УДК 519.237

СЕРАЯ О.В., д.т.н., доцент (НТУ «ХПИ»)

Анализ методов решения транспортных задач со случайными стоимостями перевозок

Рассмотрена транспортная задача линейного программирования со случайными стоимостями перевозок. Введен критерий оптимальности плана перевозок – вероятность того, что случайная суммарная стоимость перевозок превысит пороговую. Задача сведена к максимизации дробно-линейного функционала с линейными ограничениями. Предложена процедура, преобразующая полученную нелинейную задачу к обычной задаче линейного программирования.

Ключевые слова: *линейное программирование, транспортная задача, случайные стоимости перевозок, дробно-линейный функционал.*

Введение

Транспортная задача линейного программирования в традиционной постановке формулируется следующим образом [1-5]. Имеется m поставщиков однородного продукта и n потребителей этого продукта. Известны вектор $A=(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_i \quad \dots \quad a_m)$, компоненты которого фиксируют возможности поставщиков, вектор $B=(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_j \quad \dots \quad b_n)$, компоненты которого задают потребности потребителей, а также матрица $C=(c_{ij})$, определяющая стоимости доставки единицы продукта от поставщиков к потребителям. Необходимо найти матрицу $X=(x_{ij})$, задающую план перевозок продукта от поставщиков к потребителям, минимизирующий суммарную стоимость перевозок

$$L_1(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,\dots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j,\ j=1,2,\dots,n, \qquad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n. \qquad (4)$$

Методы решения этой задачи хорошо известны и реализованы в широко применяемых математических пакетах (Mathcad, Excel и др.)

В условиях рыночной экономики приведенная постановка транспортной задачи не может быть признана реалистичной, поскольку параметры задачи не являются детерминированными величинами.

Одна из наиболее естественных формулировок транспортной задачи в условиях неопределенности связана с предположением, что параметры целевой функции задачи есть случайные величины с известными плотностями распределения. Это означает, что реальных данных о случайных параметрах задачи достаточно, чтобы сформулировать правдоподобные гипотезы о законах их распределения и статистически обоснованно их принять. При этом, поскольку на стоимости транспортировок товара влияет большое число разнообразных факторов, на практике часто считают, что их совместное влияние в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей приводит к нормальности результирующих случайных величин. В связи с этим введем набор плотностей вероятностей

$$\varphi_{ij}(c_{ij})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}exp\left\{-\frac{(c_{ij}-m_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\},$$

$$i=1,2,\dots m,\ j=1,2,\dots,n,$$

случайных значений c_{ij}.

Здесь m_{ij}, σ_{ij}^2 - оценки математического ожидания и дисперсии случайной стоимости перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю, полученные по результатам статистической обработки реальных данных.

Тогда плотность распределения случайной величины суммарной стоимости транспортировки

$$R = L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

имеет вид

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} exp\left\{-\frac{(R-m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2}\right\}, \qquad (5)$$

где

$$m_\Sigma = \sum_{i=`}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij}\ , \quad \sigma_\Sigma^2 = \sum_{i=`}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\ .$$

Задача состоит в отыскании набора $X = (x_{ij})$, доставляющего экстремальное значение какой-либо разумным образом выбранной функции от плотности (5) и удовлетворяющего ограничениям (2) – (4).

Постановка задачи

Зададим некоторое пороговое значение R_n суммарной стоимости транспортировки, превышение которого будем однозначно расценивать как признак не эффективности соответствующего плана транспортировки. Тогда в качестве характеристической функции естественно выбрать вероятность того, что суммарная стоимость перевозки превысит пороговую [6]. Эта вероятность равна

$$P(R \ge R_n) =$$

$$= \int_{R_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} \exp\left\{-\frac{(R-m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2}\right\} dR = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{R_n - m_\Sigma}{\sigma_\Sigma}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (6)$$

Теперь задача имеет вид: найти удовлетворяющий ограничениям план перевозок X, минимизирующий (6).

Понятно, что минимизация (6) эквивалентна максимизации нижнего предела в интеграле (6)

$$R(X) = \frac{R_n - m_\Sigma}{\sigma_\Sigma} = \frac{R_n - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (7)$$

Введем параметр $A = \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Если план перевозок X удовлетворяет ограничениям (2) как равенствам, то

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ .$$

Тогда (7) можно преобразовать к виду

$$R(X) = \frac{\frac{R_n}{A}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n}{A} - m_{ij}\right) x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

где $d_{ij} = \frac{R_n}{A} - m_{ij}$, $i = 1,2,...m$, $j = 1,2,...,n$.

Так как

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{n} \sigma_{i_1 j_1}\sigma_{i_2 j_2} x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_{ij}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_{ij}\ ,$$

то

$$R(X) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} > \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_{ij}} = T(X). \qquad (8)$$

Поставим задачу отыскания удовлетворяющего ограничениям плана X, максимизирующего $T(X)$. Понятно, что в силу (8) на множестве планов X значения функции $T(X)$ минорируют значения функции $R(X)$. При этом естественно считать, что процесс максимизации нижней границы для $R(X)$ сопровождается увеличением значения $R(X)$, что и требуется.

В [7] показано, что решение этой задачи достигается в результате реализации итерационной процедуры, на каждом шаге которой решается задача линейного программирования. В [8] показано, что соответствующая вычислительная процедура сходится, однако скорость сходимости не управляется и в условиях высокой размерности задачи может оказаться недопустимо медленной. В связи с этим рассмотрим другой метод решения задачи.

Основные результаты

Таким образом, задача сведена к следующей: найти набор $X=(x_{ij})$, максимизирующий

$$T(X)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_{ij}} \qquad (9)$$

и удовлетворяющий ограничениям (2) – (4).

Введем новые переменные:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_{ij}=\frac{1}{z_0}; \qquad (10)$$

$$z_{ij}=z_0x_{ij},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$$

Умножив правую и левую части ограничений (2) – (4) на z_0, получим:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}z_0=\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=a_iz_0,\ i=1,2,...,m, \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}z_0=\sum_{i=1}^{m}z_{ij}=b_jz_0,\ j=1,2,...,n.$$

Кроме того, из (10) имеем еще одно ограничение

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}z_{ij}=1. \qquad (12)$$

Учтем, наконец, что с вводом переменной z_0 целевая функция (9) преобразуется к виду

$$T(Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}z_{ij}. \qquad (13)$$

Так как параметры $\sigma_{ij}>0$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, то $z_0>0$. Отсюда следует, что из неотрицательности x_{ij} следует, что

$$z_{ij}\ge 0,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (14)$$

В результате проделанных действий получим следующую задачу линейного программирования: найти набор $Z=\{(z_{ij}),z_0\}$, максимизирующий (13) и удовлетворяющий ограничениям (11), (12), (14). К сожалению, нетранспортные ограничения (12) исключает возможность непосредственного использования здесь специфических методов решения транспортных задач. Однако, общие методы решения задач линейного программирования в данном случае применимы. Пусть $Z^*=\{(z_{ij}^*),z_0^*\}$ - решение задачи (11) – (14). Тогда искомый набор получим из соотношения

$$x_{ij}=\frac{z_{ij}^*}{z_0^*},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (15)$$

Покажем теперь, что набор $\{x_{ij}^*\}$, получаемый из оптимального плана задачи (11)-(14), является оптимальным и для исходной задачи (9), (2)-(4).

Так как $Z^*=\{(z_{ij}^*),z_0^*\}$ - решение задачи (11) – (14), то для любого набора $\{x_{ij}\}\neq\{x_{ij}^*\}$ имеем

$$T(Z^*)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}z_{ij}^*=z_0^*\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}^*\ge$$

$$\ge z_0\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}z_{ij}. \qquad (16)$$

С другой стороны, предположим, что существует набор $\{\hat{x}_{ij}\}$ такой, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\hat{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\hat{x}_{ij}}>\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_{ij}^*}=$$

$$= \frac{z_0^* \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}^*}{z_0^* \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_{ij}^*} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij}^*}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} z_{ij}^*}. \quad (17)$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \hat{x}_{ij} = \frac{1}{\hat{z}}. \quad (18)$$

Теперь, с учетом того, что набор Z^* является решением задачи (11)-(14), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} z_{ij}^* = 1. \quad (19)$$

Тогда из (17)-(19) следует неравенство

$$\hat{z} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \hat{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij} > \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij}^*,$$

которое противоречит (16). Следовательно, набор $\{x_{ij}^*\}$ действительно является искомым решением задачи (9), (2) – (4).

Понятно, что получаемое решение (15) является приближенным, и уровень его точности зависит от того, какова близость значений $R(X)$ и $T(X)$, которая определяется величиной значений дисперсий случайных стоимостей перевозок: чем они меньше, тем более точным будет план (15). Экспериментальная проверка качества решения показала, что максимизация нижней границы критерия $R(X)$ дает тем лучшие результаты, чем выше размерность задачи.

Выводы

Таким образом, показано, что решение транспортной задачи со случайными стоимостями перевозок сводится к максимизации дробно-линейного функционала с линейными ограничениями. Предложен метод непосредственного преобразования получаемой при этом задачи к стандартной задаче линейного программирования.

Литература

1. Бирман, И.Я. Транспортная задача линейного программирования / И.Я. Бирман. – М.: Изд. эк. лит., 1962. – 262 с.
2. Нестеров, Е.П. Транспортная задача линейного программирования / Е.П. Нестеров. – М.: Изд. МПС, 1962. – 189 с.
3. Юдин, Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: «Сов. радио», 1969. – 382 с.
4. Раскин, Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г. Раскин. – М., 1976. – 344 с.
5. Раскин, Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М.: Радио и связь, 1989 – 240 с.
6. Серая, О.В. Стохастическая задача транспортной логистики / О.В. Серая, Л.В. Бачкир, Г.Л. Томашевич // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. тр. Нац. техн. ун-та «ХПИ». - №31. – Х.: НТУ «ХПІ», 2006.– С. 112 – 117.
7. Серая, О.В. Минимаксный подход к решению транспортной задачи со случайным спросом / О.В Серая, Л.В. Бачкир // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2007. - №775. Вип.7. – Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – С. 11 – 16.
8. Серая, О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности : моногр. / О.В. Серая. – Х.: ФЛ-П Стеценко И. И., 2010. –512 с.

Сіра О. В. Аналіз методів розв'язання транспортних задач з випадковими вартостями перевезень. Розглянуто транспортну задачу лінійного програмування з випадковими вартостями перевезень. Введено критерій оптимальності плану перевезень - ймовірність того, що випадкова сумарна вартість перевезень перевищить порогову. Задача зведена до максимізації дробово-лінійного функціоналу з лінійними обмеженнями. Запропоновано процедуру, яка перетворює отриману нелінійну задачу до звичайної задачі лінійного програмування.

Ключові слова: лінійне програмування, транспортна задача, випадкові вартості перевезень, дрібно-лінійний функціонал.

Oksana V.Sira. Analysis of methods of transportation problem solution with random cost of transportation. The transportation problem of linear programming with random cost of transportation has been considered. The criterion of transportation plan optimality – id est the probability that a random total cost of transportation exceeds the threshold – has been introduced. The problem is brought to maximization of a linear-fractional functional with linear constraints. The procedure transforming non-linear problem into a conventional linear programming problem has been proposed.

Key words: linear programming, transportation problem, random transportation costs, linear- fractional functional.

Рецензент д.т.н., профессор Листровой С.В. (УкрГАЖТ)

Поступила 05.08.2013г.