

3. *Mäkinen J.* Absolute-gravity measurements in Lithuania, Estonia and Latvia in 1994–1995 / J. Mäkinen, P. Petroškevičius, H. Sildvee, J. Kaminskis // European Geophysical Society, Annals Geophysicae: Supplement I to Volume 14. 1996. – P. C 231.
4. *Sas-Uhrynowski A.* Establishment of Lithuanian national gravimetric first order network / A. Sas-Uhrynowski, S. Mroczek, A. Sas, P. Petroškevičius, R. Obuchovski, D. Rimkus // Geodezija ir kartografija, 2002. – XXVIII, No 3. – P. 75-82.
5. *Paršeliūnas E.K.* Quality of Lithuanian national gravimetric network /E.K. Paršeliūnas, P. Petroškevičius // Harita dergisi: proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service, 2007, spec. iss. 18. – P. 388-392.
6. *Paršeliūnas E.* Some issues of the national gravimetric network development in Lithuania /E. Paršeliūnas, R. Obuchovski, R. Birvydienė, P. Petroškevičius, A. Zakarevičius, V.Č. Aksamitauskas, M. Rybokas // Journal of vibroengineering, 2010, Vol.12. – P. 685-690.
7. *Paršeliūnas E.* An investigation of the automatic relative gravimeters / E. Paršeliūnas, P. Petroškevičius, R. Obuchovski, R. Birvydienė // Mechatronic Systems and Materials V. Solid State Phenomena. Switzerland: Trans Tech Publications Ltd. 2013, Vol. 199, – P. 261-266.
8. *Torge W.* Gravimetry / W. Torge. – Berlin; New York: W. de Gruyter, 1989. – 465 p.
9. *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980. / H. Moritz// Bull. Géod, 1994. –58 (3), – P.388–398.

Надійшла до редакції

10.03.2014

УДК 528.48

**Р.В. Шульц,
А.О. Анненков,
О.В. Мельник,
А.М. Хайлак**

ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ІНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ЗА ОСІДАННЯМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА КАЛМАНОМ

Наведено загальні відомості про теорію фільтрації вимірювань за допомогою фільтра Калмана. На підставі аналогії до оброблення результатів динамічних спостережень за рухомими об'єктами та обробленням результатів геодезичних спостережень за переміщеннями й осіданням інженерних споруд, висловлено припущення про можливість використання фільтрації за Калманом для оброблення геодезичних спостережень. Виконано експериментальну перевірку роботи для фільтрації за Калманом оцінювання кінематичних параметрів осідального процесу на прикладі спостережень за осіданням гідротехнічної споруди.

Ключові слова: *фільтр Калмана, матриця переходу, матриця підсилення, кореляційна матриця, вектор станів, згладжування, прогнозування.*

Постановка проблеми. Термін «фільтрація» прийшов в геодезію з електроніки, де ним позначають отримання потрібної інформації із сигналу, спотвореного певним типом небажаного шуму. Останнім часом цей термін набув ширшого значення: ним позначають оптимальне оцінювання шуканих параметрів шляхом фільтрування даних спостережень від різних похибок (шумів). На перший погляд, задача фільтрації подібна до задачі вирівнювання, проте між ними помітні суттєві відмінності. Одна з них полягає в тому, що шукані параметри в задачі фільтрації є випадковими величинами, як і похибки вимірювання. Друга відмінність полягає у тому, що фільтрація пов'язана з неперервними, залежними від часу функціями, пов'язаними з роботою динамічних систем.

Оптимальне прогнозування та фільтрацію широко застосовують у телекомунікаційних системах, контрольних та керівних системах, навігації в режимі реального часу та для розв'язання інших задачами. Сучасні геодезичні технології також належать переважно до класу неперервних вимірювальних засобів. Прикладом таких технологій є супутникові глобальні навігаційні системи, інерціальні навігаційні системи, геодезичні автоматизовані системи деформаційного моніторингу та ін. Застосування таких систем потребує більш досконального методу оброблення спостережень основою. якого, як і раніше, повинен бути принцип методу найменших квадратів.

Сучасний рівень точності та якості геодезичних спостережень дає змогу відслідковувати дуже незначні зміни в положенні та орієнтації різних об'єктів – від локальних мікроскопічних за розмірами до глобальних в загальноземному масштабі, таких як, наприклад, земні континенти. Фактично досягнута точність геодезичних вимірювань дала можливість виявити безперервні переміщення будь-яких об'єктів у природі, що сприяло широкому впровадженню концепції переходу від статичної до кінематичної геодезії. Нині актуальним є широке впровадження методів оброблення результатів кінематичних спостережень, одним з яких є метод фільтрації за Калманом. Очевидною є пряма аналогія між спостереженнями за динамічними системами та спостереженнями за інженерними спорудами, які перебувають під впливом деформаційного процесу. З другого боку, існує аналогія між шумом вимірювань або сигналу та похибками геодезичних вимірювань, в переважній більшості випадків вони навіть підлягають одному закону розподілу (нормальному закону). Все це відкриває широкі перспективи застосування фільтра Калмана в інженерно-геодезичній практиці.

Огляд попередніх публікацій. Уперше алгоритм фільтра Калмана описано в піонерській роботі Рудольфа Калмана в 1961 році. Першим вдалим прикладом застосування фільтра Калмана стало оцінювання параметрів руху космічного апарата за результатами вимірювань. З того часу фільтр Калмана увійшов практично до всіх галузей науки і техніки, що мають справу з об'єктами, які згодом змінюють свої характеристики. В геодезичній практиці фільтр Калмана набув широкого застосування з появою ГНСС-технологій. За своєю ідеологією супутникові вимірювання можна віднести до категорії кінематичних з одночасним вимірюванням динамічних параметрів. На цій стадії процедура оброблення вимірювань стосується переважно служб, що обслуговують ГНСС.

Значний прорив стався завдяки розробленню таких технологій ГНСС-вимірювань, як кінематичне знімання та кінематичне знімання в реальному часі.

Відтоді кількість публікацій стосовно такого застосування фільтра Калмана почала стрімко зростати. Достатньо згадати роботи [1-4], у яких використання фільтра Калмана висвітлено й іншу його особливість – можливість комплексування інформації від різних вимірювальних пристроїв. Впровадження ГНСС-технологій у сферу інженерної геодезії принесло в цю галузь і методи оброблення спостережень за допомогою фільтра Калмана. В цілому ряді робіт, як, наприклад [5], розглянуто питання оброблення ГНСС-вимірювань під час спостережень за деформаціями інженерних споруд. Перевага фільтра Калмана, яка полягає у можливості одночасного оброблення різного типу інформації, зумовила широке його використання у створенні комплексних автоматизованих систем геодезичного моніторингу на базі ГНСС-технологій [6]. Перші спроби використати фільтрацію за Калманом для оброблення традиційних геодезичних вимірювань (нівелювання, лінійно-кутові мережі та ін.) здійснено в працях проф. В.К. Панкрушина. Учений узагальнив свій досвід у монографії [7], застосувавши цей метод для моделювання рухів земної поверхні. Аналогічне застосування можна знайти в роботі [8]. Попри значні досягнення питання використання фільтра Калмана для оброблення звичайних спостережень за осіданнями і деформаціями інженерних споруд залишається недостатньо дослідженим.

Постановка завдання. Головне завдання роботи – на основі аналогії між обробленням результатів динамічних спостережень за рухомими об’єктами та обробленням результатів геодезичних спостережень за переміщеннями та осіданнями інженерних споруд дослідити можливість використання фільтрації за Калманом для оброблення геодезичних спостережень з метою оцінювання кінематичних параметрів осідального процесу.

Виклад основного матеріалу. Поняття про фільтр Калмана безпосередньо пов’язане з поняттям динамічної системи, наведемо основні поняття та визначення, що їх використовують для опису динамічних систем. Динамічна система описується своєю моделлю, яка також може бути описана набором параметрів. Наприклад, під час кінематичного знімання з використанням ГНСС-приймача його положення може бути описане через координати (X, Y, Z) та їх похідні в часі. Вектор, що містить ці параметри, називають вектором стану динамічної системи. Характеристики лінійної системи можуть бути описані рівнянням [9]:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \Phi(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{H}(t) \mathbf{v}(t), \quad (1)$$

де $\mathbf{X}(t)$ – вектор стану динамічної системи; $\dot{\mathbf{X}}(t)$ – похідна від вектора стану; $\Phi(t)$ – матриця переходу динамічної системи; $\mathbf{H}(t)$ – матриця переходу для вектора шуму системи; $\mathbf{v}(t)$ – вектор шуму системи.

Шум системи $\mathbf{v}(t)$ характеризується таким математичним сподіванням та кореляційною матрицею (загалом залежними від часу):

$$M(\mathbf{v}(t)) = 0; M(\mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2)^T) = \mathbf{D}(t) \cdot \delta(t_2 - t_1), \quad (2)$$

де $\delta(t)$ – функція Дірака, що визначається як $\delta(\tau) = 0$ для $\tau \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$.

Оцінку вектора стану отримують із спостережень, що пов’язані з цим вектором, таким рівнянням [9]:

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (3)$$

де $\mathbf{I}(t)$ – вектор спостережень (загалом залежний від часу); $\mathbf{A}(t)$ – матриця коефіцієнтів рівнянь поправок; $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – вектор похибок спостережень.

Вектор похибок спостережень $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ має такі характеристики:

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = 0; M(\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) \boldsymbol{\varepsilon}(t_2)^T) = \mathbf{C}(t) \cdot \delta(t_2 - t_1), \quad (4)$$

Шум системи $\mathbf{v}(t)$ та похибки спостережень $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ вважають не корельованими між собою:

$$M(\mathbf{v}(t_1) \boldsymbol{\varepsilon}(t_2)^T) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (1) має назву рівняння стану, а рівняння (3) – рівняння спостережень. Ці два рівняння разом зі статистичними моделями (2), (4) та (5) утворюють математичну модель неперервної лінійної динамічної системи. Проблема оцінювання вектора $\mathbf{X}(t)$ з вектором $\mathbf{I}(t)$ за допомогою неперервної моделі стану можна вирішити аналітично, однак задачі, що виникають в геодезії, можуть бути зведені до дискретних моделей.

У такому випадку рівняння стану та рівняння спостережень дискретної лінійної динамічної системи можуть бути записані [10], як:

$$\mathbf{X}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \quad (k=1,2,3,\dots), \quad (6)$$

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (7)$$

Позначення у виразах (6), (7) відповідають позначенням (1) та (3) з тією різницею, що всі величини є дискретними і залежать від індексу k . Вектори \mathbf{v}_k і $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ називають білим шумом з такими статистичними характеристиками:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_k) &= 0; M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{D}_k \cdot \delta_{kj}; \\ M(\boldsymbol{\varepsilon}_k) &= 0; M(\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_j^T) = \mathbf{C}_k \cdot \delta_{kj}; \\ M(\mathbf{v}_k \boldsymbol{\varepsilon}_j^T) &= 0; \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Тепер розглянемо загальний випадок для довільного k . Рівняння стану та рівняння спостережень мають вигляд [10]:

$$\mathbf{X}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k, \quad (9)$$

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (10)$$

де \mathbf{I}_k або $(\boldsymbol{\varepsilon}_k)$ має кореляційну матрицю \mathbf{K}_k і вагову матрицю $\mathbf{K}_k = \mu_0^2 \mathbf{P}_k^T$.

Використовуючи оптимальну оцінку $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$, що отримана на $k-1$ першому кроці фільтрації, отримуємо прогнозоване значення параметрів \mathbf{X}_k з рівняння вектора станів:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1,k-1}, \quad (11)$$

з кореляційною матрицею похибки прогнозування:

$$\mathbf{K}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{K}_{k-1,k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \mathbf{H}_k \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k^T = \mu_0^2 (\mathbf{P}_{k,k-1}^X)^{-1}. \quad (12)$$

Використовуючи вектор нових спостережень \mathbf{I}_k і псевдоспостереження $\hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}$ з кореляційною матрицею $\mathbf{K}_{k,k-1}$, оптимальну оцінку \mathbf{X}_k , яку записують як $\hat{\mathbf{X}}_{k,k}$ отримують на підставі принципу методу найменших квадратів [9]:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k,k} = \hat{\mathbf{X}}_{k,k-1} + \mathbf{G}_k (\mathbf{I}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_{k,k-1}), \quad (13)$$

де $\mathbf{G}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{P}_{k,k-1}^X)^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k$ – матриця підсилення Калмана.

Кореляційну матрицю $\hat{\mathbf{X}}_{k,k}$ позначають, як $\mathbf{K}_{k,k}$ [9]:

$$\mathbf{K}_{k,k} = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_k + (\mathbf{K}_{k,k-1})^{-1})^{-1} = \mu_0^2 (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{P}_{k,k-1}^X)^{-1} = \mu_0^2 (\mathbf{P}_{k,k}^X)^{-1}. \quad (14)$$

Однією з найбільших переваг фільтра Калмана є те, що на кожному кроці оброблення немає потреби зберігати весь ряд спостережень $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \dots, \mathbf{I}_k$. Насправді треба зберігати та обробляти тільки одну групу спостережень на кожному кроці, тоді як решта інформації міститься в оцінці вектора стану та кореляційній матриці, отриманих на попередньому кроці фільтрації. Така процедура є особливо ефективною для динамічних систем, де індекс k відповідає номеру епохи спостережень в режимі реального часу.

Зауважимо одну суттєву особливість фільтра Калмана. Якщо ми маємо справу з вимірюваннями, що вже відбулися, є можливість запустити фільтр Калмана у зворотному напрямку. Таким чином ми отримуємо дві оцінки шуканих параметрів – фільтрації вперед і фільтрації назад. В такому випадку постає завдання з утворення оптимальної оцінки за двома результатами фільтрації. Оцінювання поточного і майбутнього значень невідомих параметрів динамічної системи, що базується на поточних та минулих даних, має назву фільтрації та прогнозування відповідно та вирішується через фільтр Калмана. Оцінка невідомих параметрів минулого за даними, зібраними за певний проміжок часу, має назву згладжування. Згладжування є додатковою процедурою, часто застосовувану в навігаційній практиці, яка, проте, не знайшла застосування в геодезії. Хоча тут також ідеться про певну аналогію – згладжена оцінка фільтра Калмана відповідає визначенню середньозваженого значення невідомої величини за нерівноточними вимірюваннями.

Алгоритми згладжування зазвичай утворюються трьома можливими способами: з фіксованим інтервалом (fixed-interval), згладжувальний фільтр із постійним запізненням (fixed-lag smoother), згладжувальний фільтр з фіксованою точкою (fixed-point smoother) [2]. У геодезичній практиці найбільш ефективними слід вважати згладжувальні фільтри типу f-i та f-l. У фільтрі f-i початковий та кінцевий час фіксовані (t_0 та t_N) й оцінку знаходять на епоху t_k , де $t_k \in [t_0, t_N]$. Цей тип згладжування використовується, коли згладжена оцінка потрібна для всіх точок спостережень. У фільтрі типу f-l згладжену оцінку на епоху t_k отримують, використовуючи дані, доступні у інтервалі між t_k і t_{k+m} , де m – фіксована кількість епох спостережень (f-l) та $t_k < t_{k+m} \leq t_N$. Цей фільтр використовують тоді, коли оцінки потрібні в реальному часі.

Застосовують досить велику кількість різних модифікацій утворення згладженої оцінки. Розглянемо найпростіший варіант згладжування, що базується на утворенні лінійної комбінації з двох окремих оцінок зі згладжуванням на фіксованому інтервалі.

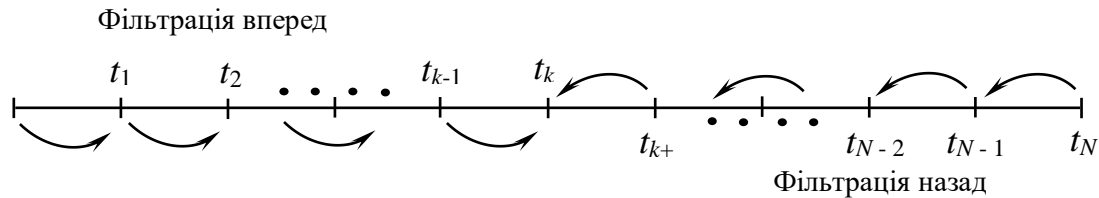


Рис. 1. Процес утворення прямого і зворотного фільтрів та згладженої оцінки

Оптимальне лінійне згладжування є процесом камеральної обробки, у якому використовують всі спостереження для оцінювання невідомих параметрів на певному інтервалі спостережень. Для згладженої оцінки станів на момент часу t потрібні вимірювання, виконані до і після моменту t . Алгоритм згладжування базується на використанні зворотної фільтрації за Калманом. Разом обидва фільтри охоплюють всі виміри. Отримані в такий спосіб дві оцінки є некорельованими, оскільки шуми системи та спостережень вважають білими, а спільних даних не використовують.

Різниця між прямою та зворотною фільтрацією полягає в прогнозуванні стану \mathbf{X}_k^b та кореляційної матриці \mathbf{K}_k^b на сусідню епоху. Для дискретного зворотного фільтра рівняння прогнозування дають, наприклад, в такому вигляді [2]:

$$\mathbf{X}_{k+1}^b = \Phi_k^1 \hat{\mathbf{X}}_k^b, \tag{15}$$

$$\mathbf{K}_{k+1}^b = \Phi_k^1 [\mathbf{K}_k^b + \mathbf{H}_k \mathbf{D}_k \mathbf{H}_k^T] (\Phi_k^1)^T, \tag{16}$$

де тут і далі верхніми індексами позначено f - фільтрація вперед, b - фільтрація назад, S - згладжена оцінка.

У подальшому процедура обчислення не відрізняється від прямого фільтра Калмана.

Тепер важливо обрати спосіб, в який комбінувати прямий та зворотний розрахунки. В роботі [2] наведено просте й ефективне рішення на основі добре відомої комбінації двох незалежних оцінок:

$$\hat{\mathbf{X}}_k^s = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}_k^f + \mathbf{B} \hat{\mathbf{X}}_k^b, \tag{17}$$

де \mathbf{A} , \mathbf{B} - вагові матриці.

За таких умов вектор стану та його кореляційна матриця будуть мати такий вигляд:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_k^s = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{I}) \mathbf{X}_k + \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{X}}_k^f + \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{X}}_k^b; \tag{18}$$

$$\mathbf{K}_k^s = \mathbf{A} \mathbf{K}_k^f \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{K}_k^b \mathbf{B}^T.$$

Для утворення незміщеної оцінки перший член у рівнянні (18) повинен задовольняти умові:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{I}) = 0,$$

тоді вагові матриці будуть мати такий вигляд:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_k^b (\mathbf{K}_k^f + \mathbf{K}_k^b)^{-1}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{K}_k^f (\mathbf{K}_k^f + \mathbf{K}_k^b)^{-1}, \tag{19}$$

а кореляційна матриця

$$(\mathbf{K}_k^s)^{-1} = (\mathbf{K}_k^f)^{-1} + (\mathbf{K}_k^b)^{-1}. \tag{20}$$

Припустимо, що прямий фільтр зупинено в точці оцінки k , а кінцевим результатом є апостеріорна оцінка вектора стану $\hat{\mathbf{X}}_k^f$ та кореляційна матриця \mathbf{K}_k^f . Зворотний фільтр зупинено в точці $k+1$, в якій виконують прогнозування апіорної оцінки вектора стану $\hat{\mathbf{X}}_k^b$ та кореляційної матриці \mathbf{K}_k^b в точці k . Такий прогноз не містить спостереження в точці k . Таким чином, обидві оцінки є некорельованими оскільки не мають спільних спостережень і можуть бути використані для побудови згладженої оцінки.

Висновки очевидні: згладжена оцінка вектора стану завжди має меншу дисперсію, ніж фільтровані оцінки, а сама оцінка не може бути гіршою (в статистичному сенсі), ніж оцінка прямої фільтрації.

Розглянемо описані моделі фільтрації та згладжування на прикладі оброблення вимірювань вертикальних осідань деформаційної марки в тілі гідротехнічної споруди. Вважатимемо, що деформаційна марка рухається вертикально з певною швидкістю. Визначення відмітки марки виконують щомісяця геометричним нівелюванням за програмою II класу. Виконаємо оброблення ряду визначених осідань, що складається з 32 циклів. Результати вимірювань визначених осідань Δh представлено в табл. 1.

Таблиця 1

Переміщення марки

| № пор. | Δh , мм | № пор | Δh , мм | № пор | Δh , мм | № пор | Δh , мм |
|--------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|
| 1 | -0,6 | 9 | -9,3 | 17 | -17,6 | 25 | -16,7 |
| 2 | -3,6 | 10 | -10,6 | 18 | -18,4 | 26 | -22,9 |
| 3 | -3,9 | 11 | -10,8 | 19 | -16,8 | 27 | -24,5 |
| 4 | -3,9 | 12 | -10,9 | 20 | -19,6 | 28 | -26,4 |
| 5 | -5,5 | 13 | -12,3 | 21 | -19,9 | 29 | -25,9 |
| 6 | -5,6 | 14 | -13,4 | 22 | -20,4 | 30 | -27,8 |
| 7 | -6,9 | 15 | -14,6 | 23 | -23,1 | 31 | -26,5 |
| 8 | -7,7 | 16 | -15,8 | 24 | -19,1 | 32 | -28,9 |

Для визначення матриці переходу від нульового до першого циклу спостережень $\Phi_{1,0}$ потрібна прийняти модель переміщення марки. В цьому випадку запропонуємо таку модель:

$$\Delta h_k = \Delta h_{k-1} + v_{\Delta h} \delta t + a_{\Delta h} \frac{\delta t^2}{2}.$$

Тоді матриця переходу матиме вигляд:

$$\Phi_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & \delta t & \frac{\delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки спостереження виконують щомісяця, то інтервал дорівнює $\delta t = 1$.

В нульовому циклі було визначено початкове переміщення точки, її швидкість переміщення та прискорення, які утворюють вихідний вектор станів:

$$\hat{\mathbf{X}}_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вагову матрицю $\mathbf{P}_{0,0}^x$ для першого кроку фільтрації можна вважати одиничною, а матриця \mathbf{A}_1 для вимірюного переміщення буде такою:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для завершення опису системи потрібно визначити кореляційну матрицю \mathbf{K}_1 . Найпростіше вважати її діагональною з елементами, що відповідають середнім квадратичним похибкам у визначенні переміщення, які можна отримати за результатами вирівнювання в кожному циклі. У розглянутому випадку точність визначення переміщення становить: $m_{\Delta h} = 0,7$ мм, тоді:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} m_{\Delta h}^2 \end{pmatrix}.$$

Похибку у визначенні швидкості можна взяти: $m_{v_{\Delta h}} = 1,2$ мм/місяць.

Після визначення всіх вихідних даних виконуємо фільтрацію вперед (табл. 2).

Таблиця 2

Оцінки складових вектору стану при фільтрації вперед

| Крок | Δh , мм | $v_{\Delta h}$, мм/місяць | $a_{\Delta h}$, мм/місяць ² | Крок | Δh , мм | $v_{\Delta h}$, мм/місяць | $a_{\Delta h}$, мм/місяць ² |
|------|--------------------|-------------------------------|--|------|--------------------|-------------------------------|--|
| 1 | -0,54 | -0,38 | -0,146 | 17 | -17,56 | -1,74 | -0,22 |
| 2 | -3,40 | -3,24 | -1,414 | 18 | -18,54 | -1,15 | 0,16 |
| 3 | -4,23 | -1,55 | 0,007 | 19 | -17,18 | 1,25 | 1,19 |
| 4 | -4,12 | 0,03 | 0,725 | 20 | -19,02 | -0,96 | -0,38 |
| 5 | -5,27 | -0,68 | 0,068 | 21 | -19,94 | -1,12 | -0,28 |
| 6 | -5,64 | -0,36 | 0,186 | 22 | -20,51 | -0,76 | 0,02 |
| 7 | -6,76 | -0,96 | -0,179 | 23 | -22,85 | -2,21 | -0,66 |
| 8 | -7,72 | -1,05 | -0,135 | 24 | -19,95 | 2,15 | 1,66 |
| 9 | -9,24 | -1,56 | -0,308 | 25 | -16,74 | 4,03 | 1,76 |
| 10 | -10,65 | -1,59 | -0,180 | 26 | -21,40 | -3,05 | -2,32 |
| 11 | -11,01 | -0,55 | 0,38 | 27 | -24,65 | -4,48 | -1,91 |
| 12 | -10,96 | 0,20 | 0,55 | 28 | -26,90 | -3,45 | -0,55 |
| 13 | -12,05 | -0,69 | -0,12 | 29 | -26,54 | -0,23 | 1,19 |
| 14 | -13,32 | -1,28 | -0,34 | 30 | -27,58 | -0,34 | 0,59 |
| 15 | -14,62 | -1,48 | -0,27 | 31 | -26,65 | 1,15 | 1,00 |
| 16 | -15,86 | -1,40 | -0,11 | 32 | -28,37 | -0,96 | -0,43 |

Виконані розрахунки дуже зручно представити в графічному вигляді (рис.2, 3). До речі, всі обчислення виконані з використанням мови програмування Matlab [11].

Як і за методом найменших квадратів, у разі фільтрації за Калманом можна розрахувати вектор поправок, який позначають через ξ_k у виміряні величини. Для цього використовують вираз

$$\xi_k = \mathbf{I}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_{k,k} .$$

За цим виразом на кожному кроці фільтрації розраховано поправки у виміряні координати (рис. 4 – 6)

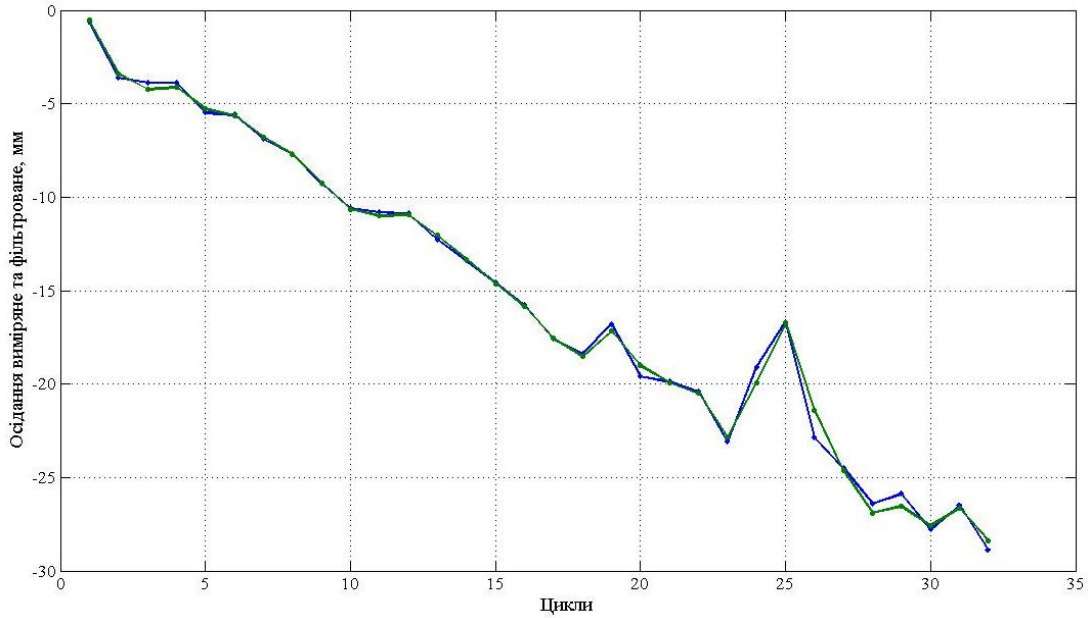


Рис. 2. Виміряне осідання та фільтроване вперед значення осідання

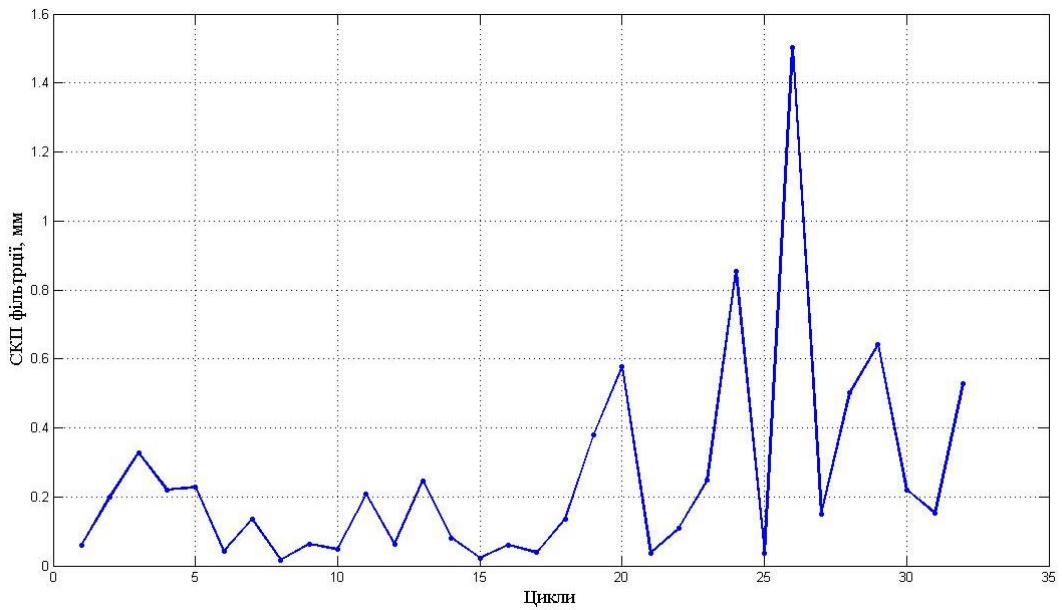


Рис. 3. Середня квадратична похибка фільтрації вперед в кожному циклі

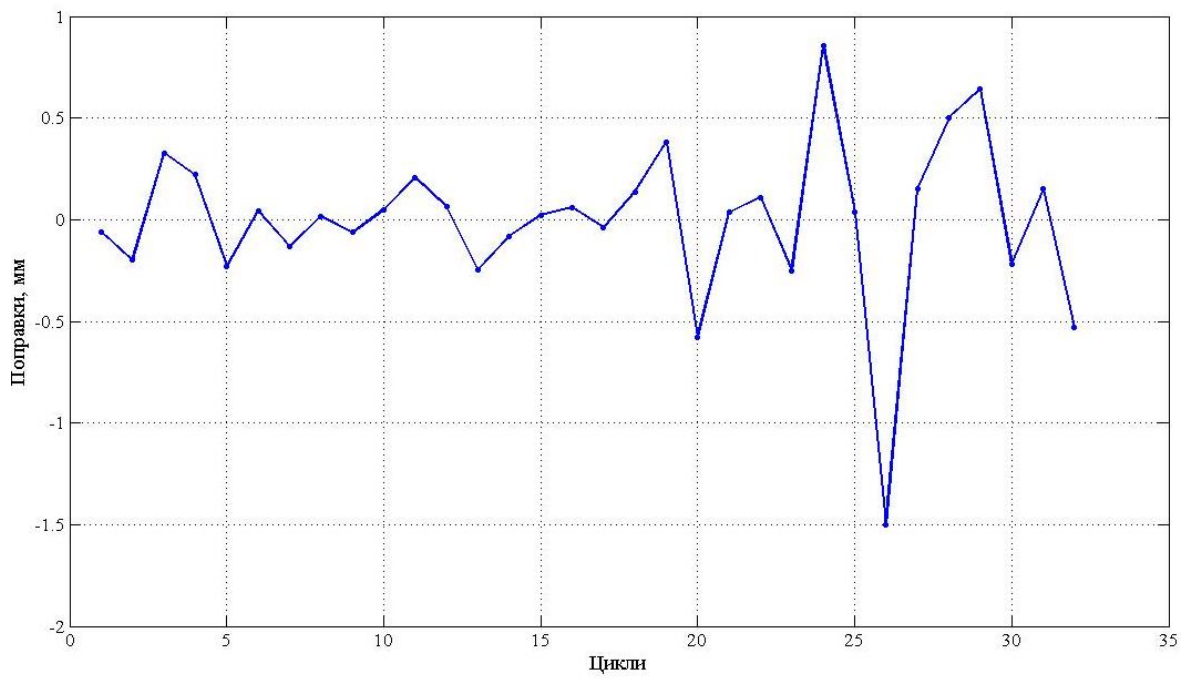


Рис. 4. Поправки до виміряних переміщень, отримані з фільтрації вперед

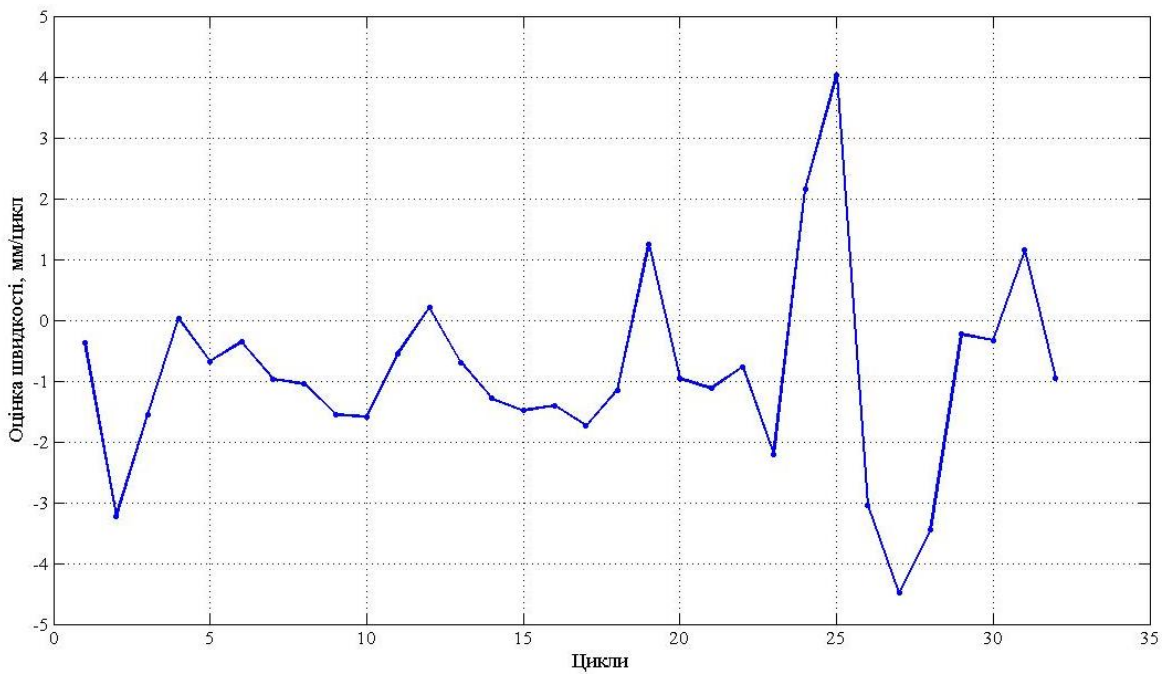


Рис. 5. Оцінка швидкості з фільтрації вперед

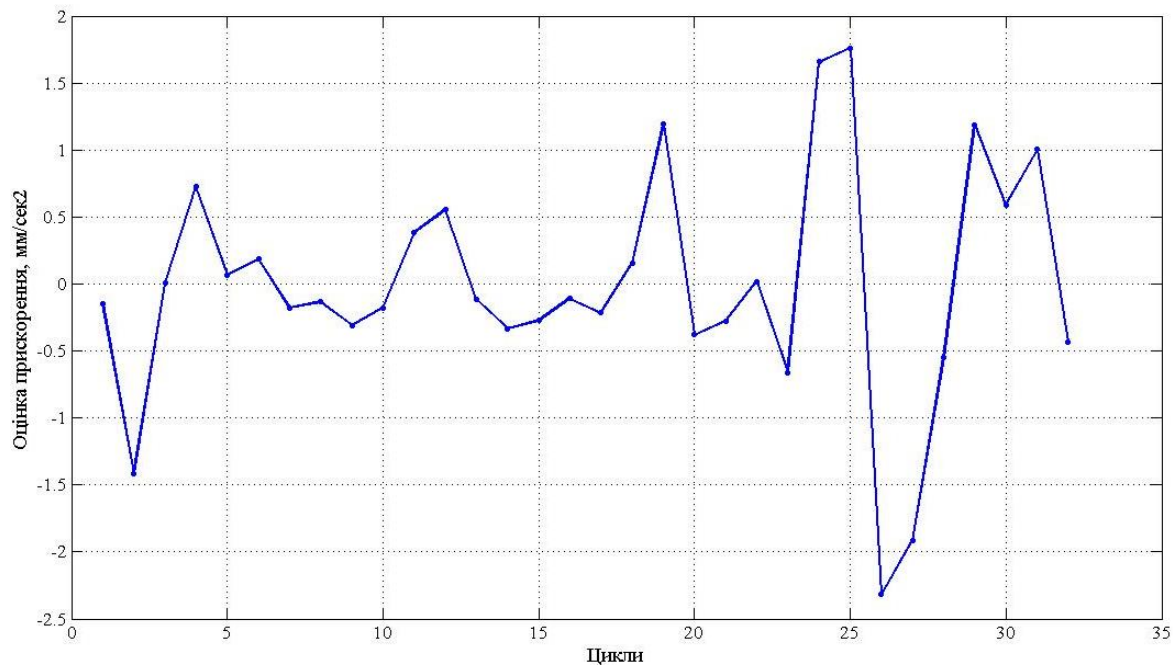


Рис. 6. Оцінка прискорення з фільтрації вперед

З табл. 2 та відповідних рисунків видно, що починаючи приблизно з четвертого-п'ятого кроків фільтрації відбувається стабілізація оцінок швидкості та прискорення.

Тепер, керуючись виразами (15) – (16), виконаємо фільтрацію за Калманом назад, результати фільтрації наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Оцінки складових вектора стану під час фільтрації назад

| Крок | Δh , мм | $v_{\Delta h}$, мм/місяць | $a_{\Delta h}$, мм/місяць ² | Крок | Δh , мм | $v_{\Delta h}$, мм/місяць | $a_{\Delta h}$, мм/місяць ² |
|------|-----------------|----------------------------|---|------|-----------------|----------------------------|---|
| 1 | -1,01 | -2,25 | 0,86 | 17 | -17,66 | 0,30 | -0,54 |
| 2 | -3,59 | -0,08 | -0,26 | 18 | -17,74 | -0,05 | -0,71 |
| 3 | -3,79 | -0,36 | -0,24 | 19 | -16,94 | -2,83 | 1,07 |
| 4 | -4,08 | -0,94 | 0,05 | 20 | -19,50 | -1,31 | 0,68 |
| 5 | -5,33 | -0,33 | -0,43 | 21 | -20,30 | -0,93 | 0,94 |
| 6 | -5,55 | -1,31 | 0,04 | 22 | -21,51 | 1,27 | -0,15 |
| 7 | -6,76 | -1,42 | 0,16 | 23 | -22,36 | 4,63 | -3,16 |
| 8 | -7,84 | -1,70 | 0,54 | 24 | -17,94 | -0,89 | -1,14 |
| 9 | -9,53 | -0,72 | 0,15 | 25 | -17,24 | -5,72 | 2,02 |
| 10 | -10,59 | 0,16 | -0,47 | 26 | -22,95 | -1,97 | 0,55 |
| 11 | -10,64 | -0,34 | -0,44 | 27 | -24,74 | -1,26 | 0,41 |
| 12 | -10,91 | -1,27 | -0,01 | 28 | -26,26 | -0,07 | -0,26 |
| 13 | -12,21 | -1,26 | -0,04 | 29 | -26,18 | -0,82 | 0,16 |
| 14 | -13,31 | -1,59 | 0,21 | 30 | -27,47 | 0,40 | -0,74 |
| 15 | -14,63 | -1,65 | 0,45 | 31 | -26,74 | -1,95 | 0,61 |
| 16 | -16,13 | -1,10 | 0,35 | 32 | -28,78 | 0,22 | -0,68 |

Виконані розрахунки знову представимо у графічному вигляді (рис. 7 – 9).

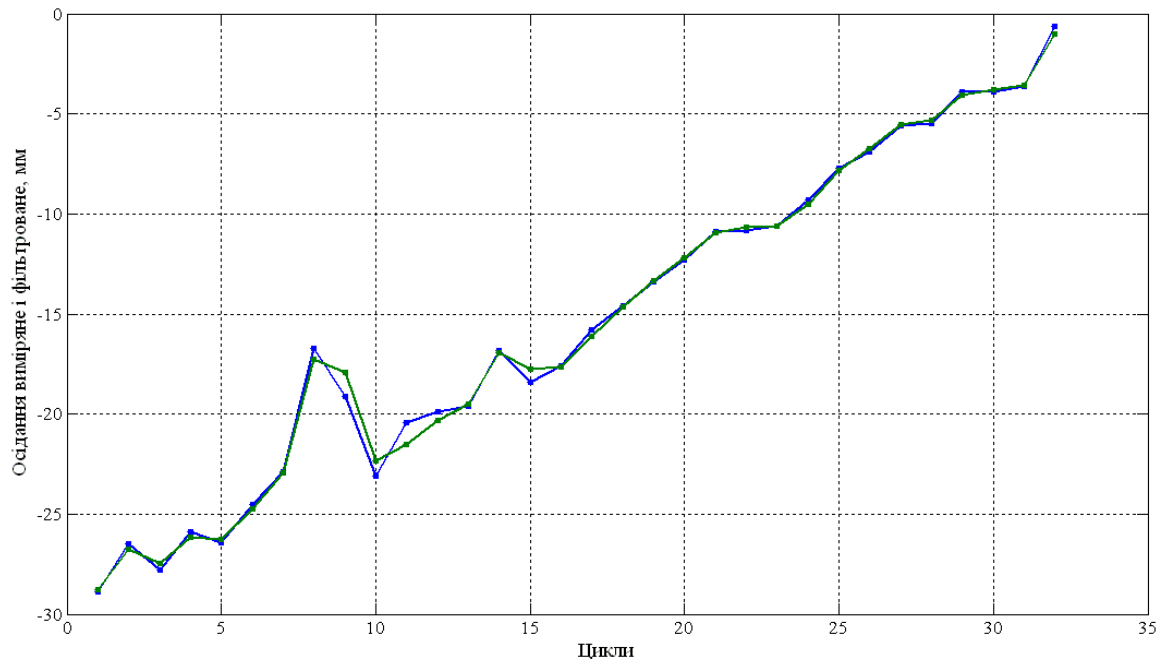


Рис. 7. Виміряне осідання та фільтроване назад значення осідання

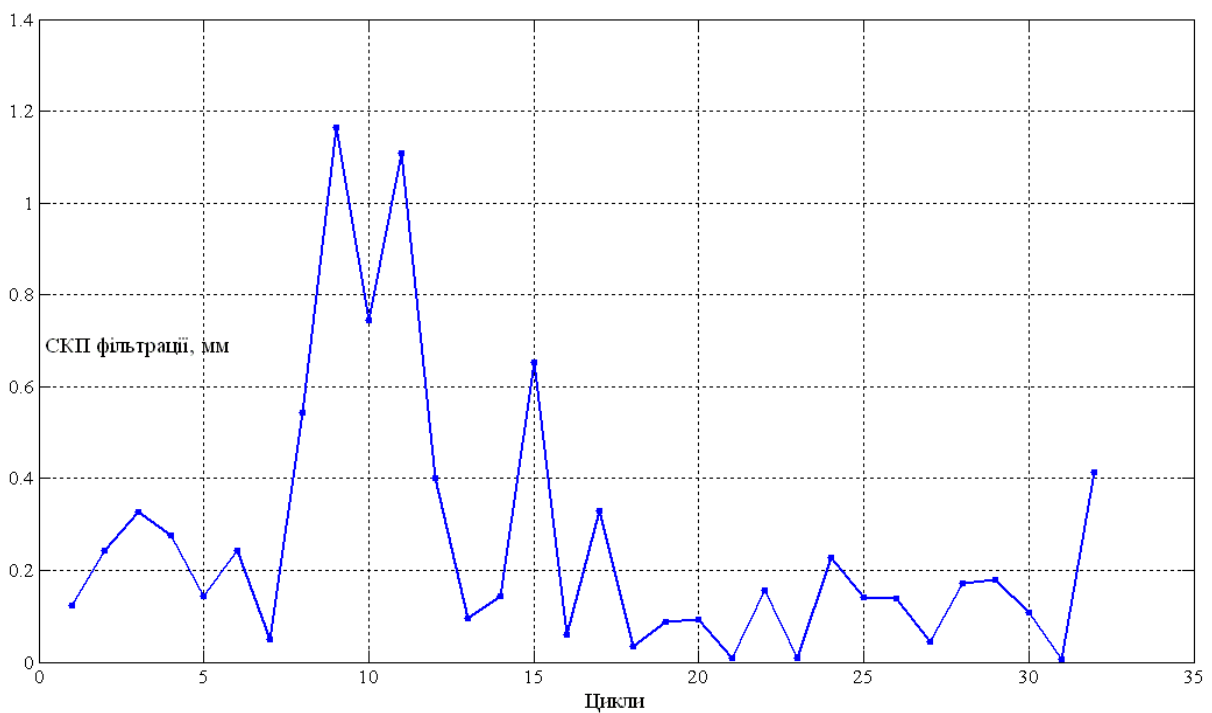


Рис. 8. Середня квадратична похибка фільтрації назад у кожному циклі

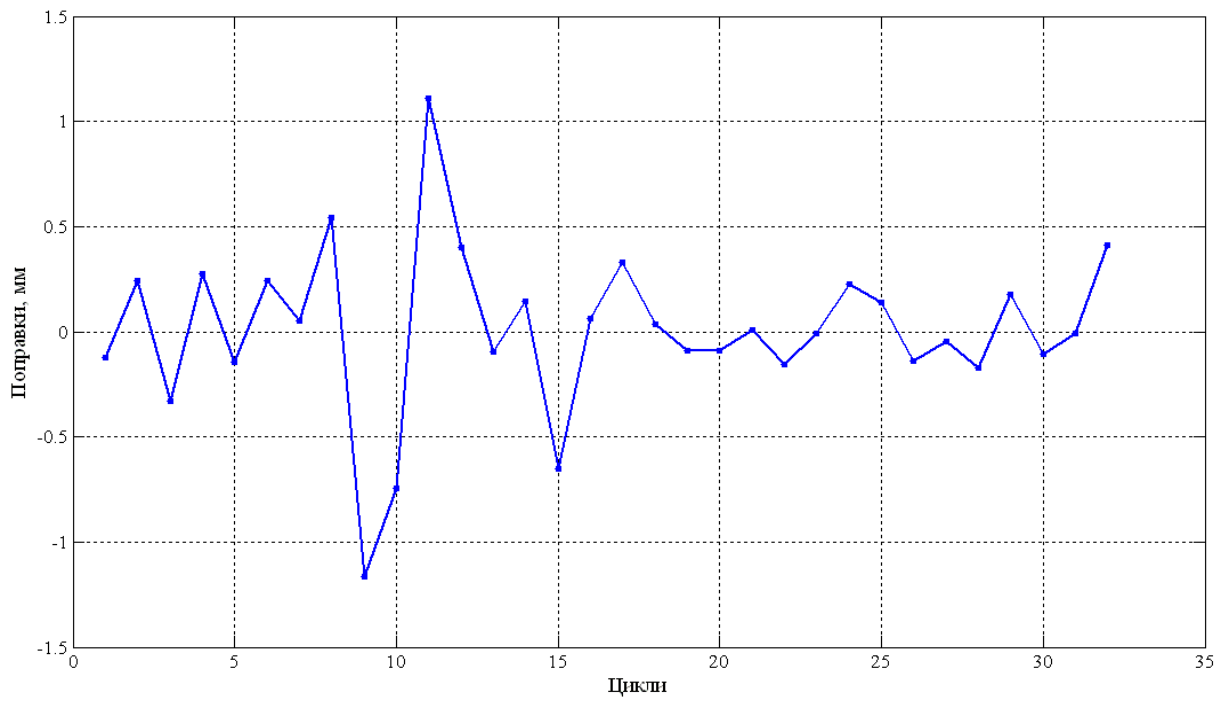


Рис. 9. Поправки до виміряних переміщень, отримані з фільтрації назад

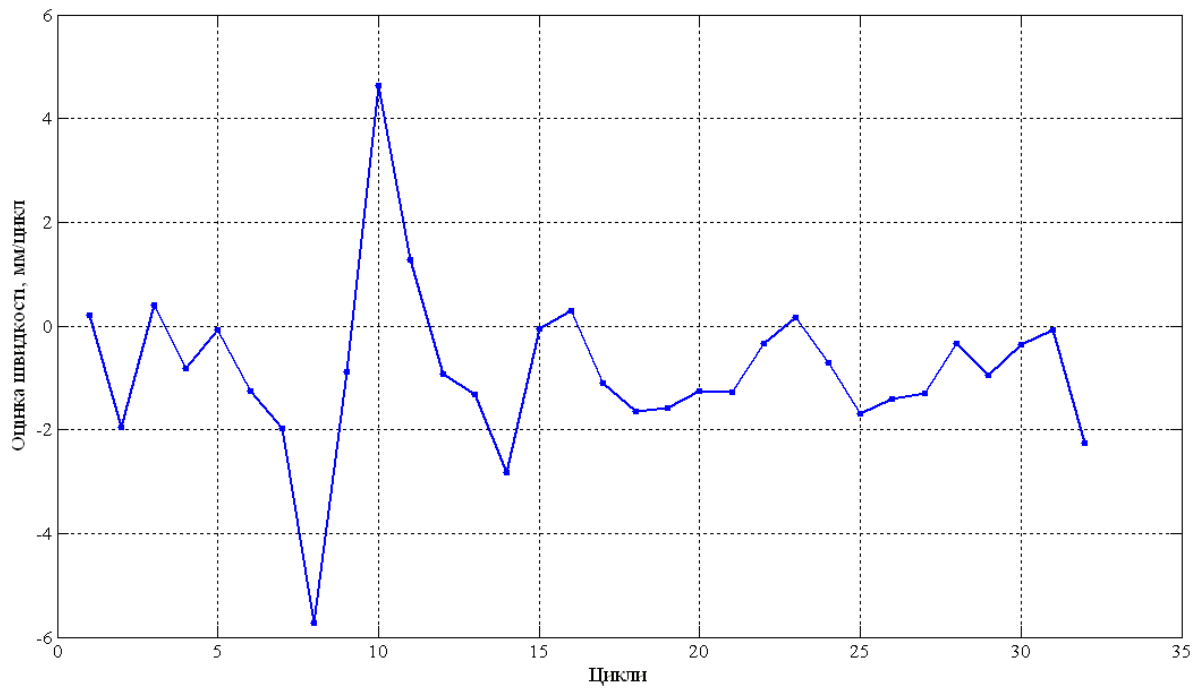


Рис. 10. Оцінка швидкості з фільтрації назад

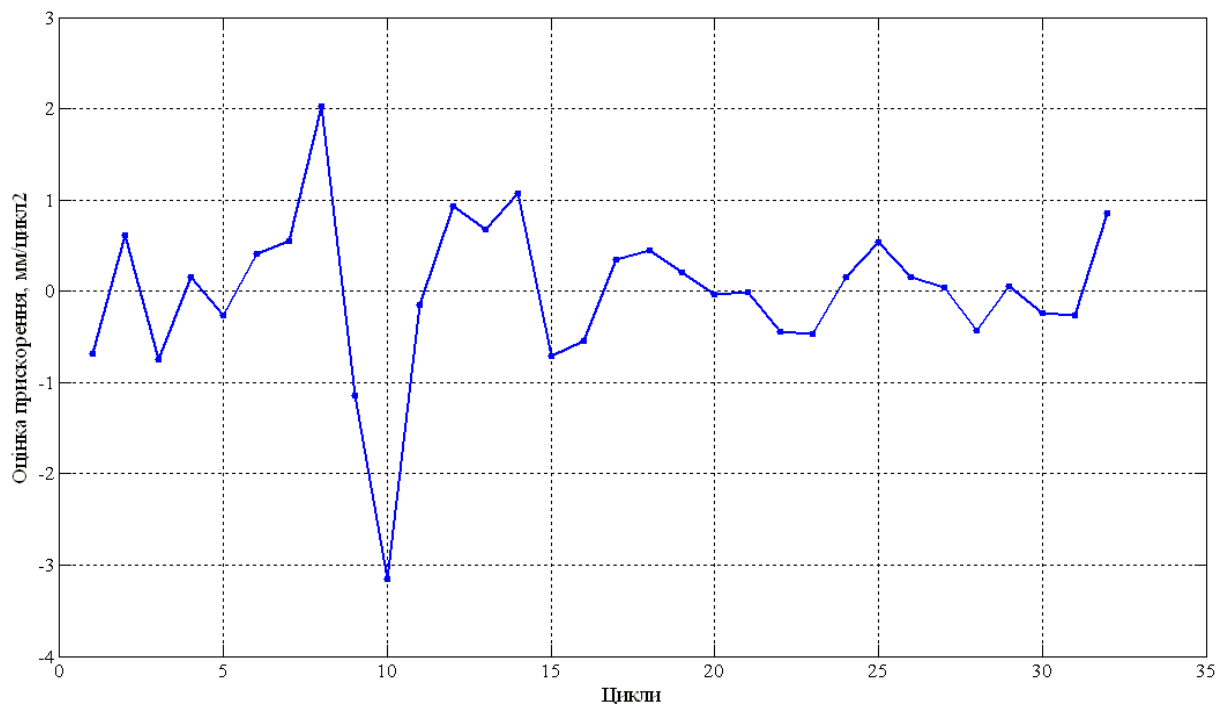


Рис. 11. Оцінка прискорення з фільтрації вперед

Нарешті використаємо вирази (17), (19), (20) та отримаємо згладжені оцінки переміщень, швидкості та прискорень (табл. 4).

Таблиця 4

Оцінки складових вектору стану при згладжуванні

| Крок | Δh , мм | $v\Delta h$, мм/місяць | $a\Delta h$, мм/місяць ² | Крок | Δh , мм | $v\Delta h$, мм/місяць | $a\Delta h$, мм/місяць ² |
|------|-----------------|-------------------------|--------------------------------------|------|-----------------|-------------------------|--------------------------------------|
| 1 | -1,13 | -1,46 | -0,18 | 17 | -16,97 | -0,85 | 0,34 |
| 2 | -2,65 | -1,22 | 0,15 | 18 | -17,94 | -0,60 | 0,34 |
| 3 | -3,73 | -0,86 | 0,38 | 19 | -18,35 | -0,75 | -0,17 |
| 4 | -4,39 | -0,66 | 0,18 | 20 | -19,29 | -0,97 | -0,21 |
| 5 | -5,18 | -0,68 | 0,01 | 21 | -20,00 | -0,78 | 0,14 |
| 6 | -5,90 | -0,85 | -0,17 | 22 | -20,22 | -0,13 | 0,49 |
| 7 | -6,90 | -1,08 | -0,21 | 23 | -20,59 | 0,61 | 0,84 |
| 8 | -7,96 | -1,21 | -0,14 | 24 | -20,21 | 0,44 | 0,00 |
| 9 | -9,08 | -1,09 | 0,08 | 25 | -19,88 | -0,93 | -1,45 |
| 10 | -10,09 | -0,78 | 0,31 | 26 | -21,59 | -2,15 | -1,22 |
| 11 | -10,82 | -0,57 | 0,23 | 27 | -23,70 | -2,20 | -0,08 |
| 12 | -11,40 | -0,69 | -0,12 | 28 | -25,65 | -1,46 | 0,75 |
| 13 | -12,28 | -1,00 | -0,30 | 29 | -26,61 | -0,72 | 0,70 |
| 14 | -13,41 | -1,27 | -0,25 | 30 | -27,36 | -0,36 | 0,41 |
| 15 | -14,68 | -1,35 | -0,09 | 31 | -27,54 | -0,41 | -0,08 |
| 16 | -15,86 | -1,20 | 0,11 | 32 | -28,23 | -0,68 | -0,23 |

Виконані розрахунки представимо у графічному вигляді (рис. 12 – 14).

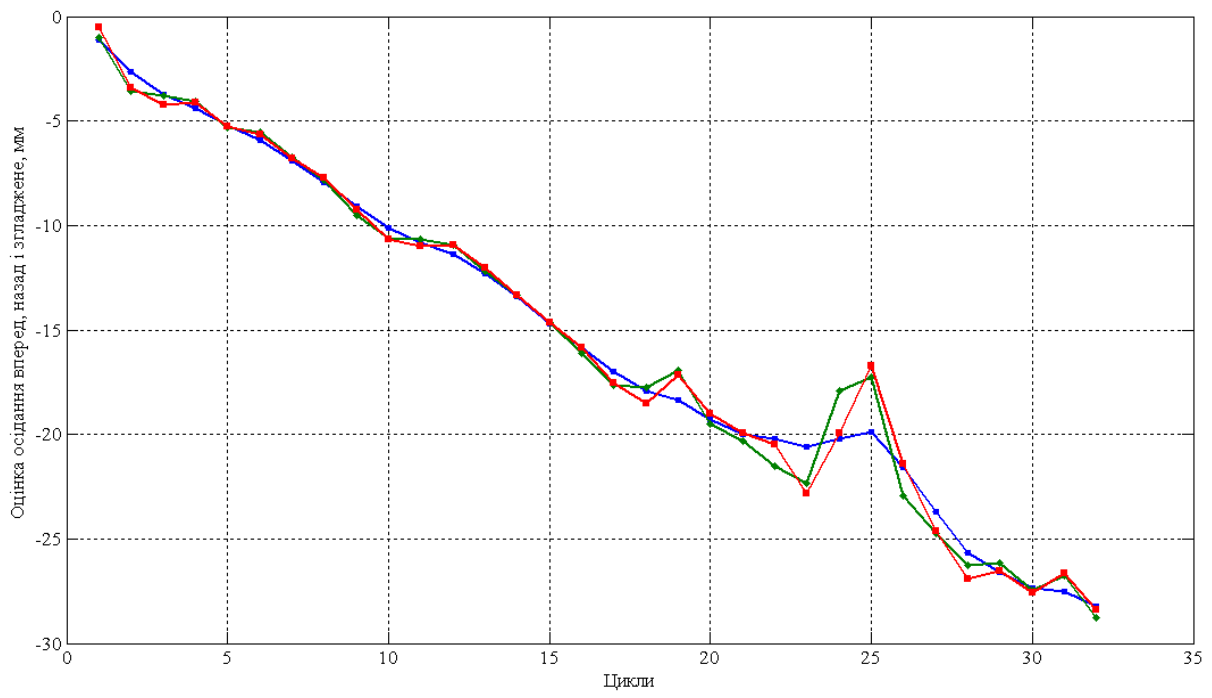


Рис. 12. Оцінка переміщення з фільтрації вперед, назад та згладжена

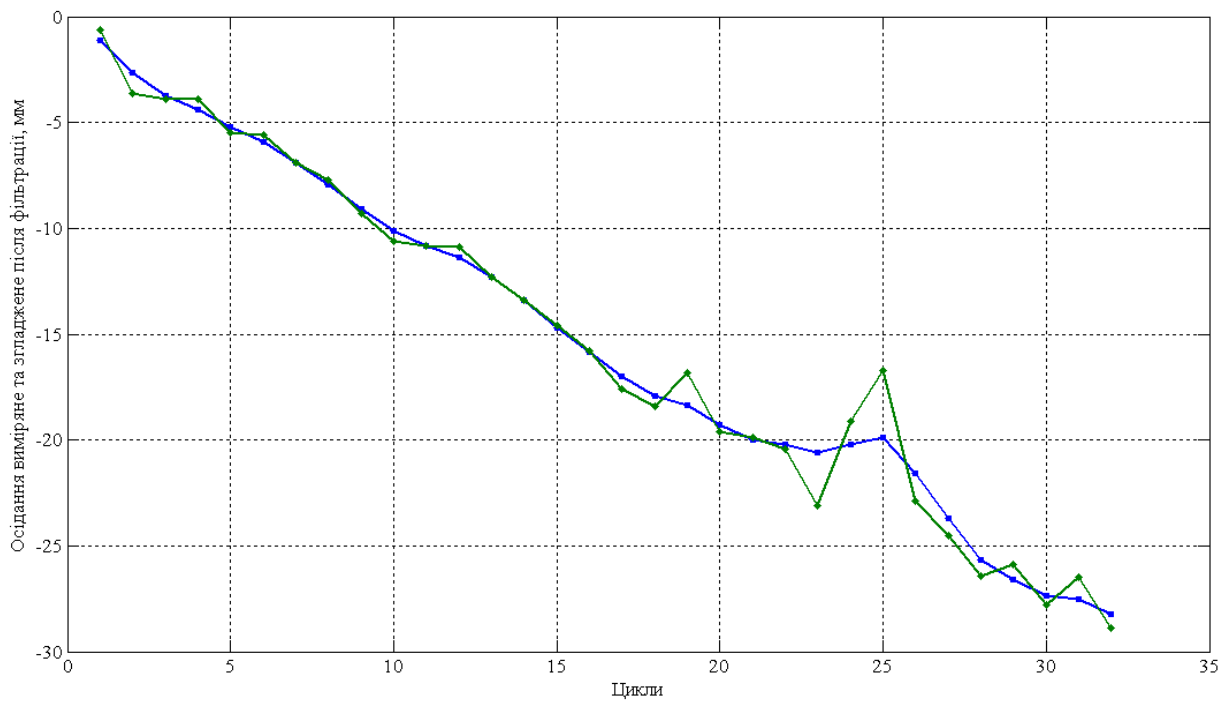


Рис. 13. Виміряне переміщення та згладжена оцінка

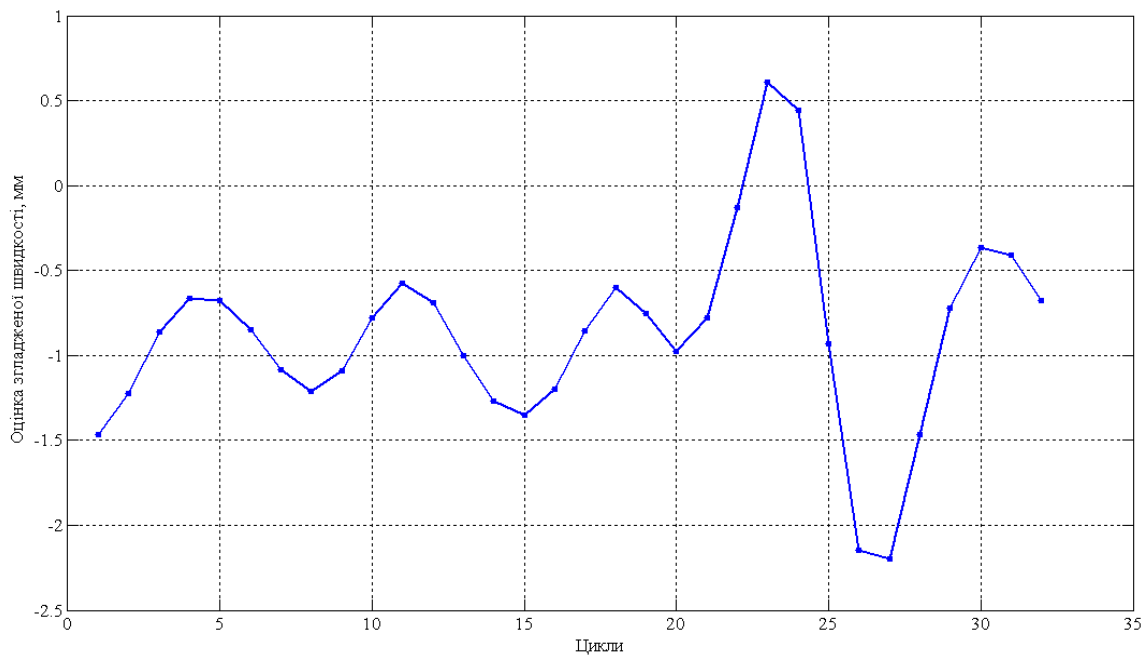


Рис. 14. Згладжена оцінка швидкості

Окрім отриманих згладжених оцінок переміщень та швидкості доцільно побудувати графіки різниць між згладженими оцінками та оцінками з фільтрації вперед і назад. Такі графіки дають змогу оцінити якість згладжування за фільтрацією Калмана. Нижче наведено графіки різниць для оцінок переміщень (рис. 15 – 17).

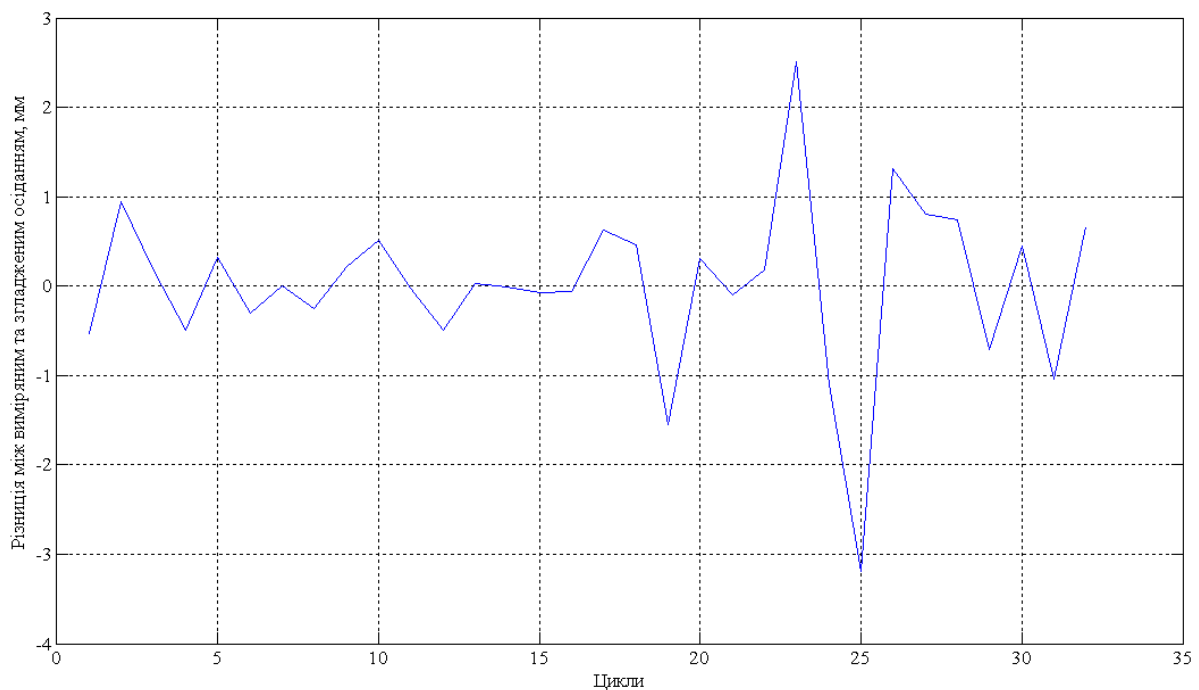


Рис. 15. Різниці між вимірним переміщенням та його оцінкою зі згладжування

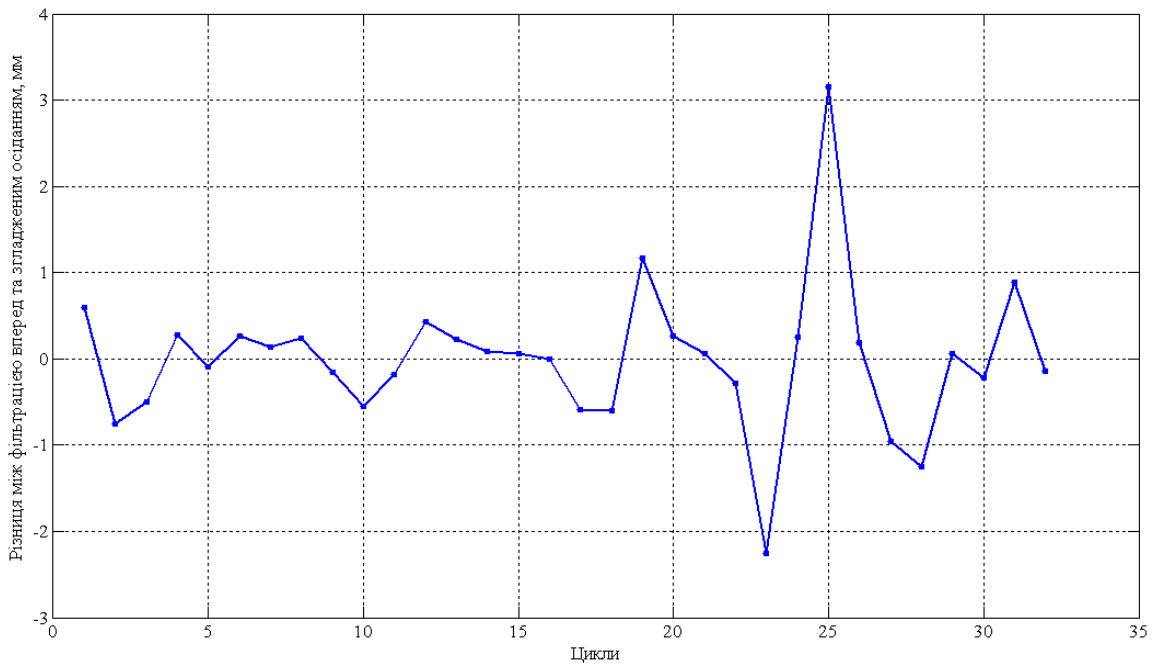


Рис. 16. Різниця між оцінкою переміщення з фільтрації вперед та оцінкою зі згладжування

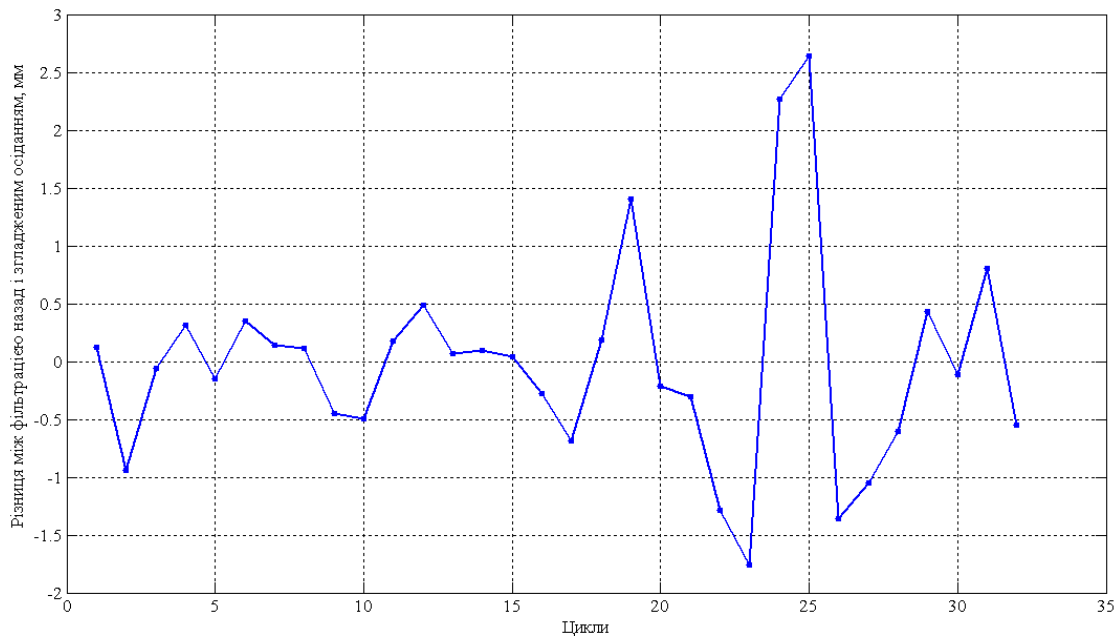


Рис. 17. Різниця між оцінкою переміщення з фільтрації назад та оцінкою зі згладжування

Аналізуючи наведені графіки, можна стверджувати, що отримані в результаті остаточної фільтрації за Калманом зі згладжуванням параметри кінематичної моделі деформаційного процесу за точністю визначення параметрів відповідають точності вимірювання переміщень, а сама модель може бути використана для подальшого прогнозування осідального процесу. Наведений приклад ілюструє, наскільки зручним з обчислювального погляду є фільтр Калмана в обробленні результатів кінематичних спостережень.

Висновок. Виконані в роботі дослідження вказують на велику перспективу застосування методів фільтрації за Калманом для оброблення результатів геодезичних вимірювань. Незважаючи на широке застосування фільтрації Калмана в електроніці та системах автоматичного керування, встановлені чіткі аналогії між моделями фільтра Калмана та моделями геодезичних вимірювань. При цьому відкривається широкий напрям до подальших досліджень, пов'язаних з розробленням математичних моделей інших кінематичних процесів, за якими ведуться геодезичні спостереження; вдосконаленням методик формування матриць ваг у фільтрі Калмана; дослідженням стабільності роботи фільтра Калмана на прикладі різноманітних геодезичних задач, розробленні методик контролю грубих помилок та визначення систематичних похибок у фільтрі Калмана; з дослідженням та розробленням добре відомих та нових алгоритмів згладжування даних у фільтрі Калмана.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *El-Sheimy N.* The Development of VISAT – A Mobile Survey System for GIS Applications. A Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy / N. El-Sheimy. The University of Calgary. Department of Geomatics Engineering. Calgary, Alberta, September 1996. – P. 198.
2. *Jansson P.* Precise Kinematic GPS Positioning with Kalman Filtering and Smoothing. Theory and Applications. Doctoral Dissertation / P.Jansson. Royal Institute of Technology, Department of Geodesy and Photogrammetry, Stockholm, Sweden, May 1998. –P. 134.
3. *Zhang X.* Integration of GPS with a Medium Accuracy IMU for Metre-Level Positioning: a Thesis for the Degree of Master of Science in Engineering./ X. Zhang. The University of Calgary. Department of Geomatics Engineering. Calgary, Alberta, May 2003. – P. 126.
4. *Stephen J.* Development of Multi-Sensor GNSS Based Vehicle Navigation System. A Thesis for the Degree of Master of Science. / J. Stephen. The University of Calgary. Department of Geomatics Engineering. Calgary, Alberta, August 2000, p. 203.
5. *Adeniyi I.* GPS Time Series Land Slide Monitoring using a Weighted Extended Kalman Filtering with a DIA Procedure / I. Adeniyi. // Shaping the Change XXIII FIG Congress, TS 29 – Land Slide Control and Monitoring Surveys, Munich, Germany, October 8-13, 2006. – PP. 1-11.
6. *Kälber S.* GPS-based online control and alarm system (GOCA). /S. Kälber, R. Jäger// 10th FIG International Symposium on Deformation Measurements, Session V: Earth Crustal Deformation, Earthquakes, And Regional Movements II, 19 – 22 March 2001, Orange, California, USA, pp. 164-174.
7. *Панкрушин В.К.* Математическое моделирование и идентификация геодинамических систем. / В.К. Панкрушин – Новосибирск: СГГА, 2002. – 424 с.
8. *Гуляев Ю.П.* Прогнозирование деформаций сооружений на основе результатов геодезических наблюдений. [Текст] : монография / Ю.П. Гуляев. – Новосибирск: СГГА, 2008. – 256 с.
9. *Huaan Fan* Theory of Errors and Least Squares Adjustment./ Fan Huaan. Royal Institute of Technology (KTH), Sweden, 2010. – 229 p.
10. *Справочник по прикладной статистике: в 2-х т. – Т.1: пер. с англ. под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 510 с. –*

Т.2: пер. с англ./ под. ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина, С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 526 с.

11. Simon D. Kalman Filtering / D. Simon // Embedded Systems Programming, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2001. P. 72-79.

Надійшла до редакції

12.02.2013

УДК 528.4

**Р.В. Шульц,
М.В. Білоус**

УТОЧНЕННЯ МЕТОДИКИ ПРИЗНАЧЕННЯ НЕОБХІДНОЇ ТОЧНОСТІ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНОЇ МЕРЕЖІ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ БУДІВНИЦТВА ПІДЗЕМНИХ СПОРУД

Виконано аналіз існуючих підходів до призначення необхідної точності створення геодезичної основи для забезпечення збійки зустрічних забоїв. Розроблено удосконалену методику призначення точності створення геодезичної мережі, яка позбавлена теоретичних та термінологічних неоднозначностей.

Ключові слова: геодезична основа, допуск, допустиме відхилення, габарит, збійка.

Постановка проблеми. Призначення точності створення геодезичної основи під час будівництва підземних споруд є одним з найвідповідальніших етапів геодезично-маркшейдерського забезпечення будівництва. Вихідною величиною, за допомогою якої виконують всі розрахунки, є величина допустимої збійки зустрічних забоїв. Від часу появи першої фундаментальної роботи з геодезично-маркшейдерського забезпечення будівництва підземних споруд [1] в 1952 р. здійснено декілька спроб сформуванню загальний підхід до призначення точності геодезичних робіт під час підземного будівництва підземних споруд. Відомий на теперішній час підхід, який остаточно сформувався в 70-х рр. ХХ ст., викладено в роботі [2]. Цей приклад без змін наведено у більшості підручників і монографій, у яких висвітлено геодезично-маркшейдерське забезпечення підземного будівництва [3-5]. Всі розрахунки базуються на використанні величини допустимої збійки. Проте у визначенні збійки можна зауважити значні термінологічні розбіжності, що призводить до неправильного призначення її величини. Таким чином, постає завдання з правильного визначення величини збійки, отже, й удосконалення методики подальших розрахунків.

Постановка завдання. Метою роботи є виконання аналізу підходів до призначення необхідної точності створення геодезичної основи для забезпечення допустимої збійки зустрічних забоїв та удосконалення методики призначення точності створення геодезичної мережі.

© Р.В. Шульц, М.В. Білоус, 2014