

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ

Ключевые слова: аддитивная схема расщепления, задача конвективной диффузии, сходимостъ.

ВВЕДЕНИЕ

Решение прикладных задач, связанных с моделированием процессов в окружающей среде, требует не только знания физики среды и самого процесса, но также знания математического аппарата. Как правило, для моделирования процессов в атмосфере Земли используют нелинейные трехмерные уравнения с частными производными второго порядка [1–4]. Исходя из сложности математических моделей, для получения практически значимых результатов применяют численные методы решения. Часто проблема выбора оптимального алгоритма решения является нелегкой задачей. Трудность заключается в том, что получение более реалистичных результатов требует больших затрат вычислительных ресурсов и времени, усовершенствования модели, уточнения дополнительных условий. Ограничивающими критериями обычно выступают вычислительные ресурсы и время. Следовательно, необходимо искать компромисс между точностью решения и затратами на получение этого решения.

Таким компромиссом можно считать применение методов расщепления при решении многомерных задач [5–9]. Действительно, непосредственное решение многомерной задачи требует больших затрат ресурсов и времени, поскольку приходится оперировать разреженными матрицами большой размерности. Расщепление исходной задачи на несколько подзадач избавляет от такой необходимости, но при этом вносится ошибка в решение [10]. Исходя из специфики моделирования атмосферных процессов, можно утверждать, что даже применение низкоточных численных методов приемлемо для практических целей. Причиной этого является тот факт, что погрешности, вносимые в модель на этапе ее постановки и построения, как правило, большие, чем ошибки численной реализации. Поэтому применение высокоточных численных методов без совершенствования модели не даст заметного улучшения результатов.

Нами предлагается модификация аддитивно-усредненной схемы покомпонентного расщепления [11]. Поскольку такая схема позволяет использование параллельных вычислений, то модификация направлена на уменьшение количества обменов и их объемов в процессе решения. При таком расщеплении можно сохранить главные положительные свойства численного метода [8, 12, 13] («бегущий» счет и приемлемые условия устойчивости), которые в совокупности образуют достаточно эффективный алгоритм решения многомерной задачи.

ПОСТРОЕНИЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим p -мерную начально-краевую задачу конвективной диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^p v^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_k} &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu^{(k)} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + f, \\ u(0, x_1, \dots, x_p) &= u_0 \quad \text{при } (x_1, \dots, x_p) \in \Omega, \\ u(t, x_1, \dots, x_p) &= u_\Gamma \quad \text{при } (x_1, \dots, x_p) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Gamma = \partial\Omega$ — граница области решения Ω , $u = u(t, x_1, \dots, x_p)$ — неизвестная функция, $f = f(t, x_1, \dots, x_p)$ — источник или сток величины u , $v^{(k)} = v^{(k)}(t, x_1, \dots, x_p)$ — коэффициент конвекции k -го направления, $\mu^{(k)} = \mu^{(k)}(t, x_1, \dots, x_p) > 0$ — коэффициент диффузии k -го направления.

Будем полагать, что все условия и параметры согласованы таким образом, что задача (1) имеет единственное решение. Для определенности будем считать, что $v^{(k)} > 0$ для $k = 1, \dots, p$.

Если произвести пространственно-временную дискретизацию в уравнении (1) согласно одномерной схеме [8, 12], то получим матрично-векторное уравнение

$$\frac{\tilde{y}^{n+1} - \tilde{y}^n}{\tau} + \sum_{k=1}^p (B_k \tilde{y}^{n+1} - A_k \tilde{y}^n) = f^n, \quad (2)$$

где \tilde{y}^{n+1} — неизвестный вектор, A_k — матричный оператор n -го (явного) слоя k -го координатного направления, B_k — матричный оператор $(n+1)$ -го (неявного) слоя k -го координатного направления, τ — шаг по времени.

Точным решением уравнения (2) является

$$\tilde{y}^{n+1} = \left(I + \tau \sum_{k=1}^p B_k \right)^{-1} \left(\left(I + \tau \sum_{k=1}^p A_k \right) \tilde{y}^n + \tau f^n \right). \quad (3)$$

Обозначим

$$L = \left(I + \tau \sum_{k=1}^p B_k \right)^{-1}, \quad K = L \left(I + \tau \sum_{k=1}^p A_k \right)$$

и перепишем (3) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{n+1} &= K \tilde{y}^n + \tau L f^n = K^2 \tilde{y}^{n-1} + \tau K L f^{n-1} + \tau L f^n = \\ &= K^m \tilde{y}^{n+1-m} + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} K^\ell L f^{n-\ell} = K^m \tilde{y}^{n+1-m} + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=1}^p K^\ell L f_k^{n-\ell}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $m \geq 1$ — параметр, не зависящий от τ , $f = \sum_{k=1}^p f_k$.

Теперь рассмотрим одномерное уравнение для некоторого k -го координатного направления

$$\frac{1}{b_k} \frac{\partial u}{\partial t} + v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + f_k,$$

где $b_k = \text{const} > 0$ — неизвестный скалярный коэффициент. Согласно [8, 12] дискретная форма этого уравнения имеет вид

$$\frac{1}{b_k} \frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + B_k y_k^{n+1} - A_k y_k^n = f_k^n \quad (5)$$

или

$$y_k^{n+1} = K_k y_k^n + b_k \tau L_k f_k^n, \quad (6)$$

где $L_k = (I + b_k \tau B_k)^{-1}$, $K_k = L_k (I + b_k \tau A_k)$.

Используя (6) необходимое количество раз, получаем

$$y_k^{n+1} = K_k^m y_k^{n+1-m} + b_k \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} K_k^\ell L_k f_k^{n-\ell}. \quad (7)$$

Положим, что $y_k^{n+1-m} = y^{n+1-m}$ для $k=1, \dots, p$. Решение для расщепленной задачи находим в виде

$$y^{n+1} = \sum_{k=1}^p a_k y_k^{n+1}, \quad (8)$$

где $a_k = \text{const} > 0$ — неизвестные скалярные коэффициенты.

Делаем подстановку (7) в (8)

$$y^{n+1} = \left(\sum_{k=1}^p a_k K_k^m \right) y^{n+1-m} + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=1}^p a_k b_k K_k^\ell L_k f_k^{n-\ell}. \quad (9)$$

Найдем такие значения a_k и b_k , при которых точность решения для (9) будет первого порядка по времени, как и для соответствующей одномерной схемы [8, 12]. Это возможно, если для решений (4) и (9) имеет место оценка

$$\|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}\| \leq c\tau^2, \quad (10)$$

где $c = \text{const} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от τ . Для начальных данных условие (10) выполняется, так как $y^0 = \tilde{y}^0 = u^0$. Тогда положим, что $\|y^{n+1-m} - \tilde{y}^{n+1-m}\| \leq c\tau^2$ и запишем левую часть (10) в виде

$$\begin{aligned} \|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}\| \leq & \left\| K^m - \sum_{k=1}^p a_k K_k^m \right\| \cdot \|\tilde{y}^{n+1-m}\| + \left\| \sum_{k=1}^p a_k K_k^m \right\| \cdot \|y^{n+1-m} - \tilde{y}^{n+1-m}\| + \\ & + \tau \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=1}^p \|K^\ell L - a_k b_k K_k^\ell L_k\| \cdot \|f_k^{n-\ell}\|. \end{aligned}$$

Далее покажем, что $\|\tilde{y}^{n+1-m}\| \leq \exp(c_0 T) \cdot \left(\|u^0\| + T \sum_{k=1}^p \|f_k\| \right)$. Так же имеет место

оценка $\left\| \sum_{k=1}^p a_k K_k^m \right\| \leq \sum_{k=1}^p a_k \exp(c_k T)$. Поэтому для выполнения (10) достаточно,

чтобы имели место неравенства

$$\left\| K^m - \sum_{k=1}^p a_k K_k^m \right\| \leq c'\tau^2, \quad (11)$$

$$\|K^\ell L - a_k b_k K_k^\ell L_k\| \leq c''\tau, \quad k=1, \dots, p, \quad \ell=0, \dots, m-1. \quad (12)$$

Из (12) при $\ell=0$ имеем

$$\|L - a_k b_k L_k\| = \left\| L \left((I - a_k b_k I) + \tau a_k b_k (I + b_k \tau B_k)^{-1} \left(\sum_{s=1}^p B_s - b_k B_k \right) \right) \right\|.$$

Отсюда следует соотношение

$$a_k b_k = 1, \quad k=1, \dots, p. \quad (13)$$

Покажем, что при $\ell=1, \dots, m-1$ условие (13) также является достаточным для выполнения оценки (12). Действительно, применяя разложение в ряд по малому параметру τ , имеем

$$\begin{aligned} & \left(\left(I + \tau \sum_{s=1}^p B_s \right)^{-1} \left(I + \tau \sum_{s=1}^p A_s \right) \right)^\ell \left(I + \tau \sum_{s=1}^p B_s \right)^{-1} - \\ & - \left((I + b_k \tau B_k)^{-1} (I + b_k \tau A_k) \right)^\ell (I + b_k \tau B_k)^{-1} = \end{aligned}$$

$$= \left(I + \ell \tau \sum_{s=1}^p A_s - \ell \tau \sum_{s=1}^p B_s + o(\tau) \right) \left(I - \tau \sum_{s=1}^p B_s + o(\tau) \right) - \\ - (I + \ell b_k \tau A_k - \ell b_k \tau B_k + o(\tau))(I - b_k \tau B_k + o(\tau)) = O(\tau).$$

При рассмотрении (11) также используем разложение в ряд с учетом (13)

$$K^m - \sum_{k=1}^p a_k K_k^m = \left(I + \tau \sum_{k=1}^p A_k - \tau \sum_{k=1}^p B_k + o(\tau) \right)^m - \\ - \sum_{k=1}^p a_k (I + a_k^{-1} \tau A_k - a_k^{-1} \tau B_k + o(\tau))^m = I - \sum_{k=1}^p a_k I + o(\tau).$$

Отсюда получаем еще одно условие

$$\sum_{k=1}^p a_k = 1. \quad (14)$$

Таким образом, решения системы (13), (14) обеспечивают выполнение оценки (10). Из множества ее решений выбираем симметричное: $a_k = 1/p$, $b_k = p$.

Предлагаемый алгоритм решения задачи (1) имеет окончательный вид

$$y_k^{qm+s+1} = K_k y_k^{qm+s} + p \tau L_k f_k^{qm+s} \quad \text{при } x \in \Omega / \Gamma, \quad (15)$$

$$y_k^{qm} = y^{qm} \quad \text{при } s=0, \quad (16)$$

$$y_k^{qm+s+1} = u^{qm+s+1} \quad \text{при } x \in \Gamma_k, \quad (17)$$

$$y^{qm+m} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k^{qm+m} \quad \text{при } x \in \Omega / \Gamma, \quad (18)$$

где $m \geq 1$ — параметр схемы, $k = 1, \dots, p$, $s = 0, \dots, m-1$, $q = 1, 2, \dots$,

$$L_k = (I + p \tau B_k)^{-1}, \quad K_k = L_k (I + p \tau A_k).$$

Алгоритм расщепления (15)–(18) позволяет совершить переход на следующий временной слой в два этапа. Первый этап — решение p однотипных одномерных задач по каждому направлению. Причем эти решения могут производиться параллельно в силу их независимости по начальным данным. Кроме того, краевые условия не нуждаются в адаптации для расчета по какому-либо координатному направлению. Второй этап — суммирование полученных результатов через каждые m шагов. Иными словами, связанными по начальным данным являются только эти два этапа вне зависимости от размерности задачи. Следует отметить, что при $m = 1$ алгоритм (15)–(18) совпадает с алгоритмом в работе [11].

Применение рассматриваемого расщепления при пространственной размерности задачи больше двух ($p > 2$) с использованием параллельных вычислений дает значительное преимущество в затратах времени перед последовательными алгоритмами. К тому же этот алгоритм имеет меньшее число обменов данными в сравнении с алгоритмом в [11] (рис. 1). Действительно, если обозначить T_1 время решения задачи при $m = 1$,

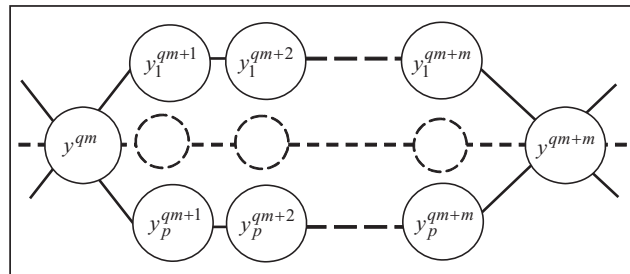


Рис. 1. Структура решения модифицированным алгоритмом (15)–(18)

T_∞ — время решения при $m \rightarrow +\infty$, т.е. без преобразования (18), то $T_m = T_\infty + (T_1 - T_\infty)/m$ и уже при $m=10$ имеем 90 % теоретически возможного уменьшения времени решения.

АППРОКСИМАЦИЯ

Покажем, что система дискретных задач (5) для $k=1, \dots, p$ аппроксимирует исходное уравнение (1) в суммарном смысле. Заметим, что согласно [13] для $t \in [t^n; t^{n+1}]$ имеет место условная аппроксимация

$$B_k u^{n+1} - A_k u^n = v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + O \left(\tau + \frac{\tau}{h_k} + h_k^2 \right)$$

при $\tau \rightarrow 0$, $h_k \rightarrow 0$ и $(\tau/h_k) \rightarrow 0$.

Рассмотрим погрешность $z_k^{qm+s} = y_k^{qm+s} - u(t^{qm+s})$, $s=0, \dots, m-1$, $q=1, 2, \dots$

Следуя [14], сформулируем задачи для погрешностей, подставив z_k^{qm+s} , $k=1, \dots, p$, в (5),

$$\frac{z_k^{qm+s+1} - z_k^{qm+s}}{p\tau} + B_k z_k^{qm+s+1} - A_k z_k^{qm+s} = \psi_k^{qm+s},$$

где $z_k^0 = 0$, $z_k^{qm} = z^{qm} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p z_k^{qm}$,

$$\psi_k^{qm+s} = f_k^{qm+s} - \frac{u^{qm+s+1} - u^{qm+s}}{p\tau} - B_k u^{qm+s+1} + A_k u^{qm+s}.$$

Очевидно, что $\psi_k^{qm+s} = O(1)$, т.е. полная аппроксимация исходной задачи отсутствует. Теперь рассмотрим суммарную погрешность

$$\psi^{qm+s} = \sum_{k=1}^p \psi_k^{qm+s} = f^{qm+s} - \sum_{k=1}^p (B_k u^{qm+s+1} - A_k u^{qm+s}) - \frac{u^{qm+s+1} - u^{qm+s}}{\tau}.$$

Отсюда легко получаем, что $\psi^{qm+s} = O \left(\tau + \tau \sum_{k=1}^p h_k^{-1} + \sum_{k=1}^p h_k^2 \right)$. Поэтому схема

(15)–(18) аппроксимирует задачу (1) условно при $\tau \rightarrow 0$, $h_k \rightarrow 0$ и $(\tau/h_k) \rightarrow 0$ в суммарном смысле с первым порядком по времени.

УСТОЙЧИВОСТЬ. СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим конечномерное гильбертово пространство H_0 на множестве векторов

$$\{u = (u_0, u_1, \dots, u_M) : u_{b(i_1, \dots, i_p)} = 0, i_k \in \{0, n_k\}, k=1, \dots, p\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = h \sum_{i_1=1}^{n_1-1} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p-1} u_{b(i_1, \dots, i_p)} v_{b(i_1, \dots, i_p)}, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

где $h = \prod_{k=1}^p h_k$, h_k — шаг равномерной сетки k -го координатного направления,

$(n_k + 1)$ — количество узлов сетки k -го координатного направления, $M =$

$= \prod_{k=1}^p (n_k + 1) - 1$; $b(i_1, i_2, \dots, i_p) = a \cdot (i_1, i_2, \dots, i_p)^T$ — биективный оператор, $a =$

$= (a_1, a_2, \dots, a_p)$ — проекционный вектор, $a_k = \prod_{s=0}^{k-1} (n_s + 1)$, $n_0 = 0$.

Для упрощения дальнейших выкладок будем опускать символы суммирования и индексы, которые непосредственно не задействованы в данном преобразовании. Будем также считать, что $v^{(k)} = \text{const} > 0$, $\mu^{(k)} = \text{const} \geq 0$. В результате запишем $A_k = \alpha_k \tilde{A}_k$, $B_k = \beta_k \tilde{B}_k$, где $\alpha_k = \frac{v^{(k)} h_k - 2\mu^{(k)}}{2h_k^2}$, $\beta_k = \frac{v^{(k)} h_k + 2\mu^{(k)}}{2h_k^2} \geq 0$.

Нетрудно представить структуру матриц \tilde{A}_k и \tilde{B}_k в принятой формализации. Матрица \tilde{A}_k будет иметь единицы на главной диагонали и -1 на наддиагонали, которая находится на расстоянии a_k элементов от главной. Матрица \tilde{B}_k будет иметь единицы на главной диагонали и -1 на поддиагонали, которая находится на расстоянии a_k элементов от главной. Остальные позиции в матрицах будут нулевыми.

Следует отметить, что введение пространства H_0 сужает множество решений в сравнении с задачей (15)–(18), т.е. фактически задается ограничение $y^n \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. Однако в пространстве H_0 можно полноценно исследовать устойчивость схемы (15)–(18) по начальным данным и правой части [6, 9].

Сначала сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 1. Матрица B_k — неотрицательна.

Доказательство. Действительно $\forall y \in H_0$ имеем

$$(B_k y, y) = \beta_k (\tilde{B}_k y, y) = h\beta_k \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i (y_i - y_{i-1}) \geq h\beta_k \left(\sum_{i=1}^{n_k-1} y_i y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i y_{i-1} \right) = 0.$$

Лемма 2. Для $D \geq 0$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство $\|(I + \sigma D)^{-1}\| \leq 1$.

Доказательство. Из определения нормы оператора получаем

$$\begin{aligned} \|(I + \sigma D)^{-1}\|^2 &= \sup_{y \neq 0} \frac{((I + \sigma D)^{-1} y, (I + \sigma D)^{-1} y)}{(y, y)} = \sup_{v \neq 0} \frac{(v, v)}{((I + \sigma D)v, (I + \sigma D)v)} = \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{(v, v)}{(v, v) + 2\sigma(Dv, v) + \sigma^2(Dv, Dv)} \leq 1. \end{aligned}$$

Лемма 3. Для $\sigma \in [0; 1]$ выполняется неравенство $\|I - \sigma \tilde{A}_k\| \leq 1$.

Доказательство. Используем определение нормы оператора

$$\begin{aligned} \|I - \sigma \tilde{A}_k\|^2 &= \sup_{y \neq 0} \frac{((I - \sigma \tilde{A}_k)y, (I - \sigma \tilde{A}_k)y)}{(y, y)} = 1 + \sup_{y \neq 0} \frac{\sigma^2 (\tilde{A}_k y, \tilde{A}_k y) - 2\sigma (\tilde{A}_k y, y)}{(y, y)} = \\ &= 1 + \sup_{y \neq 0} \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n_k-1} (y_i - y_{i+1})^2 - 2\sigma \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i (y_i - y_{i+1})}{(y, y)} = \\ &= 1 + \sup_{y \neq 0} \frac{(\sigma^2 - 2\sigma) \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n_k-1} y_{i+1}^2 + (2\sigma - 2\sigma^2) \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i y_{i+1}}{(y, y)}. \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму с учетом того, что $\sigma \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} \|I - \sigma \tilde{A}_k\|^2 &\leq 1 + \sup_{y \neq 0} \frac{(\sigma^2 - 2\sigma) \sum_{i=1}^{n_k-1} y_i + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n_k-1} y_{i+1}^2 + (\sigma - \sigma^2) \sum_{i=1}^{n_k-1} (y_i^2 + y_{i+1}^2)}{(y, y)} = \\ &= 1 - \sigma \sup_{y \neq 0} \frac{y_1^2}{(y, y)} \leq 1. \end{aligned}$$

Теорема. Для решения, полученного по схеме (15)–(18), при условии

$$0 \leq -p\tau\alpha_k \leq 1 \quad (19)$$

имеет место оценка

$$\|y^n\| \leq \|u^0\| + \tau \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{n-1} \|f_k^s\| \leq \|u^0\| + T \sum_{k=1}^p \|f_k\|, \quad (20)$$

где $\|f_k\| = \max_{s=1, \dots, n-1} \|f_k^s\|$.

Доказательство. Запишем (15) в виде

$$y_k^n = (I + p\tau B_k)^{-1} ((I + p\tau A_k)y_k^{n-1} + p\tau f_k^{n-1}), \quad k=1, \dots, p,$$

где $n = qt$, $q=1, 2, \dots$

Переходя к нормам и применяя все леммы, а также условие (19) для леммы 3, получаем

$$\|y_k^n\| \leq \|y_k^{n-1}\| + p\tau \|f_k^{n-1}\|.$$

Используя последнее неравенство рекуррентно, имеем

$$\|y_k^n\| \leq \|y_k^{n-m}\| + p\tau \sum_{s=0}^{m-1} \|f_k^{n-m+s}\| = \|y_k^{n-m}\| + p\tau \sum_{s=0}^{m-1} \|f_k^{n-m+s}\|,$$

так как $y_k^{n-m} = y_k^{n-m}$, $k=1, \dots, p$. Из этого неравенства и (18) следует неравенство

$$\|y^n\| \leq \frac{1}{P} \sum_{k=1}^p \|y_k^n\| \leq \|y^{n-m}\| + \tau \sum_{k=1}^p \sum_{s=0}^{m-1} \|f_k^{n-m+s}\|.$$

Используя рекуррентно последнюю формулу, получаем (20).

Замечание. В общем случае (не учитывая (19)) можно показать, что имеет место оценка

$$\|y^n\| \leq \exp(cT) \cdot \left(\|u^0\| + T \sum_{k=1}^p \|f_k\| \right), \quad (21)$$

где $c \geq 0$ — некоторая постоянная.

Таким образом, оценка (20) при условии (19), как и оценка (21), гарантирует устойчивость схемы (15)–(18) по начальным данным и правой части. Поэтому по теореме Лакса об эквивалентности из условной согласованности (аппроксимации) схемы (15)–(18) и ее устойчивости следует условная сходимость решений этой разностной схемы к решению задачи (1)

$$\|u - y\| \leq M \left(\tau + \tau \sum_{k=1}^p h_k^{-1} + \sum_{k=1}^p h_k^2 \right),$$

где $M = \text{const} > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая модификация (15)–(18) аддитивного метода расщепления [11] для решения многомерной задачи конвективной диффузии (1) по сути является его обобщением, которое позволяет сократить количество обменов данными и их объем при численной реализации. Применяемый здесь разностный метод [8, 12] по временным затратам близок к явной схеме. Эти два обстоятельства позволяют уменьшить общее время решения задачи, т.е. повысить эффективность ее решения в сравнении с исходным алгоритмом. При этом порядок точности по времени остается первым, что является приемлемым для моделирования атмосферных процессов.

К недостаткам предлагаемой модификации следует отнести условную сходимость метода. Поэтому при практических расчетах необходимо брать $\tau = O(h^{1+s})$, $s \in (0; 1)$, что не является очень жестким ограничением. Исходя из этого, целесообразно применение данного алгоритма при решении задач моделирования процессов в атмосфере. В настоящее время работа в этом направлении проводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1989. — 376 с.
2. Гирс А.А., Кондратович К.В. Методы долгосрочных прогнозов погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1978. — 344 с.
3. Динамика погоды / Под ред. С. Манабе. — Л.: Гидрометеоздат, 1988. — 420 с.
4. Марчук Г.И., Дымников В.П. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоздат, 1984. — 320 с.
5. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, СО, 1981. — 304 с.
6. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 264 с.
7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992. — 424 с.
8. Prusov V., Doroshenko A., Farago I., Navasi A. On the numerical solution of the three-dimensional advection-diffusion equation // Проблемы програмування. — 2006. — № 2–3. — С. 641–647.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. — М.: Наука, 2001. — 320 с.
10. Csomos P. Some aspects of interaction between operator splitting procedures and numerical methods // Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security. — 2005. — 54. — P. 77–91.
11. Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1974 — 14, № 1. — С. 246–250.
12. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 64–74.
13. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Теоретическое исследование одного численного метода решения задачи конвективной диффузии // Там же. — 2008. — № 2. — С. 161–170.
14. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 553 с.

Поступила 14.12.2007

После доработки 28.05.2008