, Maple, Matlab, Mathematica, MathCAD, Maxima, Sage та ін.

На нашу думку, СКМ виокремлені в окрему групу завдяки тому, що є більш універсальними й об'єднують функції засобів інших типів, наприклад другого і третього, на протигагу першому типу, що має більш обмежене застосування.

За тлумаченням В. П. Дьяконова, СКМ — це програмні засоби, за допомогою яких можна автоматизувати виконання як чисельних, так і аналітичних (символьних) обчислень і розрахунків [6].

Автори по-різному визначають поняття СКМ, але, на нашу думку, ці тлумачення тотожні в тому розумінні, що стосуються приблизно однієї і тієї ж групи програмних продуктів. У зарубіжній літературі зустрічається аналог цього терміну Computer Mathematics Systems (CMS) [26].

Аналізуючи термін «системи комп'ютерної математики» [6, 9, 11, 20, 21], зазначають, що це поняття охоплює сукупність теоретичних засобів, а також сучасні програмні й апаратні засоби, що дозволяє виконувати всі математичні обчислення з високою точністю, а також будувати послідовність обчислювальних алгоритмів з широкими можливостями візуалізації процесів і даних під час їх опрацювання.

Підсумовуючи вище сказане, можна зробити висновок, що програмне забезпечення для виконання аналітичних обчислень має представляти собою повну *систему*, яка включає *методи* подання нечислових даних різних спеціальних структур,

**мову**, яка дозволяє маніпулювати ними, і **бібліотеку** ефективних функцій для виконання необхідних базових операцій.

Тому, під **СКМ** будемо розуміти поліфункціональні, універсальні програмні засоби, призначені для ефективного виконання математичних операцій з даними як у символній, так і в числовій формі, візуалізації математичних закономірностей, проведення навчальних і наукових досліджень, а також моделювання процесів і явищ у різних предметних галузях.

Наведемо характеристику деяких СКМ, які доцільно і зручно використовувати як для навчання інформатичних, так і фізико-математичних дисциплін. Використання СКМ значно полегшує розв'язування типових математичних задач, таких як обчислення значень функцій і побудова їхніх графіків, розв'язування рівнянь і нерівностей і їх систем, обчислення інтегралів, знаходження похідних функцій тощо. Наразі, у користувача немає потреби у різноманітних довідниках і математичних таблицях, і разом з тим з'являються можливості за короткий час розв'язувати значну кількість задач, готувати електронні книги. Використання СКМ стимулює інтерес студентів одночасно і до математики, і до новітніх інформаційних технологій і програмування.

Кожна із СКМ має певні особливості, які потрібно враховувати під час розв'язування конкретних математичних задач. Завдяки реалізації СКМ на ПК вони стають все більш доступними для використання.

Сучасні СКМ — це, перш за все, потужні електронні довідники і бази даних з усіх сучасних напрямів математики, у них передбачені ефективні засоби розв'язування більшості математичних задач і засоби підготовки високоякісних електронних уроків, статей, книг.

У кожній СКМ можуть бути нюанси у своїй архітектурі. Утім, сучасні СКМ мають таку типову структуру:



У всьому світі створені десятки СКМ, проте найбільшого поширення отримали лише окремі. Наведемо загальну характеристику деяких із них.

**Система Maple.** Розробник — фірма Waterloo Maple Software Inc ([www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com)). Перша версія програми Maple 1.0 з'явилася у 1982 році, проте широко доступною стала версія Maple 3.3 (березень 1985 року).

Остання версія Maple 17 з'явилась 13.03.2013.

Пакет Maple 17 — це потужна обчислювальна система, призначена для виконання складних обчислень за аналітичними і чисельними методами, з вбудованою мовою програмування.

Можливості використання системи Maple 17:

- обчислення стандартних і спеціальних математичних функцій;
- символне перетворення математичних виразів;
- розв'язування задач лінійної алгебри;
- розв'язування різноманітних задач математичного аналізу;
- розв'язування деяких задач обчислювальної математики;
- опрацювання експериментальних даних;
- розвинена дво- і тривимірна графіка, можливість імпортування й експортування графіків у кілька форматів (GIF, JPEG, BMP, WMF, EPS, DXF, POV, HPGL);

- імпортування й експортування даних у кілька форматів (ASCII, Binary, RTF, MS Word, HTML (incl. MathML), LaTeX, VRML, XML);
- вбудована мова програмування.

Система Maple 17 містить (як і більшість СКМ) пакети розширень для розв'язування задач лінійної і тензорної алгебри, аналітичної геометрії, теорії чисел, теорій ймовірностей і математичної статистики, комбінаторики, інтегральних перетворень, лінійного і нелінійного програмування, теорії графів тощо.

Особливе місце займає так званий „центр додатків Maple” (Maple Application Center, <http://www.mapleapps.com>), де міститься багато програм для розв'язування задач із різноманітних галузей засобами системи Maple.

**Система Mathematica.** Розробник — фірма Wolfram Research Inc ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)). Перша версія системи з'явилась у 1988 році, остання Mathematica 9.0 — 28 листопада 2012 року.

Система Mathematica 9.0 може працювати під управлінням таких операційних систем як Windows NT4/2000/XP/Vista, Linux, MacOS X, SUN OS, SUN Solaris, IBM AIX, HP-UX, на таких платформах як PC's, Apple, SUN, IBM, HP.

Можливості використання системи Mathematica 9.0:

- розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем;
- символічні перетворення виразів;
- розв'язування різноманітних задач математичного аналізу (обчислення границь; диференціювання й інтегрування функцій як аналітично, так і чисельно; обчислення скінченних і нескінченних сум і добутків; розвинення функцій в ряди Тейлора тощо);
- розв'язування диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних;
- розв'язування задач умовної і безумовної оптимізації (зокрема задач лінійного дискретного і нелінійного програмування);
- розв'язування задач лінійної алгебри (операції над матрицями: додавання, множення, обчислення оберненої, транспонованої матриць, обчислення визначника, обчислення мінорів, множення вектора на матрицю, пошук власних значень і векторів, розв'язування матричних рівнянь тощо);
- розвинена дво- і тривимірна графіка, можливість імпортування й експортування графіки у кілька форматів (BitMap (BMP), Device Independent Bitmap (DIB), Macpaint (MAC), Postscript (PS, EPS), Windows Enhanced Metafile (EMF), Tagged Image File Format (TIFF), Adobe Illustrator File (AL), Wave (WAV), MPS, EPSI, EPSTIFF, PDF, PSImage, XBitmap, PCL, PBM, MGF, SDTS, FITS, SVG, DICOM, GIF, JPG, DXF);
- вбудована мова програмування.

Попри це, система містить пакети розширень, за рахунок яких значно розширюються можливості її використання для розв'язування спеціальних задач.

Фірма-розробник підтримує електронний довідник (<http://mathworld.wolfram.com>), у якому міститься велика кількість наукових і навчальних програмних продуктів.

**Система Matlab.** Розробник – фірма The Mathworks Inc ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)).

Система Matlab [5] була розроблена Молером (С. Moler) і з кінця 70-х років широко використовувалась на великих ЕОМ. На початку 80-х років Джон Літл (John Little) з фірми MathWorks Inc розробив версії системи PC Matlab для комп'ютерів класу IBM PC, VAX і Macintosh. Далі були розроблені версії для робочих станцій Sun, комп'ютерів з операційною системою UNIX та інших типів великих і малих ЕОМ.

Версія системи Matlab (Matlab 2008a) може функціонувати під управлінням таких операційних систем як Windows, Linux, UNIX, MacOS X, на таких платформах як PC, SUN, Macintosh.

#### Можливості використання системи Matlab 2008a:

- розв’язування різноманітних задач математичного аналізу (обчислення границь; диференціювання й інтегрування функцій як аналітично, так і чисельно; перетворення Фур’є тощо);
- реалізація алгоритмів обчислювальної математики (сплайн-інтерполяція, метод Рунге-Кутта для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь тощо);
- розв’язування задач умовної і безумовної оптимізації (зокрема задач лінійного, дискретного та нелінійного програмування);
- розв’язування задач лінійної алгебри (додавання, множення, обчислення оберненої, транспонованої матриць, обчислення визначників і мінорів, множення матриці на вектор, пошук власних значень і векторів, розв’язування матричних рівнянь тощо);
- опрацювання статистичних даних;
- можливість імпортування й експортування даних у формати ASCII, Binary, Lotus 1-2-3, Excel, Word, PowerPoint;
- можливість імпортування й експортування графіки форматів PS, EPS, Bitmap, EMF, GIF, AVI, JPG, TIFF;
- вбудована мова програмування.

Попри це, система Matlab містить пакети розширень.

Важливим нововведенням у системі Matlab 2008a є підтримка інших об’єктно-орієнтованих мов програмування, таких як C++ і Java. До числа додаткових нововведень можна віднести можливість роботи з файлами визначення класів, що дає змогу описувати властивості, методи, класи та події. З’явилися нові засоби для реалізації паралельних обчислень, верифікації і перевірки отриманих результатів, а також функція автоматичної генерації коду у форматі AUTOSAR.

**Система Scilab.** Пакет Scilab [2] є вільно поширюваною (разом з вихідними кодами) СКМ. Його розробляли дослідницькі інститути INRIA і ENPC (обидва розташовані у Франції). Починаючи з травня 2003 року, підтримку продукту взяла на себе спеціально створена для цієї мети компанія Scilab Consortium, на сайті якої ([www.scilab.org](http://www.scilab.org)) можна завантажити останню версію програми і повний комплект документації. Пакет Scilab розробляється для операційних систем Windows, Linux, MacOS X.

Пакет Scilab не випадково має ім’я, співзвучне з Matlab — однією з найбільш потужних комерційних СКМ. У системах багато спільного: від інтерфейсу до синтаксису. Отже, пакет Scilab можна розглядати як зменшений варіант системи Matlab, у якому зберігаються основні можливості використання останнього.

У пакеті передбачено підтримку основних елементарних і багато спеціальних математичних функцій (еліптичні інтеграли, функції Бесселя, Неймана тощо). Особливістю пакету є те, що він призначений майже винятково для реалізації чисельних методів — набір символічних операцій обмежений.

У пакеті Scilab передбачено обмін даними з іншими програмами, проте можливості імпорту/експорту системи не можна назвати багатими. Підтримуються формати документів Matlab, Maple, структурований текст та TeX.

Функціональні можливості використання системи:

- побудова дво- і тривимірних графічних об’єктів, анімація;
- розв’язування задач лінійної алгебри;
- розв’язування диференціальних рівнянь і їх систем;
- розв’язування задач лінійного і квадратичного програмування;
- розв’язування задач статистики;
- вбудована мова програмування.

Пакет Scilab містить пакети розширень, за рахунок чого збільшуються можливості його використання до розв'язування задач.

**Система Maxima.** За походженням Maxima [18] належить до однієї з найперших СКМ. Розвиток системи Maxima бере свій початок з 60-х років ХХ ст., коли з'явилася програма з назвою Macsyma, де реалізовувались всі найновіші (на той час) технології в галузі комп'ютерної математики. Проект Macsyma був заснований Енергетичним Управлінням США (Department of Energy, DOE). Створювали його в Масачусетському Технологічному Інституті (Massachusetts Institute of Technology, MIT) на основі мови Lisp, яка вважалася на той момент найпридатнішою для створення систем символічних обчислень. Спочатку система Macsyma була закритим комерційним проектом. Вільний доступ до проекту став можливим завдяки професору Вільяму Шелтеру (William Schelter), який домогся від DOE отримання коду Macsyma і його публікації під ліцензією GPL з назвою Maxima.

Використання системи Maxima забезпечує досить широкі можливості у виконанні символічних обчислень. Це, по суті, єдина з вільно поширюваних відкритих систем, яка не поступається комерційним СКМ Mathematica і Maple. Система Maxima розповсюджується під ліцензією GPL і є доступною як користувачам операційних систем Linux, так і користувачам Windows.

У системі Maxima прийнятий такий самий принцип нумерації версій, як і в операційній системі Linux: номер складається з трьох чисел, розділених крапками, причому номери з непарним середнім числом відповідають так званим development-версіям (у розробці), з парним — stable (стабільним). Стабільність однієї гілки і статус „у розробці” іншої тут означає не стільки стабільність чи нестабільність роботи програми, скільки стабілізацію самого процесу розробки: у development-гілці нова молодша версія може мати нові функції і нові інтерфейси, у стабільній же молодшій версії будуть містити тільки виправлення помилок.

Мінімум, що потрібно для того, щоб почати роботу із системою Maxima в будь-якому розповсюдженому Linux-дистрибутиві, це пакет maxima. Цей пакет містить насправді мінімум: консольну версію програми з необхідними бібліотеками і кілька демо-файлів. У консольній версії забезпечується дещо проста візуалізація: усі математичні формули будуються звичайними текстовими символами в кілька рядків дисплею, а зображення графіків відображаються в окремому вікні (причому продовження роботи можливе тільки після його закриття). Проте, за рахунок цього різко зменшуються вимоги до технічних характеристик комп'ютера — система Maxima в консольному варіанті може використовуватися на комп'ютерах з досить скромними характеристиками. Для системи Maxima розроблено кілька графічних інтерфейсів: xmaxima, emaxima, imaxima, wxMaxima та інші.

Система Maxima може використовуватися з усіма сучасними варіантами ОС Linux і UNIX, Windows. Основні команди і функції системи Maxima містяться в ядрі. У системі Maxima, як і в більшості СКМ, включені пакети розширень, за рахунок чого збільшуються можливості її використання під час розв'язування спеціальних задач.

Слід відзначити комплекс програм **GRAN** (GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D) [8], розроблений в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова. Ці програми можуть використовуватись у навчанні математики в школі, а також у педагогічному університеті у навчанні аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, обчислювальної математики, фізики, фахових методик з фізико-математичних дисциплін тощо.

За допомогою **GRAN1** можна розв'язувати досить широкий клас задач, а саме задачі на:

- побудову графіків залежностей між змінними, заданих у різних системах координат;
- дослідження графіків функцій і залежностей між змінними;
- побудову січних і дотичних до графіків функцій;
- графічне розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем з однією чи двома змінними;
- опрацювання статистичних даних, включаючи графічний аналіз даних;
- обчислення визначених інтегралів, площ довільних фігур і поверхонь, об'ємів тіл обертання;
- дослідження залежностей між змінними, що містять до 9-ти параметрів.

**GRAN-2D** призначений для графічного аналізу геометричних об'єктів на площині. Використання пакету GRAN-2D надає можливість:

- створювати динамічні моделі геометричних фігур і їх комбінацій, аналогічно до класичних побудов за допомогою циркуля і лінійки, а також використовувати елементи аналітичної геометрії (систему координат, рівняння прямих і кіл, алгебраїчні залежності між частинами побудови, графіки функцій тощо);
- проводити вимірювання геометричних величин;
- досліджувати геометричні місця точок;
- аналізувати динамічні вирази, висувати припущення, встановлювати закономірності;
- будувати графічні зображення, використовуючи коментарі, кнопки, підказки та гіперпосилання;
- експортувати рисунки у графічні формати для вбудовування їх у інші додатки і для створення геометричних ілюстрацій тощо.

Для графічного аналізу 3D об'єктів призначений пакет **GRAN-3D**. Використання пакету GRAN-3D дає змогу:

- створювати і перетворювати моделі базових просторових об'єктів;
- виконувати перерізи многогранників площинами;
- обчислювати об'єми і площі поверхонь многогранників і тіл обертання;
- вимірювати відстані і кути.

Програми з комплексу GRAN оснащені інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом з контекстно-чутливою допомогою. Для опанування основних прийомів з ними достатньо володіти елементарними навичками роботи з програмами з графічним інтерфейсом.

**SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation** — програмне середовище для алгебраїчних досліджень) — це безкоштовна вільно поширювана математична система для виконання чисельних розрахунків і символічних перетворень та наочної візуалізації даних. SAGE має власне символічне ядро, проте виступає переважно як інтегратор різних систем, надаючи їм єдиний Web-інтерфейс.

Перша версія SAGE з'явилась у лютому 2005 року. Остання версія системи SAGE доступна за адресою <http://www.sagemath.org/>.

Основними складовими SAGE [23] є:

- інтерфейси до СКМ Magma, Maple, Mathematica, Matlab, MuPAD та ін.;
- пакети для алгебри й обчислень (Maxima), швидких високоточних обчислень (GMP), лінійної алгебри (Linbox), графіки (Gnuplot), теорії чисел (PARI), теорії груп (GAP), оптимізації (GSL) та ін.;
- мови програмування (Python, Lisp, Fortran, C/C++ та ін.).

У системі SAGE може використовуватися два інтерфейси: локальний інтерфейс командного рядка і Web-інтерфейс. Наявність Web-інтерфейсу, безкоштовність і

відкритість системи — це основні, проте не єдині, переваги системи SAGE. До них можна віднести ще такі:

- невимогливість до апаратної складової обчислювальної системи;
- індиферентність до використовуваного браузера й операційної системи;
- підтримка інтерфейсів комерційних СКМ: Magma, Maple, Mathematica, Matlab тощо;
- подання математичних виразів у звичній нотації не вимагає встановлення додаткового програмного забезпечення — достатньо дозавантажити математичні шрифти;
- публікація робочих листів у мережі Internet;
- підтримка технології Wiki;
- потужний інструментарій для побудови графічних об'єктів.

Систему SAGE можна використовувати в процесі навчання лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, дискретної математики, теорії алгоритмів, моделювання, методів оптимізації, чисельних методів, теорії кодування, паралельних і розподілених обчислень. Цю СКМ все частіше починають називати sagemath.

### 3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вважаємо доцільним наводити порівняльну характеристику систем Mathematica (найкращої за всіма категоріями порівняння (за Стейнхаусом [25])) і Maple (однієї з кращих у галузі символьних обчислень) майбутнім бакалаврам інформатики.

Слід також звернути увагу студентів на те, що назви всіх команд, функцій у системі Mathematica починаються з великої літери і що аргумент функцій і команд задається у квадратних дужках. Можна розповісти про призначення дужок — круглих (для побудови математичних виразів), фігурних (для задання списків), квадратних (для вказування аргументу функції). Далі слід наголосити на тому, що якщо опис виразу (команди) закінчується крапкою з комою, то вираз обчислюється (команда виконується), проте результат не виводиться. Також увагу студентів слід звернути на операцію надання змінним значення: у системі Mathematica надавати значення можна за допомогою операторів  $=$  і  $:=$ . Доцільно пояснити відмінність між цими операторами. Звернення до пакетів розширень у системі Mathematica здійснюється за командою:

```
<<Package`
```

де Package — назва пакету. Після виконання такої команди можна використовувати всі команди, які містяться у пакеті Package.

Багато команд і функцій системи Mathematica, які містяться в ядрі, є подібними до функцій ядра й основної бібліотеки системи Maple, тому корисно використати аналогію. Наприклад, у системі Maple для розкриття дужок у виразі використовується команда `expand`, а у системі Mathematica — `Expand`.

Після характеристики деяких відмінностей у синтаксисі систем Maple і Mathematica доцільно перейти до опису стандартних арифметичних функцій і команд, розглянути команди для виконання символьних перетворень виразів, для аналітичного розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем у системі Mathematica. Наразі слід звернути увагу на деякі команди, зокрема на команду `Solve`, за якою розв'язуються тільки рівняння і системи рівнянь, на відміну від системи Maple. За командою `Solve` можна аналітично розв'язувати алгебраїчні рівняння до четвертого порядку включно (у системі Maple тільки до третього). Для аналітичного розв'язування рівнянь використовуються також такі команди: `Roots`, `Reduce`, а для чисельного — `NSolve` і `FindRoot`.



Для розв'язування нерівностей у системі Mathematica використовується команда `InequalitySolve` з пакету розширень `Algebra` (для версій Mathematica 5.x і вищих нерівності можна розв'язувати за командою `Reduce`).

Після ознайомлення з командами для виконання символьних перетворень і розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем можна розглянути команди для обчислення границь, диференціювання, інтегрування та розвинення функцій в ряд Тейлора. При цьому наголосити, що для обчислення первісних, визначеного і кратних інтегралів використовується єдина команда `Integrate`, на відміну від системи Maple, а для чисельного інтегрування — `NIntegrate`. Вбудованих команд для перевірки функції на неперервність і визначення точок розриву у системі Mathematica немає.

Після характеристики команд для розв'язування задач математичного аналізу доцільно перейти до опису команд, призначених для розв'язування задач лінійної алгебри. Починати розгляд цього питання слід з поняття „списку”, оскільки вектори і матриці можна задавати за допомогою списку або масиву `Array`. Команди для розв'язування задач лінійної алгебри містяться в ядрі системи Mathematica (на відміну від Maple) і є подібними до команд відповідних пакетів `linalg` і `LinearAlgebra` системи Maple. У зв'язку з цим детально характеризувати ці команд не потрібно. Можна просто перерахувати ці команди і з назв студентам буде зрозуміло їхнє призначення. Для роботи зі структурами матриць, розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом LU-факторизації та деяких інших спеціальних задач лінійної алгебри використовуються команди пакету `LinearAlgebra`.

На відміну від системи Maple, у якій за допомогою команди `plot` можна будувати на площині явно, таблично та параметрично задані функції, система Mathematica містить спеціальні команди для побудови графічних зображень відповідно до кожного з перерахованих способів задання функцій: `Plot` (побудова графіків явно заданих функцій однієї змінної), `ListPlot` (побудова графіків функцій, заданих таблично), `ParametricPlot` (побудова графіків функцій, заданих параметрично). Те саме стосується й побудови графічних об'єктів у просторі. Для побудови графіків неявно заданих залежностей використовується команда `ImplicitPlot` з пакету розширень `Graphics`. Для побудови тривимірних поверхонь використовуються команди `Plot3D` (побудова явно заданої функції від двох аргументів), `ListPlot3D` (побудова функції, заданої таблично), `ParametricPlot3D` (побудова функції, заданої параметрично). На відміну від системи Maple, Mathematica не містить команди для побудови поверхонь неявно заданих функцій у просторі.

Під час вивчення системи Mathematica варто звернути увагу студентів на функціональне, процедурне програмування та програмування, яке базується на правилах перетворень. При цьому слід наголосити, що Mathematica містить три оператори циклу (`Do`, `For`, `While`), на відміну від Maple (містить один оператор `do`), і пояснити їх виконання, а також детально розглянути функціональне програмування і програмування, що базується на правилах перетворень.

Під час розгляду загальної характеристики СКМ подаються відомості про `Derive`, `Maxima`, `Matlab`, `Mathcad`, наголошується на основних можливостях їх використання й основних правилах роботи з ними. Наразі, особлива увага звертається на систему `Maxima`, оскільки вона є вільно поширюваною. Наголошується на тому, що вона оснащена системою меню, що дає змогу виконувати символьні перетворення, розв'язувати рівняння, обчислювати границі, похідні, інтеграли тощо, не знаючи мови для опису команд щодо виконання цих дій. Тому систему `Maxima` можна використовувати для вивчення математичних дисциплін навіть на першому курсі педагогічного університету. Застосування системи `Maxima` не викличе ніяких труднощів у студентів під час розв'язування задач математичного аналізу і лінійної

алгебри — від студентів вимагається тільки правильно вибрати пункт меню й увести вираз. Проте для програмування у системі Maxima потрібні знання мови і синтаксису, а також і певних команд.

На нашу думку, вважаємо доцільним наголосити студентам на пряму підготовки «Інформатика\*», що вибір СКМ залежить від поставленої задачі і можливого способу її розв’язування. Є кілька вагомих причин, що зумовлюють необхідність для фахівців у галузі математики, науково-технічних досліджень, знати основи роботи з кількома математичними системами, серед яких можна виділити такі [21]:

- необхідність раціонального вибору математичної системи з урахуванням особливостей задачі, що розв’язується;
- необхідність розв’язування складних задач за допомогою різних систем, щоб перевірити правильність результатів, не покладаючись на одну систему (збільшити вірогідність одержаного результату);
- необхідність підготовки математичних документів (статей, звітів, книг, навчальних занять і т. д.) підвищеної якості.

Останнє говорить на користь інтеграції математичних систем між собою та з іншими програмами, що може розглядатися як один з перспективних напрямів розвитку систем комп’ютерної математики. Разом з тим, застосування СКМ тими, хто не має достатніх знань, умінь та навичок розв’язувати математичні задачі, може призвести до некоректних результатів. Зокрема, наведемо приклади обчислення значень виразів у СКМ Mathematica 6.0, Maple 11.0, Maxima-5.16.3 (табл. 1).

Таблиця 1

**Приклади розв’язування завдань у СКМ Mathematica 6.0,  
Maple 11.0, Maxima-5.16.3**

Mathematica 6.0	Maple 11.0	Maxima-5.16.3
1. Обчислити невизначений інтеграл $\int x^n dx$ .		
<pre>In[1]:= Integrate[x^n, x] Out[1]= <math>\frac{x^{1+n}}{1+n}</math></pre>	<pre>int(x^n, x);</pre> $\frac{x^{(n+1)}}{n+1}$	<pre>(%i2) integrate(x^n, x); Is n+1 zero or nonzero?nonzero; (%o2) <math>\frac{x^{n+1}}{n+1}</math> (%i3) integrate(x^n, x); Is n+1 zero or nonzero?zero; (%o3) log(x)</pre>
2. Розв’язати рівняння $\sin 4x - \ln x = 0$		
<pre>In[12]:= FindRoot[Sin[4 x] - Log[x] == 0, {x, 1.5, 2.5}] Out[12]= {x -&gt; 1.71286}</pre>	<pre>fsolve(sin(4*x) - ln(x)=0, x=1.5..2.5); 2.140047470</pre>	<pre>(%i7) find_root(sin(4*x)-log(x)=0, x, 1.5, 2.5); function has same sign at endpoints [f(1.5)=- 0.68488060630709, f(2.5)=- 1.460311842763525] -- an error. To debug this try debugmode(true);</pre>

Проаналізуємо приклади, наведені у табл. 1.

1) За командами (Integrate, int, integrate) відшуковується тільки одна з первісних, а не невизначений інтеграл. Результат залежить від параметра  $n$ . Системи Mathematica і Maple на це увагу «не звертають». Тільки система Maxima «просить» користувача уточнити значення параметра  $n$  (Is  $n+1$  zero or nonzero?).

2) Для розв'язування трансцендентних рівнянь у системах Mathematica, Maple та Maxima використовуються відповідно команди FindRoot, fsolve та find\_root. Запис цих команд майже ідентичний. Проте результати розв'язування рівняння в кожній з цих систем є різними. Це пояснюється такими чинниками:

- а) у системі Mathematica відшуковується один корінь рівняння, де беруться за початкове наближення вказані значення;
- б) у системі Maple відшуковується на вказаному проміжку один корінь;
- в) у системі Maxima спочатку перевіряється достатня умова існування (на кінцях інтервалу, де відшукується корінь, функція повинна набувати різних за знаком значень). Власне результатом виконання команди є повідомлення, що функція набуває однакових за знаком значень, «вказуючи», що це помилка.

З наведеної таблиці видно, що незважаючи на те, що у більшості випадків за допомогою СКМ можна отримати правильні і коректні результати, є деякі приклади, що вимагають від користувача вміння аналізувати отриманий результат (як мінімум), для чого необхідні знання з математики (або певного розділу). Тому, одне з найважливіших завдань викладачів — продемонструвати студентам якомога більше таких прикладів, у яких необхідно осмислено використовувати відповідь, що дає СКМ [14].

Можна визначити такі напрямки розвитку сучасних СКМ:

- перетворення СКМ в інтелектуальні системи подання знань і їх експертної оцінки;
- інтеграція систем одна з одною і деякими офісними і графічними програмами;
- розширені можливості обчислень, що охоплюють практично всі галузі застосувань математики;
- розширені засоби візуалізації обчислень;
- перетворення СКМ в універсальні системи;
- упровадження нових функцій, наприклад, для реалізації нечіткої логіки, нейронних мереж тощо;
- упровадження в СКМ засобів для створення електронних підручників у різних форматах;
- створення документів з текстами, формульними виразами, рисунками і графіками найвищої поліграфічної якості.

Перераховані можливості використання СКМ роблять їх однаково привабливими для наукових співробітників й інженерів, викладачів і студентів навчальних закладів.

#### 4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Вибираючи математичний пакет серед усієї різноманітності СКМ, слід враховувати кілька факторів. По-перше, потреби для яких необхідна СКМ (для наукових досліджень чи для супроводу навчального процесу). По-друге, вартість, якщо система є комерційною. По-третє, вибір СКМ залежить від задач, які необхідно розв'язувати (наприклад, чисельно чи аналітично, які можливості використання СКМ тощо).

Для наукових цілей вибір СКМ залежить від вхідних даних і результату, що необхідно отримати. Наприклад, фізику-теоретику більш цікава аналітична модель досліджуваного явища чи об'єкта, тому доцільніше використовувати пакети, такі як

Mathematica, Maple, Maxima. Фізикам-експериментаторам для опрацювання великих масивів даних зручно використовувати систему Matlab.

СКМ є середовищем для проектування і використання програмних засобів підтримки навчання фундаментальних дисциплін, тому можуть бути використані як інноваційна педагогічна технологія.

Використання засобів даного типу «у хмарі» є перспективним напрямом їхнього розвитку, коли виникає більше можливостей адаптації середовища навчання до рівня навчальних досягнень, індивідуальних потреб і цілей того, хто вчиться. Звернення до програмного забезпечення, що вже знаходиться на віртуальному робочому місці студента, не потребує витрачання навчального часу на інсталяцію й оновлення, створює умови для більш диференційованого підходу до організації навчання, дає можливість зосередитися на вивченні основного матеріалу [22].

Завдяки цьому, високотехнологічна інфраструктура інформаційно-комунікаційного середовища має потенціал для створення умов рівного доступу до кращих зразків електронних ресурсів і засобів навчального призначення для значно ширшого (практично необмеженого) кола користувачів. Виникає можливість зосередити увагу студентів на засадничих поняттях, принципах, підходах за рахунок вивільнення часу і зусиль, які йдуть на встановлення, підтримування, обслуговування програмного забезпечення, і навіть значно знівелювати реальні просторові й часові межі реалізації доступу до необхідних електронних ресурсів. Даний підхід розвиває міжпредметні зв'язки, сприяє поглибленому вивченню матеріалу, розширює можливості самостійного дослідження, поєднання теорії і практики, інтеграції знань стосовно різних підрозділів і рівнів інформатичної освіти. Усі ці риси також притаманні процесу фундаменталізації навчання [22].

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аладьев В. З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / Аладьев В. З., Бойко В. К., Ровба Е. А. — Гродно : Гродненский госуниверситет, 2011. — 518 с.
2. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. — М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.
3. Биков В. Ю. Модели організаційних систем відкритої освіти / В. Ю. Биков. — К. : Атіка, 2009. — 684 с.
4. Дьяконов В. П. МАТЕМАТИКА 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления / Владимир Павлович Дьяконов. — М. : ДМК Пресс, 2006. — 576 с.
5. Дьяконов В. П. MatLab 6.0/6.1/6.5/6.5 + SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений / Владимир Павлович Дьяконов. — М. : СОЛОН-Пресс, 2004. — 592 с.
6. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика / Владимир Павлович Дьяконов. — М. : Нолидж, 2001. — 1296 с.
7. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. пр. — К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. — Вип. 7. — С. 3–16.
8. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів. — 2-ге вид. / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. — К. : НПУ імені Драгоманова, 2009. — 282 с.
9. Капустина Т. В. Теория и практика создания и использования в педагогическом вузе новых информационных технологий на основе компьютерной системы Mathematica : дисс. ... доктора пед. наук : 13.00.08, 13.00.02 / Тетьяна Васильевна Капустина. — М., 2003. — 257 с.
10. Ключко В. І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі : навч.-метод. посіб. / В. І. Ключко. — Вінниця : ВДГУ, 1997. — 300 с.
11. Компьютерная математика: Символьные и алгебраические вычисления / [пер. с англ.]; под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. — М. : Мир, 1986. — 392 с.
12. Кремінський В. Г. Освіта в структурі цивілізаційних змін: актуальні проблеми // Управління освітою, 2011. — №2(254). — С. 3–5.

13. Львов М. С. Концепція програмної системи підтримки математичної діяльності / Львов М. С. // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. пр. — К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. — Вип. 7. — С. 36–48.
14. Парфьонова Н. Д. Нові підходи до використання вільно поширюваної системи комп'ютерної математики МАХІМА у навчанні функцій комплексної змінної // Електронне фахове видання. Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 1 (27). — Режим доступу до журналу : <http://journal.iitta.gov.ua>.
15. Проект "Рівний доступ до якісної освіти в Україні" [Електронний ресурс]. — Режим доступу : [http://www.mon.gov.ua/main.php?query=newstmp/2009\\_1/06\\_02/5](http://www.mon.gov.ua/main.php?query=newstmp/2009_1/06_02/5).
16. Раков С. А. Компьютерные эксперименты в геометрии : учеб. пособие для учащихся по курсу геометрии / Раков С. А., Горох В. П. — Х. : РЦНИТ, 1996. — 175 с.
17. Рибак С. М. Використання інформаційних технологій навчання у підготовці вчителя фізики / С. М. Рибак, А. М. Сільвейстр // Наукові записки. Серія: Педагогіка і психологія : зб. наук. пр. / ред. кол. : М. І. Сметанський. — Вінниця : Діло, 2007. — Вип. 20. — С. 145–151.
18. Семеріков С. О. Махіма 5.13: довідник користувача / Сергій Олексійович Семеріков; за ред. академіка М. І. Жалдака. — К., 2007. — 48 с.
19. Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей : монографія / Співаковський О. В. — Херсон : Айлант, 2003. — 228 с.
20. Тан К.Ш. Символьный C++: Введение в компьютерную алгебру с использованием объектно-ориентированного программирования : пер. со 2-го англ. узд. / Тан К. Ш., Стиб В.-Х., Харди И. — М. : Мир, 2001. — 622 с.
21. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія / Юрій Васильович Триус. — Черкаси : Брама-Україна, 2005. — 400 с.
22. Шишкіна М. П. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у сучасному високотехнологічному середовищі / М. П. Шишкіна, У. П. Когут // Інформаційні технології в освіті. — 2013. — № 15. — Херсон : ХДУ. — С. 310–318.
23. Шокалюк С. В. Основи роботи в SAGE / за ред. академіка АПН України М. І. Жалдака. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — 64 с.
24. Cha J. ICTs for new Engineering Education / J. Cha, B. Koo. // Policy Brief, February 2011.: UNESCO, 2011, 11 p.
25. Steinhaus S. Comparison of Mathematical Programs for Data Analysis (Edition 5.03) [Електронний ресурс]. — Munchen/Germany. — 64 p. — Режим доступу : <http://www.scientificweb.de/ncrunch/>.
26. Mathematical Computation with Maple V: Ideas and Applications/ Ed. by T.Lee. — Ontario, Canada: Birkhauser Boston, 1993. — 199 с. — Режим доступу : <http://books.google.com.ua/books?id>.

*Матеріал надійшов до редакції 05.03.2014 р.*

## **СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ИНФОРМАТИКА»**

### **Кобыльник Тарас Петрович**

доцент, кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной математики Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко, г. Дрогобыч, Украина  
[taras2408@mail.ru](mailto:taras2408@mail.ru)

### **Когут Ульяна Петровна**

аспирант  
Институт информационных технологий и средств обучения НАПН Украины, г. Киев, Украина  
[ulyana\\_kogut@mail.ru](mailto:ulyana_kogut@mail.ru)

**Аннотация.** В статье приведена общая характеристика наиболее популярных систем компьютерной математики как коммерческих (Maple, Mathematica, Matlab), так и свободно распространяемых (Scilab, Maxima, комплекс программ GRAN, Sage) и условия эффективного использования данных систем как средства фундаментализации учебного процесса бакалавров информатики. Рассмотрена роль СКМ в подготовке бакалавров информатики. Определены направления педагогического использования СКМ при изучении

информатических и физико-математических дисциплин. Приведены задачи, в которых надо «осторожно» использовать ответы, полученные с помощью СКМ. Определены перспективные направления развития СКМ в высокотехнологичной среде.

**Ключевые слова:** подготовка бакалавров информатики; информатические дисциплины, системы компьютерной математики; Maple; Mathematica; Matlab; Maxima; MathCAD; Sage.

## COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS IN STUDENTS' LEARNING OF "INFORMATICS"

### **Taras P. Kobylnyk**

PhD (pedagogical sciences), associate professor of the Department of computer science and computational mathematics

Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine

*taras2408@mail.ru*

### **Ulyana P. Kogut**

postgraduate student

Institute of Information Technologies and Learning Tools of NAPS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*ulyana\_kogut@mail.ru*

**Abstract.** The article describes the general characteristics of the most popular computer mathematics systems such as commercial (Maple, Mathematica, Matlab) and open source (Scilab, Maxima, GRAN, Sage), as well as the conditions of use of these systems as means of fundamentalization of the educational process of bachelor of informatics. It is considered the role of CMS in bachelor of informatics training. It is identified the approaches of CMS pedagogical use while learning information and physics and mathematics disciplines. There are presented some tasks, in which we must carefully use the «responses» have been received using CMS. It is identified the promising directions of development of computer mathematics systems in high-tech environment.

**Keywords:** bachelor of informatics; disciplines of informatics; computer mathematics systems; Maple; Mathematica; Matlab; Maxima; MathCAD; Sage.

## REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aladev V. Z. Programming packages Maple and Mathematica: Comparative aspect / Aladev V. Z., Boyko V. K., Rovba E. A. — Grodno : Grodno State University, 2011. — 518 p. (in Russian)
2. Alekseev E. P. Scilab: Address the engineering and mathematical problems / Alekseev E. P., Chesnokov O. V., Rudchenko E. A. — M. : ALT Linux; BINOM. Knowledge Laboratory, 2008. — 269 p. (in Russian)
3. Bykov, V. Models of Organizational Systems of Open Education / V. Bykov. — Kyiv : Atika, 2009. (in Ukrainian).
4. Dyakonov V. P. MATHEMATICA 5.1/5.2/6.0. Programming and mathematical calculations / Dyakonov V. P. — M. : DMK Press, 2006. — 576 p. (in Russian)
5. Dyakonov V. P. MatLab 6.0/6.1/6.5/6.5 + SP1 + Simulink 4/5. Processing of signals and images / Dyakonov V. P. — M. : SOLON-Press, 2004. — 592 p. (in Russian)
6. Dyakonov V. P. Computer Mathematics. Theory and practice / Dyakonov V. P. — M. : NOWLEDGE, 2001. — 1296 p. (in Russian)
7. Zhaldak M. I. The pedagogical potential of computer-based systems of teaching mathematics // Computer-oriented training system. — K. : NPU name M. P. Drahomanova, 2003. — N. 7. — P. 3–16. (in Ukrainian)
8. Zhaldak M. I. Mathematics computer. Guide for Teachers / Zhaldak M. I., Goroshko M. I., Vinnychenko E. F. — K. : NPU name M. P. Drahomanova, 2009. — 282 p. (in Ukrainian)
9. Kapustina T. V. Theory and practice of creating and using a pedagogical university of new information technologies on the basis of a computer system Mathematica : diss ... the doctor ped. Sciences : 13.00.08, 13.00.02 / Kapustina T. V. — M., 2003. — 257 p. (in Russian)

10. Klochko V. I. The use of new information technologies in the study of higher mathematics in technical college : Textbook / Klochko V. I. — V. : VSTU, 1997. — 300 p. (in Ukrainian)
11. Computer Mathematics: Symbolic and algebraic computation / [translation with English]; ed B. Buchberger. D. Collins, P. Loos. — M. : Mur, 1986. — 396 p. (in Russian)
12. Kremin V. G. Education in the structure of civilizational change: current problems // Department of Education, 2011. — № 2(254). — P. 3–5. (in Ukrainian)
13. Lvov M. S. The concept of a software system support mathematical activity / Lvov M. S. // Computer-oriented training system. — K. : NPU name M. P. Drahomanova, 2003. — N. 7. — P. 36–48. (in Ukrainian)
14. Natalia D. Parfyonova . New ways of the using of the freeware system of computer mathematics Maxima for a study of functions of a complex variable [online] // Information technologies and learning tools. — 2012. — № 1 (27). — Available from : <http://journal.iitta.gov.ua>. (in Ukrainian)
15. The "Equal Access to Quality Education in Ukraine" [online]. — Available from : [http://www.mon.gov.ua/main.php?query=newstmp/2009\\_1/06\\_02/5](http://www.mon.gov.ua/main.php?query=newstmp/2009_1/06_02/5). (in Ukrainian)
16. Rakov S. A. Computer experiments in the geometry: Textbook. Allowance for students at the rate of geometry / Rakov S. A., Goroch V. P. — X. : RTSNIT, 1996. — 175 p. (in Russian)
17. Rybak S. M. The use of information technology education in the preparation of teachers of physics / Rybak S. M. Silveystr A. M. // Scientific Notes. Series: Pedagogy and Psychology : Collected Works. — V. : Dilo, 2007. — N. 20. — P. 145–151. (in Ukrainian)
18. Semerikov S. O. Maxima 5.13: owner manual / Semerikov S. O. ; edited by Academician Zhaldak M. I. — K., 2007. — 48 p. (in Ukrainian)
19. Spivakovsky O. V. Theory and practice of using information technology in preparing students mathematical skills : monograph / Spivakovsky O. V. — X. : Ailant, 2003. — 228 p. (in Ukrainian)
20. Tan K. Sh. Character C++: Introduction to computer algebra using object-oriented programming / Tan K. Sh., Stiboly I. W.-H., Hardy I. — M. : Mur, 2001. — 662 p. (in Russian)
21. Trius U. V. Computer-oriented teaching of mathematics learning: : monograph / Trius U. V. — Cherkasy Gate-Ukraine, 2005. — 400 p. (in Ukrainian)
22. Shyshkina M. P. Fundamentalization informatycs training courses in today's high-tech environment / M. Shyshkina, U. Kogut // Information Technologies in Education. — 2013. — № 15. — C. 310–318. (in Ukrainian)
23. Shokalyuk S. V. Fundamentals SAGE / edited by Academician Zhaldak M. I. — K. : NPU name M. P. Drahomanova, 2008. — 64 p. (in Ukrainian)
24. Cha J. ICTs for new Engineering Education / J. Cha, B. Koo. // Policy Brief, February 2011.: UNESCO, 2011, 11 p. (in English)
25. Steinhaus S. Comparison of Mathematical Programs for Data Analysis (Edition 5.03) [online]. — Munchen / Germany. — 64 p. — Available from : <http://www.scientificweb.de/ncrunch/>. (in English)
26. Mathematical Computation with Maple V: Ideas and Applications [online] / Ed. by T.Lee. — Ontario, Canada: Birkhauser Boston, 1993. — 199 p. — Available from : <http://books.google.com.ua/books?id>. (in English)