УДК 519.217; 519.718

**Т.О. ЛУКАШИВ, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ**

# МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИТО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ИМПУЛЬСНЫМИ МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ. II. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ИМПУЛЬСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

**Ключевые слова:** *стохастическая динамическая система, автономная система, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по вероятности, асимптотическая устойчивость по вероятности, p-устойчивость.*

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

**Постановка задачи.** Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset F$, рассматривается импульсная система вида

$$dx(t) = [a_0(t, \xi(t), x(t)) + a_1(t, \xi(t), x(t))]dt + \\ + b_0(t, \xi(t), x(t))dw_0(t) + b_1(t, \xi(t), x(t))dw_1(t) \tag{1}$$

с импульсными возмущениями

$$\Delta x(t)\big|_{t_k} = g_0(t_k, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)) + g_1(t_k, \xi(t_k -), \eta_k, x(t_k -)) \tag{2}$$

и начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \in \boldsymbol{R}^m, \ \xi(t_0) = y, \ \eta_{k_0} = h. \tag{3}$$

Здесь $a_i, b_i, g_i$ — отображения, которые измеримы по совокупности $g_i$ переменных, $i = 0, 1$; $a_i : \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $b_i : \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$; $g_i : \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, и удовлетворяют глобальному условию Липшица типа

$$|a(t, y, x^{(1)}) - a(t, y, x^{(2)})| + |b(t, y, x^{(1)}) - b(t, y, x^{(2)})| + \\ + |g(t, y, h, x^{(1)}) - g(t, y, h, x^{(2)})| \leq \Lambda |x^{(1)} - x^{(2)}|$$

и условию равномерной ограниченности по $t$ типа

$$|a(t, y, 0)| + |b(t, y, 0)| + |g(t, y, h, 0)| = c < \infty, \ t \geq 0, \ y \in \boldsymbol{Y}, \ h \in \boldsymbol{H};$$

$w_i(t) = w_i(t, \omega)$, $i = 0, 1$, — скалярные нормированные винеровские процессы [1].

Везде далее будем исследовать тривиальное решение (1)–(3) в вероятностных понятиях

$$a_i(t, y, 0) = b_i(t, y, 0) = 0; \ b_i(t, y, h, 0) = 0, \ i = 0, 1. \tag{4}$$

**Определение 1.** Импульсную систему

$$d\bar{x}(t) = a_0(t, \xi(t), \bar{x}(t))dt + b_0(t, \xi(t), \bar{x}(t))dw_0(t), \tag{5}$$

$$\Delta \bar{x}(t)\big|_{t_k} = g_0(t_k, \xi(t_k -), \eta_k, \bar{x}(t_k -)) \tag{6}$$

с начальными условиями (3) назовем системой первого приближения для импульсной системы (1)–(3).

---

[1] Начало см. в № 2, 2009

При анализе устойчивости (1)–(3) можно использовать функцию Ляпунова для (5), (6), (8) и, вычислив дискретный оператор Ляпунова для (1)–(3), получить достаточные условия устойчивости этой системы в том или ином вероятностном смысле.

Этот метод называется [2–4] исследованием устойчивости по первому приближению. Чаще всего в качестве системы первого приближения (5), (6) выступает линейная система. В этом случае говорим об устойчивости по линейному приближению. Может оказаться, что системой первого приближения является детерминированная импульсная система, т.е. $a_0$, $b_0$ и $g_0$ в (5), (6) не зависят от $\xi(t)$ и $\eta_k$. Тогда имеем устойчивость по детерминированному приближению.

Заметим, что в случае импульсных систем естественно должны возникать системы первого приближения иного вида.

В первом случае будем считать, что импульсные воздействия являются «разрывными» возмущениями гладких решений дифференциального уравнения. Этот случай в наших обозначениях задается равенствами

$$a_1(t, y, x) = b_1(t, y, x) = 0; \; g_0(t, y, h, x) = 0. \tag{7}$$

Во втором случае

$$a_0(t, y, x) = b_0(t, y, x) = 0; \; g_1(t, y, h, x) = 0. \tag{8}$$

Можно считать, что системой первого приближения является разностное уравнение вида

$$x_{k+1} = x_k + g_0(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_k), \; k \geq 0. \tag{9}$$

Если для анализа устойчивости (8) использовать дискретный оператор Ляпунова [5], то для анализа устойчивости системы первого приближения в виде дифференциального уравнения (7), как правило, используют производную в силу системы.

Поэтому докажем некоторые теоремы второго метода Ляпунова, которые могут использовать производную в силу (5) и разность в силу системы (9).

### ДИСКРЕТНЫЙ ОПЕРАТОР ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Пусть $U(t, y, h, x)$ — такая скалярная неотрицательная функция, что последовательность

$$\{V_k(y, h, x) \equiv U(t_k, y, h, x), k \in N\} \tag{10}$$

является функцией Ляпунова. Для дискретного оператора Ляпунова

$$lv(y, h, x) \equiv \int\limits_{\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m} \boldsymbol{P}_k(y, h, x)(du \times dz \times dl) v(u, z, l) - v(y, h, x)$$

в силу системы (1)–(3) сохраним обозначение $l$, а для дискретного оператора Ляпунова в силу (5), (6) используем обозначение $l_0$.

Введем необходимые ограничения и обозначения, связанные с марковским процессом $\xi(t)$. Следуя результатам Е.Б. Дынкина [6], определим $C$-инфинитезимальный оператор $\hat{\mathcal{L}}$ равенством

$$(\hat{\mathcal{L}} U_1)(y) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\boldsymbol{E}\{U_1(\xi(t)) - U_1(y)\}], \tag{11}$$

где $U_1 \in D(\hat{\mathcal{L}}) \subset C(\boldsymbol{Y})$. Сохраним это обозначение для продолжения $\hat{\mathcal{L}}$ в пространство непрерывных, но не обязательно ограниченных отображений $\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{R}$.

Предположим далее, что марковский процесс $\xi(t)$ не зависит от цепи Маркова $\{\eta_k\}$.

Пусть $U(t, y, h, x)$ — непрерывная по совокупности и непрерывно дифференцируемая по $t$ и $x$ неотрицательная функция.

Можно доказать, что пара $\{\xi(t), \bar{x}(t)\}$, где $\bar{x}(t)$ — сильное решение первого приближения, как СДУ, образует феллеровский марковский процесс и можно ввести оператор [6]

$$(QU)(t, y, h, x) \equiv \lim_{\tau - 0 \to 0} \frac{1}{\tau} [\boldsymbol{E}_{y,x}^{(y)} \{U(t+\tau, \xi(t+\tau), h, \bar{x}(t+\tau)\} - U(t, y, h, x)], \quad (12)$$

где индексы математического ожидания означают условия $\xi(t) = y$, $\bar{x}(t) = x$. Естественно считать, что определенная выше функция $U(t, y, h, x)$ лежит в области определения оператора $Q(U \in D(Q))$, если предел (12) существует в смысле равномерной сходимости в некоторой окрестности точки $(y, x)$ равномерно по $h \in \boldsymbol{H}$.

Далее введем оператор Ляпунова $\mathcal{L}_0$, связанный с импульсным воздействием (6) в момент времени $t_k$, $k \in N$. Этот оператор $\mathcal{L}_0$ действует на последовательность функций

$$(\mathcal{L}_0 U)(t_k, y, h, x) = \int_{\boldsymbol{H}} U(t_k, y, h, x + g_0(t_k, y, h, x)) \overline{P}_k(h, dz) - U(t_k, y, h, x). \quad (13)$$

Перейдем к вычислению оператора $(QU)(t, y, h, x)$ по определению (12). В силу системы (5) от внутренней структуры параметра — марковского процесса $\xi(t)$, с учетом внешних импульсных возмущений $\{\eta_k\}$, $k \in N$, имеем систему вида (6).

**Случай 1.** Пусть система со случайной структурой задана системой СДУ по первому приближению (5), (6) для $t \ge t_0$, где $x(t) \in \boldsymbol{R}^m$, $\xi(t)$ — простая цепь Маркова с конечным числом состояний $\boldsymbol{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и заданными вероятностями перехода

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t) = y_j \,/\, y(s) = y_i\} = q_{ij}(t-s) + o(t-s), \quad (14)$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi(l) = y_i, s \le l \le t \,/\, y(s) = y_i\} = 1 - q_i(t-s) + o(t-s). \quad (15)$$

В момент $\tau$-изменения структуры параметра $\xi(t)$ системы (5) $y_i \to y_j$ происходит случайное скачкообразное изменение фазового вектора $x(\tau - 0) = x$, $x(\tau) = z$, для которого задана условная плотность $p_{ij}(\tau, z/x)$, а именно

$$\boldsymbol{P}\{x(\tau) \in [z, z+dz] \,|\, x(\tau - 0) = x\} = p_{ij}(\tau, z/x) dz + o(dz). \quad (16)$$

Вычислим оператор $Q_0 U$ в силу системы (5), (6).

**Теорема 1.** Пусть марковская цепь $\xi(t) \in \boldsymbol{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ не зависит от цепи Маркова импульсного воздействия (6) $\{\eta_k\}$, $k \in N$, для которых выполнены (14)–(16). Тогда оператор $(Q_0 U)$ в силу импульсной системы первого приближения (5), (6) от функции $U(t, \xi(t), \eta_k, x(t))$ вычисляется по формуле

$$(Q_0 U)(t, y, h, x) = (\mathcal{L}_t U)(t, y, h, x) + (\mathcal{L}_x U)(t, y, h, x) + \\ + (\hat{\mathcal{L}}_y U)(t, y, h, x) + (\mathcal{L}_0 U)(t, y, h, x), \quad (17)$$

где $(\mathcal{L}_t U)(t, y, h, x) = \dfrac{\partial U(t, y, h, x)}{\partial t}$;

$$(\mathcal{L}_x U)(t, y, h, x) = (\nabla_x U(t, y, h, x), a_0(t, y, h, x)) + \\ + \frac{1}{2} \mathrm{Sp}\, (\nabla_{xx}^2 U(t, y, h, x) b_0(t, y, h, x), b_0^{\mathrm{T}}(t, y, h, x)), \quad (18)$$

$$(\mathcal{L}_y U)(t, y, h, x) = \sum_{j \ne i}^{k} \left[ \int_{\boldsymbol{R}^m} U(t, y_j, h, x) p_{ij}(t, z/x) dz - U(t, y_i, h, x) \right] q_{ij}, \quad (19)$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, $(\nabla U)^{\mathrm{T}} \equiv \left( \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_m} \right)$, $\nabla_{xx}^2 U \equiv \left[ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^{m}$,

Sp — след матрицы, $(\mathcal{L}_0 U)(t, y, h, x)$ вычисляется по формуле (13).

**Доказательство.** Ввиду линейности оператора $(Q_0U)(t, y, h, x)$ по определению (11) следует его представление в виде суммы четырех операторов (см. (17)). Докажем формулы (18), (19) вычисления операторов $(\mathcal{L}_xU)(t, y, h, x)$ и $(\mathcal{L}_yU)(t, y, h, x)$.

Упростив задачу отсутствием импульсного возмущения (6), обозначим начальные условия $x(t)=x$, $\xi(t)=y_i$. Рассмотрим полную группу несовместимых событий (гипотез) при каждом $i=\overline{1,k}$. Пусть $H_i$ — такое событие, что на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ структура системы (5) не изменится, т.е. $\xi(\tau)=y_i$ при $(t, t+\Delta t)$. Тогда с точностью до $o(\Delta t)$ имеем

$$\boldsymbol{P}(H_{ij})=1-q_{ij}\Delta t. \tag{20}$$

Далее пусть $H_{ij}$ — событие, при котором на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ происходит изменение $y_i \to y_j \neq y_i$. Тогда с точностью до $o(\Delta t)$ имеем

$$\boldsymbol{P}(H_{ij})=q_{ij}\Delta t. \tag{21}$$

Пусть $\Delta U \equiv U(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t), h, x(t+\Delta t)) - U(t, y_i, h, x)$, вычислим изменения $\Delta_i U \equiv \Delta_{H_i} U$, $\Delta_{ij} U \equiv \Delta_{H_{ij}} U$ функции $U$ при $H_i$, $H_{ij}$, $j \neq i$, пренебрегая слагаемыми порядка $o(\Delta t)$:

$$\Delta_i U = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla_x U, a_0(t, y, h, x)) + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\nabla^2_{xx} U b_0(t, y, h, x), b_0^{\mathrm{T}}(t, y, h, x))\right]\Delta t. \tag{22}$$

Здесь все частные производные вычислены в точке $(t, y_i, h, x)$, $x(s)$ — решение уравнения (5) с начальными условиями $x(t)=x$, $\xi(t)=y_i$, $s>t\geq t_0>0$ (импульсное возмущение пока не учтено).

В случае изменения структуры $y_i \to y_j$ на интервале времени $(t, t+\Delta t]$ приращение

$$\Delta_{ij} U = U((t+\Delta t), y_j, h, x) - U(t, y_i, h, x). \tag{23}$$

Заметим, что в (23) исключены слагаемые, связанные с тем, что возможное изменение структуры происходит при $\tau \in [t, t+\Delta]$ и с непрерывным изменением $x(t)$ на интервале $(t, t+\Delta t]$. Причем все эти слагаемые имеют порядок малости $o(\Delta t)$, поэтому после усреднения эти слагаемые с учетом

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t)=y_j \mid \xi(t)=y_i\}=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi(\tau)=y_i, t<\tau<t+\Delta t \mid \xi(t)=y_i\}=1-q_i\Delta t+o(\Delta t)$$

будут иметь порядок $o(\Delta t)$, а значит, в результате предельного перехода (11) они обратятся в ноль.

Для вычисления $\boldsymbol{E}\{\Delta U \mid \xi(t)=y_i, h, x(t)=x\}$ воспользуемся формулой повторного условного математического ожидания

$$\boldsymbol{E}\{\Delta U \mid \xi(t)=y_i, h, x(t)=x\}=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{\Delta U \mid \xi(t)=y_i, h, x(t)=x\} \mid x(t+\Delta t)=z\}, \tag{24}$$

где внешнее условное математическое ожидание в правой части (24) выполнено по переменной $z$.

С учетом

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t)=y_j \mid \xi(t)=y_i\}=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi(\tau)=y_i, t<\tau<t+\Delta t \mid \xi(t)=y_i\}=1-q_i\Delta t+o(\Delta t),$$

$$dx(t)=a(t, x(t), y_i)dt+b(t, x(t), y_i)dw(t)$$

и (23) получим с точностью до $o(\Delta t)$

$$\boldsymbol{E}\{\Delta U \mid \xi(t)=y_i, h, x(t)=x\}=\left[\frac{\partial U}{\partial t}+(\nabla_x U, a_0(t, y, h, x))+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\nabla^2_{xx}Ub_0\,(t,\,y,h,x),b_0^{\mathrm{T}}\,(t,\,y,h,x))\Bigg](1-q_i\,\Delta t)\Delta t+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{k}\left[\int_{\boldsymbol{R}^m}U(t,\,y_j\,,h,x)p_{ij}\,(t,z\,/\,x)dz-U(t,\,y_i\,,h,x)\right]q_{ij}\,\Delta t. \tag{25}$$

При вычислении третьего слагаемого использовано свойство винеровского процесса о вычислении ковариации от приращения винеровского процесса [1, 6].

Выполним деление $\Delta t$, перейдем к пределу при $\Delta t\to 0+$, в результате получим первое $\mathcal{L}+U$, второе $\mathcal{L}_xU$ и третье слагаемое $\mathcal{L}_yU$ в формуле (17). Идею вычисления четвертого слагаемого $\mathcal{L}_0U$ можно найти в [2, с. 163, 164, и в 7–9].

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если предел (11)

$$\begin{gathered}(Q_1U)(t,\,y,h,x)=Q_0U(t,\,y,h,x)+\mathcal{L}_1U(t_k\,,\,y,h,x)+\\ +(\nabla_xU(t,\,y,h,x),\,a_1\,(t,\,y,h,x))+\\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\nabla^2_{xx}U(t,\,y,h,x)b_1\,(t,\,y,h,x),\,b^{\mathrm{T}}\,(t,\,y,h,x)),\end{gathered} \tag{26}$$

где $\mathcal{L}_1U(t_k\,,\,y,h,x)$ вычисляется по правилу (13), то вместо $g_0$ следует записать $g_1$.

Рассмотрим случай изменения внутренней структуры системы (1) под воздействием импульсных возмущений (6).

**Случай 2.** Пусть в момент изменения структуры $y_i\to y_j$ фазовый вектор изменяется по детерминированному закону $x(\tau)=\varphi_{ij}\,(x(\tau-0))$, $i\neq j$, для которого задана условная плотность $p_{ij}\,(\tau,z\,/\,x)$.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1, тогда оператор $Q_0U(t,y,h,x)$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}(Q_0U)(t,\,y,h,x)=\frac{\partial U(t,\,y,h,x)}{\partial t}+(\nabla_xU(t,\,y,h,x),\,a_0\,(t,\,y,h,x))+\\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\nabla^2_{xx}U(t,\,y,h,x)b_0\,(t,\,y,h,x),\,b_0^{\mathrm{T}}\,(t,\,y,h,x))+\\ +\sum_{j\neq i}^{k}\left[\int_{\boldsymbol{R}^m}U(t,\,y_j\,,h,\varphi_{ij}\,(x))p_{ij}\,(t,\varphi_{ij}\,(z)/\,x)dz-\upsilon(t,\,y_i\,,h,x)\right]q_{ij}\,.\end{gathered} \tag{27}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1.

**Замечание 2.** Пусть предел (11) вычисляется в силу уравнений (1)–(3), тогда оператор $Q_1U(t,\,y,h,x)$ следует вычислять по формуле

$$\begin{gathered}(Q_1U)(t,\,y,h,x)=Q_0U(t,\,y,h,x)+(\nabla_xU(t,\,y,h,x),\,a_1\,(t,\,y,h,x))+\\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\nabla^2_{xx}U(t,\,y,h,x)b_1\,(t,\,y,h,x),\,b^{\mathrm{T}}\,(t,\,y,h,x))+\mathcal{L}_1U(t_k\,,\,y,h,x),\end{gathered} \tag{28}$$

где $\mathcal{L}_1U$ вычисляется по правилу (13), где вместо $g_0$ следует записать $g_1$.

**Случай 3.** Если в моменты изменения структуры $y_i\to y_j$ фазовый вектор изменяется непрерывно $x(\tau-0)=x(\tau)=x$, то формула (17) упрощается.

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 имеем

$$\begin{gathered}(Q_1U)(t,\,y,h,x)=\frac{\partial U(t,\,y,h,x)}{\partial t}+(\nabla_xU(t,\,y,h,x),\,a_0\,(t,\,y,h,x))+\\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\nabla^2_{xx}U(t,\,y,h,x)b_0\,(t,\,y,h,x),\,b_0^{\mathrm{T}}\,(t,\,y,h,x))+\\ +\sum_{j\neq i}^{k}\,[U(t,\,y_j\,,h,x)-U(t,\,y_i\,,h,x)]\,q_{ij}\,+(\nabla_xU(t,\,y,h,x),\,a_1\,(t,\,y,h,x))+\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\nabla^2_{xx}U(t,y,h,x)b_1(t,y,h,x),b_1^{\mathrm T}(t,y,h,x))+$$
$$+(\mathcal{L}_0U)(t,y,h,x))+(\mathcal{L}_1U)(t,y,h,x). \qquad (29)$$

**Случай 4.** Рассмотрим случай более сложных конструкций марковского процесса. $\xi(t)\in[\eta_1,\eta_2]$ — чисто разрывный марковский процесс, допускающий разложение

$$P\{\xi(t+\Delta t)\in[\beta,\beta+\Delta\beta]|\xi(t)=\alpha\neq\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{\xi(\tau)=\alpha,t<\tau<t+\Delta t|\xi(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t),$$

а в моменты скачка $\xi(t)$ фазовый вектор изменяется непрерывно, приводит к вычислению

$$(Q_0U)(t,y,h,x)=(\mathcal{L}_tU)(t,y,h,x)+(\mathcal{L}_xU)(t,y,h,x)+$$
$$+(\mathcal{L}_0U)(t,y,h,x)+\int\limits_{[\eta_1,\eta_2]}[v(t,\beta,h,x)-v(t,\alpha,h,x)]\rho(t,\alpha,\beta)\,d\beta, \qquad (30)$$

где $\mathcal{L}_tU,\mathcal{L}_xU,\mathcal{L}_0U$ соответственно вычисляются по формулам (17), (18), (13).

**Случай 5.** Формула $Q_0U$ в точке $(t,y,h,x)$ для системы (1)–(3), когда $\xi(t)$ — решение обобщенного стохастического СДУ Ито–Скорохода с интегралом по пуассоновской случайной мере имеет более сложный вид даже при наличии импульсных марковских возмущений (см. [10, с. 52–54].

### УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

**Теорема 3.** Пусть:

1) $\sup\limits_{k\in N}|t_{k+1}-t_k|=\Delta<\infty$;

2) $a_i,b_i,g_i$, $i=0,1$, удовлетворяют условия Липшица соответственно по 3-му и 4-му аргументам, при всех $t\in\boldsymbol{R}_t$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$ и равномерной ограниченности по $t$ при всех $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$, причем $a_i(t,y,h,0)=b_i(t,y,h,0)=g_i(t,y,h,0)=0$, $i=\overline{0,1}$;

3) марковский процесс стохастически непрерывен.

Если существует неотрицательная функция $U\in D(Q_0)$, такая что

$$\inf_{\substack{t\geq0,\ y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\ |x|\geq r}} U(t,y,h,x)=\overline{v}(r)\to\infty \text{ при } r\to\infty, \qquad (31)$$

$$\sup_{\substack{t\geq0,\ y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\ |x|\geq r}} U(t,y,h,x)=\underline{v}(r)\to0 \text{ при } r\to0, \qquad (32)$$

$$(Q_0U)(t,y,h,x)\leq0, \qquad (33)$$

$$(\mathcal{L}_0U)(t,y,h,x)\leq0 \qquad (34)$$

при всех $t\geq0$, $t_k\in S$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$, то импульсная система (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

**Доказательство.** По условиям (31), (32) последовательность $\{V_k(y,h,x)\equiv U(t_k,y,h,x)\}$, $k\in N$, образует функцию Ляпунова. Поэтому достаточно получить $(\mathcal{L}_0v_k)(y,h,x)\leq0$ при всех $k\in N$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$. Из определения инфинитезимального оператора марковского процесса $\{\xi(t),\overline{x}(t)\}$ по формуле Дынкина [6] имеем

$$\boldsymbol{E}^{(t_k)}_{y,x}U(t_{k+1},\xi(t_{k+1}-),h,x(t_{k+1}-))=$$
$$=U(t_k,y,h,x)+\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{E}^{(t_k)}\{(Q_0U)(\tau,\xi(\tau),h,\overline{x}(\tau))\}\,d\tau,$$

поэтому из (33) имеем

$$\boldsymbol{E}_{y,x}^{(t_k)} U(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), h, x(t_{k+1}-)) \le U(t_k, y, h, x) \tag{35}$$

при всех $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x \in \boldsymbol{R}^m$.

В силу предположения о стохастической непрерывности марковского процесса $\xi(t)$ при вычислении условных математических ожиданий для любого детерминированного $t \in R_+$ вместо $\xi(t)$ можно подставлять $\xi(t-)$. Этим существенно воспользуемся при вычислении $\mathcal{L}_0 v_k$, а именно,

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(y, h, x) = \boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, \bar{x}(t_{k+1}))\} - U(t_k, y, h, x) =$$

$$= [\boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, \bar{x}(t_{k+1}-)) + g_0(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}, \bar{x}(t_{k+1}-)\} -$$

$$- \boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), \eta, \bar{x}(t_{k+1}-))\}] +$$

$$+ [\boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}-), h, \bar{x}(t_{k+1}-)) - U(t_k, y, h, x)\}]. \tag{36}$$

Согласно (35) второе слагаемое в (36) неположительно. При оценке первого слагаемого берем вначале условное математическое ожидание при условии $\mathcal{F}_{t_{k+1}-}$, воспользуемся $\mathcal{F}_{t_{k+1}-0}$-измеримостью случайных величин $\xi(t_{k+1}-)$ и $x(t_{k+1}-)$ и, воспользовавшись, наконец, условием (34), получим $(\mathcal{L}_0 v_k)(y, h, x) \le 0$, что и доказывает устойчивость исходной импульсной системы (1)–(3).

Теорема доказана.

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и существует такое число $\gamma \in (0, 1)$, что при всех $t_k$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$ и $x \in \boldsymbol{R}^m$

$$(\mathcal{L}_0 U)(t_k, y, h, x) \le -\gamma U(t_k, y, h, x), \tag{37}$$

тогда импульсная система (1)–(3) асимптотически устойчива по вероятности в целом.

**Доказательство.** Из неравенства (37) для последовательности функций

$$b_k(y, h, x) = (1-\gamma)^{-k-1} \boldsymbol{E}_h^{(t_k)} \{U(t_{k+1}, y, \eta_{k+1}, x)\} - (1-\gamma)^{-k} U(t_k, y, h, x) =$$

$$= (1-\gamma)^{-k-1} [(\mathcal{L}_0 U)(t_k, y, h, x) + \gamma U(t_k, y, h, x)] \le 0,$$

используя неравенство (36) теоремы 3, имеем $(\mathcal{L}_0 b_k)(y, h, x) \le 0$, что означает

$$(1-\gamma)^{-k-1} \boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} U(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \le U(t_0, y, h, x) \le \underline{U}(|x|). \tag{38}$$

Далее, используя определение функции Ляпунова, получаем

$$\boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} \overline{U}(|x(t_k)|) \le \boldsymbol{E}_{y,h}^{(t_k)} U(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \le (1-\gamma)^k \underline{U}(|x|).$$

Откуда по определению асимптотической устойчивости по вероятности в целом имеем утверждение теоремы 4.

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Если $\inf_{k \in N} (t_{k+1} - t_k) \equiv$ $\equiv \Delta_1 > 0$ и существует такое $\gamma > 0$, что

$$(Q_0 U)(t, y, h, x) \le -\gamma U(t, y, h, x) \tag{39}$$

при $\forall t \ge 0$, $t_k \in S$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$ и $x \in R^m$, то импульсная система (1)–(3) асимптотически стохастически устойчива в целом.

**Доказательство.** По определению $Q_0$ для функции Ляпунова $z(t, y, h, x) \equiv$ $\equiv e^{\gamma t} U(t, y, h, x) \equiv z(t, y, h, x)$ легко получить неравенство

$$(Q_0 z)(t, y, h, x) \le \gamma z(t, y, h, x) + e^{\gamma t} Q_0 U(t, y, h, x) \le 0.$$

Тогда для $v_k(y,h,x) \equiv U(t_k, y,h,x)$ можно записать

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(y,h,x) \le -e^{-\gamma\Delta_1} \boldsymbol{E}_h^{(t_k)} \{U(t_k, y, \eta_{k+1}, x+g_0(t_k, y,h,x))\} - U(t_k, y,h,x) \le$$

$$\le (e^{-\gamma\Delta_1} - 1) U(t_k, y,h,x) \le 0,$$

что и доказывает следствие 2.

Исследуем далее сохранение свойств экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом при постоянно действующих возмущениях.

**Теорема 5.** Пусть для импульсной системы (3)–(5) выполняются условия существования сильного решения и такая функция Ляпунова $v_k(y,h,x)$, что при некоторых $c_i$, $i=\overline{1,4}$, выполняются неравенства:

$$c_1 |x|^2 \le v_k(y,h,x) \le c_2 |x|^2, \tag{40}$$

$$(\mathcal{L}_0 v_k)(y,h,x) \le -c_3 |x|^2, \tag{41}$$

$$|v_k(y,h,x_1) - v_k(y,h,x_2)| \le c_4 |x_1 - x_2|^2 \tag{42}$$

для всех $k \in N$, $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x_i \in \boldsymbol{R}^m$, $i = \overline{1,2}$;

$$\sup_k |t_{k+1} - t_k| \le \Delta;$$

возмущения $a_1, b_1$ и $g_1$ удовлетворяют равномерно по $t, y, h$ глобальному условию Липшица $(i=0,1)$

$$|a_i(t,y,h,x)| + |b_i(t,y,h,x)| + |g_i(t,y,h,x)| \le l|x|, \ \ l>0. \tag{43}$$

Тогда при достаточно малой константе $0<l<1$ исходная импульсная система (1)–(3) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом в целом.

**Доказательство.** Представим вначале решение $x(t)$ системы (1)–(3) на участке $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in N$, через решение $\bar{x}(t)$ системы по первому приближению (4) в виде

$$x(t_{k+1}) = \bar{x}(t_{k+1}) + \Delta x(t_{k+1}), \tag{44}$$

где $\Delta x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})$.

Вычисляя дискретный оператор Ляпунова в силу (1)–(3) с учетом (41), (42), получаем

$$(\mathcal{L}_1 v_k)(y,h,x) \equiv \boldsymbol{E}_{y,h,x}^{(t_k)} v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, \bar{x}(t_{k+1}) + \Delta x(t_{k+1})) - v_k(y,h,x) \le$$

$$\le (\mathcal{L}_0 v_k)(y,h,x) + c_4 \boldsymbol{E}_{y,h,x}^{(t_k)} |\Delta x(t_{k+1})|^2 \le$$

$$\le -c_3 |x|^2 + c_4 \boldsymbol{E}_{y,h,x}^{(t_k)} \{ |x(t_{k+1}, t_k, y,h,x) - \bar{x}(t_{k+1}, t_k, y,h,x)|^2 \}. \tag{45}$$

Под сильными решениями для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ СДУ (1) и соответственно (1) понимаем случайные процессы [1, 3] с одинаковыми начальными данными $x(t_k) = \bar{x}(t_k) = x$:

$$x(t) = x + \int_{t_k}^{t} [a_0(s, \xi(s), x(s)) + a_1(s, \xi(s), x(s))] ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} [b_0(s, \xi(s), x(s)) + b_1(s, \xi(s), x(s))] dw(s), \tag{46}$$

$$\bar{x}(t) = x + \int_{t_k}^{t} a_0(s, \xi(s), \bar{x}(s)) ds + \int_{t_k}^{t} b_0(s, \xi(s), \bar{x}(s)) dw(s). \tag{47}$$

Образуя разность $x(t)-\bar{x}(t)$, получаем

$$|x(t)-\bar{x}(t)|=\int_{t_k}^{t}|a_0(s,\xi(s),x(s))-a_0(s,\xi(s),\bar{x}(s))|ds+\int_{t_k}^{t}|a_1(s,\xi(s),x(s))|ds+$$

$$+\int_{t_k}^{t}|b_0(s,\xi(s),x(s))-b_0(s,\xi(s),\bar{x}(s))]dw(s)+\int_{t_k}^{t}|b_1(s,\xi(s),x(s))|dw(s). \quad (48)$$

Возведем в квадрат $|a+b+c+d|^2\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ левую и правую части неравенства (48), применим операцию математического ожидания, неравенство Коши–Буняковского для интегралов Римана и свойство математического ожидания для квадрата интеграла Винера–Ито [1]. В результате получим

$$\boldsymbol{E}|x(t)-\bar{x}(t)|^2\le 4\left[\Lambda|t_{k+1}-t_k|^2\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}|x(s)-\bar{x}(s)|^2\,ds+\right.$$

$$\left.+l^2|t_{k+1}-t_k|^2\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}|\bar{x}(s)|^2\,ds+\Lambda\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}|x(s)-\bar{x}(s)|^2\,ds+l^2\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}|\bar{x}(s)|^2\,ds\right]=$$

$$=4\left[\Lambda(\Delta^2+1)\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}|x(s)-\bar{x}(s)|^2\,ds+l^2(\Delta^2+1)\int_{t_k}^{t}\boldsymbol{E}\,|\bar{x}(s)|^2\,ds\right]. \quad (49)$$

Используя неравенство Гронуолла, аналогичными оценками из (47) получим оценку для $\boldsymbol{E}|\bar{x}(t)|^2$:

$$\boldsymbol{E}|\bar{x}(t)|^2\le 12|x|^2\,e^{3l^2(\Delta^2+1)}l^2(\Delta^2+1). \quad (50)$$

Значит, с учетом (50) из неравенства (49), используя неравенство Гронуолла, легко получить следующую оценку:

$$\boldsymbol{E}|x(t)-\bar{x}(t)|^2\le 12|x|^2\,e^{3l^2(\Delta^2+1)\Delta}e^{\Lambda(\Delta^2+1)\Delta}l^2(\Delta^2+1). \quad (51)$$

Далее в момент скачка при условии $x(t_k)=\bar{x}(t_k)=x$ имеем

$$|x(t_{k+1})-\bar{x}(t_{k+1})|^2\le|x(t_{k+1}-)+g_0(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},x(t_{k+1}-))+$$

$$+g_1(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},x(t_{k+1}-))-\bar{x}(t_{k+1})-$$

$$-g_0(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},\bar{x}(t_{k+1}-))|+$$

$$+|g_1(t_{k+1}-,\xi(t_{k+1}-),\eta_{k+1},\bar{x}(t_{k+1}-))|. \quad (52)$$

С учетом (51) можно провести проделанные выше операции, в результате запишем оценку

$$\boldsymbol{E}^{(t_k)}_{y,h,x}\{|x(t_{k+1},t_k,y,h,x)-\bar{x}(t_{k+1},t_k,y,h,x)|^2\}\le$$

$$\le l^2(\Delta^2+1)12\Delta e^{3l^2(\Delta^2+1)\Delta}e^{\Lambda(\Delta^2+1)\Delta}(1+\Delta(1+\Delta+l))|x|^2. \quad (53)$$

Поэтому при достаточно малом $0<l<<1$, учитывая (53), из неравенства (45) следует $\mathcal{L}_1 v_k(y,h,x)\le-\frac{c_3}{2}|x|$, что и доказывает теорему 5.

**МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ**

**Задача 1.** Одномерная линейная система случайной структуры с импульсными марковскими возмущениями запишется в виде СДУ

$$dx(t)=\alpha(\xi(t),x(t))dt+\sigma(\xi(t),x(t))dw(t) \quad (54)$$

с импульсным воздействием

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_1}=g(t_k-,\xi(t_k-),\eta_k,x(t_k-)) \tag{55}$$

и с начальным условием

$$\xi(t_0)=y\in \boldsymbol{Y}\equiv\{1,2,\dots,k\},\ x(t_0)=x_0\in \boldsymbol{R}^1,\ \eta_{k_0}=h, \tag{56}$$

где $x(t)\in \boldsymbol{R}^1$ — сильное решение СДУ (54) с непрерывными реализациями; $\xi(t)$ — простая марковская цепь с конечным числом состояний $Y\equiv\{1,2,\dots,k\}$ и переходными вероятностями (14), (15); $w(t)$ — скалярный винеровский процесс, $\{\eta_k\}$ — дискретная цепь Маркова, для которой $\overline{\boldsymbol{P}}_k(h,\Gamma)$ — переходная вероятность на $k$-м шаге.

Получим достаточные условия устойчивости системы (54)–(56) по вероятности в целом.

**Решение.** Пусть для динамической системы случайной структуры

$$dx(t)=a(t,\xi(t),x(t))dt+b(t,\xi(t),x(t))dw(t) \tag{1$'$}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k}=g(t_k-,\xi(t_k-),\eta_k,x(t_k-)),\ t_k\in S\equiv\{t_n,n\in N\},\ \lim_{n\to\infty}t_n=+\infty \tag{2$'$}$$

и с начальными условиями

$$\xi(t_0)=y\in \boldsymbol{Y},\ x(t_0)=x_0\in \boldsymbol{R}^m,\ \eta_{k_0}=h, \tag{3$'$}$$

выполнены условия:

1) $|t_{k+1}-t_k|\le\Delta, k\ge 0$;

2) условие Липшица

$$|a(t,y,x^{(1)})-a(t,y,x^{(2)})|+|b(t,y,x^{(1)})-b(t,y,x^{(2)})|+$$
$$+|g(t,y,h,x^{(1)})-g(t,y,h,x^{(2)})|\le\Lambda|x^{(1)}-x^{(2)}|;$$

а в силу системы (1$'$)–(3$'$) для последовательности функции Ляпунова $\{v_k,k\ge 0\}$ имеет место $lv_k(y,h,x)\le 0$ для $k\in N$, $y\in \boldsymbol{Y}$, $h\in \boldsymbol{H}$ и $x\in \boldsymbol{R}^m$. Тогда импульсная система (1$'$)–(3$'$) устойчива по вероятности в целом.

Выберем функцию Ляпунова в виде [10]

$$v(\xi(t),\eta_k,x)=\gamma\xi(t)|x|^\beta,\ \gamma>0. \tag{57}$$

Пусть функции $\alpha(i)\equiv\alpha_i$; $\sigma(i)\equiv\sigma_i$ таковы, что

$$\alpha_{\mathrm{i}}-\frac{\sigma_{\mathrm{i}}^2}{2}<-\varepsilon \ \text{ при всех } \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{k}}, \tag{58}$$

тогда в (57)

$$\beta=\varepsilon\sigma^{-2};\ \sigma\equiv\max\{\sigma_i\,|\,i=\overline{1,k}\}. \tag{59}$$

Покажем, каким ограничениям должны удовлетворять переходные вероятности $q_{ij}$ марковской цепи $\xi(t)$ и дискретная цепь Маркова $\{\eta_k\}$, $k\in N$, чтобы выполнялись условия утверждения, т.е. система была устойчива по вероятности в целом, $v$ положительно определена. Оценим $lv$ в силу системы.

Вычислим $\mathcal{L}v$, с помощью (54)–(56) получим

$$\mathcal{L}v(t_k,y,h,x)=\gamma|x|^\beta\left\{\beta_i\left(\alpha_i+\frac{\beta-1}{2}\sigma_i\right)+\sum_{j\ne i}^{k}(j-i)q_{ij}\right\}+$$
$$+\int_{\boldsymbol{H}}\gamma i|x+g(t_k,y,h,x)|^\beta\overline{\boldsymbol{P}}_k(h,dz)-\gamma i|x|^\beta. \tag{60}$$

С учетом (57)–(59) в точке $x, \xi(t) = i$ имеем

$$\mathcal{L}v(t_k, y, h, x) = \gamma |x|^\beta \left[ -\frac{\beta i \varepsilon}{2} + \alpha_i \right] + \\ + i\gamma \left[ \int_{\boldsymbol{H}} |x + g(t_k, y, h, x)|^\beta \overline{\boldsymbol{P}}_k(h, dz) - |x|^\beta \right], \quad (61)$$

где $\alpha_i \equiv \sum_{j>i}^{k} (j - i) q_{ij}, \alpha_k = 0$.

Рассмотрим случай выбора переходной вероятности $\overline{\boldsymbol{P}}_k(h, \Gamma)$ цепи Маркова $\{\eta_k\}$, $k \in N$, с учетом конструкции $g$ в (55) такой, что

$$\int_{\boldsymbol{H}} |x + g(t_k, z, h, x)|^\beta \overline{\boldsymbol{P}}_k(h, dz) = 2|x|^\beta. \quad (62)$$

Тогда правая часть (61) примет вид

$$\mathcal{L}v(t_k, y, h, x) = \gamma |x|^\beta \left[ \frac{-\beta i \varepsilon}{2} + \alpha_i + i \right] = \gamma |x|^\beta \left[ \frac{-i(\beta\varepsilon + 2)}{2} + \alpha_i \right]. \quad (63)$$

Если

$$\alpha_i < \frac{i(\beta\varepsilon + 2)}{2}, \; i = \overline{1, k+1}, \quad (64)$$

и выполняется (62), то функция (57) удовлетворяет условиям утверждения, а именно, $\mathcal{L}v < 0$, следовательно, система (54)–(56) устойчива по вероятности в целом при каждом фиксированном значении $\xi(t) = i$ и выполнении (62).

**Замечание 3.** При $\beta < 1$ функция (57) не имеет производной по $x$ при $x = 0$. Однако этого требовать и не надо, так как для исследования устойчивости важны свойства функции $v$ в любой окрестности точки $x = 0$, но не в самой этой точке. Важным требованием есть существование производной $\mathcal{L}v$ при $x \neq 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$.

**Замечание 4.** Условие (58) означает, что устойчивость по вероятности может быть обеспечена за счет больших значений коэффициента и выполнения условия (62) даже при неустойчивости системы $dx(t) = a_i x(t) dt$.

Установлено в [4], что если СДУ (1) рассматривать не как уравнение Ито, а как уравнение Стратановича, то такой эффект невозможен.

**Задача 2.** Рассмотрим систему случайной структуры (54)–(56). Найдем ограничения на переходные вероятности $q_{ij}$ процесса $\xi(t)$ и на переходную вероятность $\overline{\boldsymbol{P}}_k(h, \Gamma)$ на $k$-м шаге дискретной цепи Маркова $\{\eta_k\}$, $k \in N$.

**Решение.** Берем функцию Ляпунова [10] в виде

$$v(x, i) = c_i |x|^\beta, \; \beta = \varepsilon\sigma^{-2}. \quad (65)$$

Вместо условия (64) предположим, что матрица переходных вероятностей марковской цепи $\xi(t)$ симметрична:

$$q_{ij} = q_{ji}, \; i, j = \overline{1, k}; \; i \neq j. \quad (66)$$

Оценим $\mathcal{L}v$ в точке $(x, i)$ при выполнении (62). Имеем

$$(\mathcal{L}v)(x, i) = |x|^\beta \left\{ \beta c_i \left( \alpha_i + \frac{\beta - 1}{2} \sigma_i + 1 \right) + \sum_{j \neq i}^{k} (c_j - c_i) q_{ij} \right\}. \quad (67)$$

Условие симметричности (66) дает

$$\sum_{j \neq i}^{k} (c_j - c_i) q_{ij} = \sum_{j \neq i}^{k} c_j q_{ji} - q_{ij} c_i, \quad (68)$$

где $q_i = \sum_{j \neq i}^{k} q_{ij}$. Предположим, что $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_k(t))$, где $p_i(t) \equiv \equiv \boldsymbol{P}\{y(t) = y_i \mid \xi(0)\}$. Тогда $p_i(t)$ удовлетворяет прямой системе дифференциальных уравнений Колмогорова [11]

$$\frac{dp_i}{dt} = -q_i p_i + \sum_{j \neq i}^{k} q_{ji} p_j . \tag{69}$$

Если $q_{ij} \neq 0$, то система (69) имеет стационарное решение $p_i^* = \text{const}$, которое следует из уравнений

$$\sum_{j \neq i}^{k} q_{ji} p_j - q_i p_i = 0. \tag{70}$$

Это стационарное решение $p_i^*$ удовлетворяет условиям $p_i^* > 0$ и $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$. Далее, полагая $c_i = p_i^*$, с учетом (58), (62) и (65) получаем

$$(\mathcal{L}v)(x, i) \leq -\frac{(\beta+1)p_i^* \varepsilon}{2} |x|^\beta < 0,$$

а это означает, что достаточными условиями устойчивости по вероятности в целом системы (54)–(56) являются условия (58), (62) и (66).

**Задача 3.** Рассмотрим стохастический осциллятор с импульсными возмущениями. Пусть импульсная система описывается дифференциальным уравнением [2, с. 209]

$$\ddot{x}(t) + 2\varepsilon\delta(\xi(y)\dot{x}(t) + (1+\varepsilon f(\xi(t))) = 0, \tag{71}$$

где $\varepsilon > 0$, $\xi(t)$ — однородный неразложимый марковский процесс с двумя состояниями $Y \equiv \{0, 1\}$ и инфинитезимальная матрица $A \equiv \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$, $\alpha + \beta = 1$.

Импульсные возмущения задаются уравнением для скачков

$$x(t_k) = B(\eta_k) x(t_k -), \tag{72}$$

где $t_k = k\Delta$, $\Delta \neq 2\pi n$; $\forall n \in N$, $\{\eta_k; k \in N\}$ — марковская цепь, заданная на множестве $H = \{1, 2\}$ с помощью матрицы переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \; p \in (0, 1); \; q \in (0, 1); \quad B(h) = I + \varepsilon B_1(h).$$

Условием экспоненциальной устойчивости тривиального решения уравнения (71) является условие [12]

$$-(\delta(1)\beta + \delta(2)\alpha)(1 - p + q) + q(b_{11}(1) + b_{22}(1)) + (1-p)(b_{11}(2) + b_{22}(2)) < 0. \tag{73}$$

Заметим, что (71) — частный случай системы случайной структуры

$$\mathrm{dx(t) = a(t, \xi(t), x(t))dt + b(t, \xi(t), x(t))dw(t)}$$

с $b \equiv 0$.

**Задача 4.** Рассмотрим задачу о вероятностной устойчивости электрической схемы [10] (рис. 1), которая описывается системой

$$\begin{aligned} &(L_1 + \xi(t)L_2)\frac{di_1}{dt} + (r_1 + \xi(t)r_2)i_1 = U; \\ &(L_2 + \xi(t)L_1)\frac{di_2}{dt} + (r_2 + \xi(t)r_1)i_2 = \xi(t)U. \end{aligned} \tag{74}$$

Здесь $\tilde{i}_1(t), \tilde{i}_2(t)$ — установившийся режим в цепи (см. рис. 1). Положив $x_1^{(t)} \equiv \equiv i_1(t) - \tilde{i}_1(t)$, $x_2^{(t)} \equiv i_2(t) - \tilde{i}_2(t)$, уравнение (74) запишем так:

$$dx(t) = A(\xi(t))x(t)dt, \tag{75}$$

где $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$; $A(\xi(t)) \equiv -\begin{bmatrix} \dfrac{r_1 + \xi(t) r_2}{L_1 + L_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_2 + \xi(t) r_1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix}$, $\xi(t)$ — простая марковская цепь с двумя состояниями $\xi_1 = 0$ ( ключ замкнут) и $\xi_2 = 1$ (ключ разомкнут) и интенсивностями переходов $q_{12}, q_{21}$.

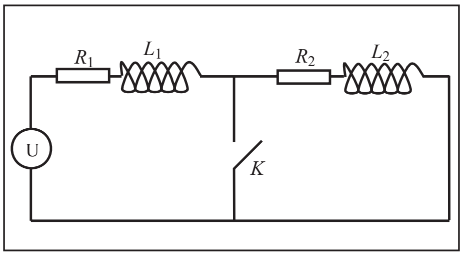


*Рис. 1*

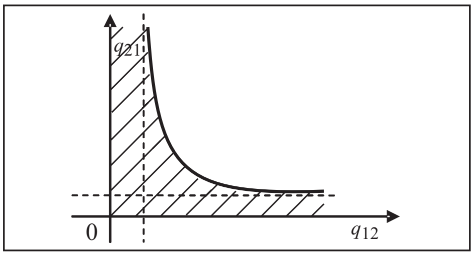


*Рис. 2*

Условие коммутации следует записать в виде

$$x(\tau) = K_{ij} x(\tau - 0),$$

где $K_{12} = \dfrac{1}{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix}$; $K_{21} = E$.

Проверка условий теоремы 2 позволяет выписать на плоскости $(q_{12}, q_{21})$ достаточные условия устойчивости по вероятности в целом неравенствами

$$(c-1)^2 q_{12} q_{21} < 2b(c+1)(q_{12} + 2q_{21}) + 8b > 0; \;\; q_{12} > 0, \;\; q_{21} > 0.$$

Заметим, что область устойчивости по вероятности может оказаться шире изображенной на рис. 2 [10] . Это объясняется тем, что использованы достаточные условия вероятностной устойчивости. Вопрос о необходимых условиях, по-видимому, остается открытым [10].

В указанной области (см. рис. 2) имеет место экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ж а к о д Ж., Ш и р я е в А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. — М.: Физматизд., 1994. — Т. 1. — 544 с.; Т. 2. — 473 с.
2. С в е р д а н М. Л., Ц а р ь к о в Е. Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. — Рига: РТУ, 1994. — 300 с.
3. С к о р о х о д А. В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 328 с.
4. Х а с ь м и н с к и й Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях от параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
5. Н е в е л ь с о н М. Б., Х а с ь м и н с к и й Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.
6. Д ы н к и н Е. Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз., 1963. — 859 с.
7. K o r o l y u k V. S. Averaging and stability of dynamical system with rapid Markov switchings. — Univ. of Umea, s-90167, Umea, 1991. — Febr. — 15 p.
8. M o r o z a n T. Stability and control of linear Discrete-time systems with jump Markov Distrurbances // Rev. Roun. Math Pures et Appl. — 1981. — **26,** N 1. — P. 101–120.
9. T s a r k o v Y e. Averaging in dynamical systems with Markov jumps // Just of Dynamic. System. — 1993. — N 282. — 41 p.
10. К а ц И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Изд-во Уральск. госакадемии путей сообщения, 1998. — 222 с.
11. Д у б Д ж. Л. Вероятностные процессы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 605 с.
12. Р о г о л ь С. Л., Я с и н с к и й В. К. Анализ экспоненциальной устойчивости линейного стохастического осциллятора при малых диффузионных возмущениях // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 63–72.



*Поступила 04.12.2007*