УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО

СУММА ДИСКРЕТНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ С НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ СЛАГАЕМЫХ

Аннотация. Исследуется операция сложения дискретных нечетких чисел с нечетким множеством индексов слагаемых как обобщение операции суммы с четким множеством операндов. Показано, что результатом этой операции является нечеткое множество типа-2 (НМТ-2). Построена функция принадлежности типа-2 этого множества. Введено понятие НМТ-2 суммы дискретных чисел с нечетким множеством индексов слагаемых. НМТ-2 суммы может быть декомпозировано по вторичным степеням принадлежности на набор соответствующих дискретных нечетких чисел. Это помогает представить результирующее НМТ-2 в удобной для понимания и применения форме. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: нечеткое число, дискретное нечеткое число, нечеткое множество.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных понятий теории нечетких множеств являются нечеткие числа (НЧ). В работе [1] дано понятие НЧ относительно свойств случайных функций. Позже, в 1976 г., в [2] развита теория нечеткой арифметики. В [3] введено понятие НЧ как нормального и выпуклого нечеткого множества числовой оси. Согласно [4] НЧ определено как нормальное нечеткое множество на числовой прямой с полунепрерывной сверху функцией и квазивогнутой функцией принадлежности (ФП). В [5] определен особый тип НЧ на множестве с конечным носителем — дискретное нечеткое число (ДНЧ). В [6] показано, что при «обычном» сложении двух ДНЧ не сохраняется замкнутость операции, поэтому предложен новый вид операции сложения, который лишен этого недостатка. Поскольку НЧ более конкретно изображают физический мир, чем обычные числа, они широко используются в компьютерных науках [7, 8].

Концепция математических операций с нечетким множеством операндов впервые была изложена в [9] для пересечения и объединения нечетких множеств. Было показано, что результатом такой операции является нечеткое множество типа-2. В [10] предложен декомпозиционный подход для реализации этой операции. Обобщение операции суммы «непрерывных» НЧ для нечеткого множества операндов дано в [11]. Настоящая статья продолжает эти исследования для ДНЧ.

ДИСКРЕТНЫЕ НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Нормальное нечеткое множество V на числовой прямой $\mathbb{R}$ с ограниченным носителем называется НЧ [4], если его ФП $\mu_V(x)$, $x \in \mathbb{R}$, полунепрерывна сверху и квазивогнута. Известны два определения операции сложения. Согласно принципу расширения Заде [12] суммой двух НЧ V и W с ФП соответственно $\mu_V(x)$ и $\mu_W(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется НЧ $V+W$ с ФП:

$$\mu_{V+W}(z) = \sup_{x,y \in \mathbb{R}: x+y=z} \min\{\mu_V(x), \mu_W(y)\}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Второе определение использует представление нечеткого множества (НМ) его сечениями. Нечеткое множество V (в частности, НЧ) на $\mathbb{R}$ можно представить в виде $V = \{(V(u), u) : u \in [0,1]\}$, где $(V(u), u)$ — нечеткое множество на $\mathbb{R}$ с ФП

$\mu_{(V(u),u)}(x) = u$ для $x \in V(u)$ и ФП $\mu_{(V(u),u)}(x) = 0$ для $x \notin V(u)$. Здесь четкое множество $V(u) = \{x \in \mathbb{R}: \mu_V(x) \geq u\}$ является сечением уровня $u \in [0,1]$ НЧ V. Согласно определению ФП нечеткое число $V+W$ суммы двух НЧ V и W имеет вид

$$\mu_{V+W}(z) = \sup\{u \in [0,1]: z \in (V+W)(u)\}, \ z \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $(V+W)(u) = V(u) + W(u) = \{x+y: x \in V(u),\ y \in W(u)\}$ и $W(u) = \{x \in \mathbb{R}: \mu_W(x) \geq \geq u\}$ — сечения уровня $u \in [0,1]$ НЧ соответственно $V+W$ и W.

Аналогично было введено понятие ДНЧ в [5]. Нечеткое множество V на числовой прямой $\mathbb{R}$ с ФП $\mu_V(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется ДНЧ, если его носитель является конечным (т.е. $\operatorname{supp}(V) = \{x_1, \ldots, x_m\}$), где $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ при условии $x_1 < \ldots < x_m$, а также существуют такие натуральные числа $s, t \in \mathbb{N}$ $(1 \leq s \leq t \leq m)$, что выполняются условия:

1) $\mu_V(x_i) = 1$ для любого $i \in [s,t]$, $i \in \mathbb{N}$;
2) если $i < j < s$ $(i, j \in \mathbb{N})$, то $0 < \mu_V(x_i) \leq \mu_V(x_j) < 1$;
3) если $q < p < t$ $(p, q \in \mathbb{N})$, то $1 > \mu_V(x_p) \geq \mu_V(x_q) > 0$.

Если рассматривать ДНЧ V и W как НЧ на $\mathbb{R}$, то возникает предположение, что можно применить операцию сложения «непрерывных» НЧ, используя формулы (1) или (2). Однако в [6] показано, что результат не всегда может быть ДНЧ. Например, для ДНЧ $V = \{(1;0,3), (2;1), (3;0,5)\}$ и $W = \{(4;0,4), (6;1), (8;0,8)\}$, получаемое с помощью (1) или (2), нечеткое множество суммы $V+W = \{(5;0,3); (6;0,4), (7;0,4), (8;1), (9;0,5), (10;0,8), (11;0,5)$ не является ДНЧ. В [13] показано, что операция сложения «непрерывных» НЧ может использоваться для ДНЧ только в случае, когда носители ДНЧ являются конечными подмножествами натуральных чисел и каждый из этих носителей является набором членов арифметической прогрессии с постоянной общей разностью (в частности, эти носители могут быть конечными наборами последовательных натуральных чисел). Для преодоления этого недостатка в работе [6] предложен метод, использующий представление нечеткого множества суммы с помощью его дискретных сечений. Согласно этому подходу функция принадлежности ДНЧ $V+W$ на числовой оси $\mathbb{R}$ примет вид $\mu_{V+W}(z) = \max\{u \in [0,1]: z \in (V+W)(u)\}$, $z \in \operatorname{supp}(V+W) = \operatorname{supp}(V) + \operatorname{supp}(W) = \{x+y: x \in \operatorname{supp}(V),\ y \in \operatorname{supp}(W)\}$, где $(V+W)(u) = \{x+y: x^B + y^B \leq x+y \leq x^T + y^T;\ x^B, x^T \in V(u);\ y^B, y^T \in W(u);\ x \in \operatorname{supp}(V),\ y \in \operatorname{supp}(W)\}$ — дискретное сечение суммы уровня $u \in [0,1]$, где x^B, y^B и x^T, y^T — переменные нижних и верхних границ соответственно.

Пусть на числовой оси $\mathbb{R}$ заданы ДНЧ F_j с ФП $\mu_{F_j}(x_j)$, $j \in N$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество их индексов, $n \geq 2$ — их количество. Обозначим $X_j = \operatorname{supp}(F_j)$ носитель и $F_j(u) = \{x_j \in X_j : \mu_{F_j}(x_j) \geq u\}$ — множество сечения уровня u, $u \in (0,1]$ ДНЧ F_j, $j \in N$.

Замечание 1. Пусть $U = \{\mu_{F_j}(x_j): x_j \in X_j, j \in N\}$ — множество значений степеней принадлежности ДНЧ F_j, $j \in N$. Чтобы получить различные сечения $F_j(u)$, $j \in N$, следует заменить условие $u \in (0,1]$ условием $u \in U$. Тогда $F_j(u^{\min}) = X_j$, $j \in N$, где $u^{\min} = \min\limits_{u \in U} u$.

Обобщим операцию сложения ДНЧ для произвольного множества индексов слагаемых $K \subseteq N$. Рассмотрим сумму $\Sigma_K = \sum\limits_{j \in K} F_j$ ДНЧ F_j, $j \in K$, согласно [6].

Обозначим дискретное сечение суммы Σ_K уровня $u \in U$:

$$\Sigma_K(u) = \left\{ \sum_{j \in K} x_j : \sum_{j \in K} x_j^B \le \sum_{j \in K} x_j \le \sum_{j \in K} x_j^T ; x_j^T, x_j^B \in F_j(u), x_j \in X_j, j \in K \right\}. \quad (3)$$

Тогда ДНЧ $\Sigma_K = \{(z, \mu_{\Sigma_K}(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ имеет ФП

$$\mu_{\Sigma_K}(z) = \max\{u \in U : z \in \Sigma_K(u)\}, \quad (4)$$

$$z \in \operatorname{supp}(\Sigma_K) = \sum_{j \in K} \operatorname{supp}(F_j) = \left\{ \sum_{j \in K} x_j : x_j \in X_j, j \in K \right\}. \quad (5)$$

Далее целесообразно использовать формулу (4) в другом виде. Для каждого $z \in \mathbb{R}$ рассмотрим многозначное отображение $U_z : 2^N \to [0,1]$, где

$$U_z(K) = \{u \in U \subset (0,1] : z \in \Sigma_K(u)\}. \quad (6)$$

Отметим, что $\forall u \in U$ в случае $z \notin \Sigma_K(u)$ полагаем $U_z(K) = \varnothing$. Отображение U_z сопоставляет каждому подмножеству индексов слагаемых $K \subseteq N$ множество $U_z(K)$ всех возможных значений уровней $u \in U$ дискретных сечений суммы $\Sigma_K(u)$, которые содержат значение $z \in \mathbb{R}$. Тогда сумма $\Sigma_K = \sum_{j \in K} F_j$ представляет собой ДНЧ $\Sigma_K = \{(z, \mu_{\Sigma_K}(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ с ФП

$$\mu_{\Sigma_K}(z) = \max\{u \in U : u \in U_z(K)\},\ z \in \operatorname{supp}(\Sigma_K) = \{z \in \mathbb{R} : U_z(K) \ne \varnothing\}.$$

В частности, при $K = N$ сумма $\Sigma_N = \sum_{j \in N} F_j$ представляет дискретное нечеткое число $\Sigma_N = \{(z, \mu_{\Sigma_N}(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ с ФП

$$\mu_{\Sigma_N}(z) = \max\{u \in U : u \in U_z(N)\},\ z \in \operatorname{supp}(\Sigma_N) = \{z \in \mathbb{R} : U_z(N) \ne \varnothing\}. \quad (7)$$

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОСНОВНАЯ ИДЕЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть на числовой оси $\mathbb{R}$ заданы ДНЧ F_j, $j \in N$, с соответствующими ФП $\mu_{F_j}(x_j)$ и носителями $X_j = \operatorname{supp}(F_j)$, $j \in N$. Пусть также $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ — некоторое нечеткое множество на множестве индексов слагаемых N с ФП $\mu_I(j)$, $j \in N$. Возникает вопрос: что представляет собой сумма ДНЧ F_j, $j \in N$, если эти числа использовать в операции сложения с соответственными степенями принадлежности $\mu_I(j)$, $j \in N$. Обозначим эту операцию $\sum_{(j, \mu_I(j)) \in I} F_j$.

Естественное обобщение операции суммы $\Sigma_N = \sum_{j \in N} F_j$ при нечетком множестве I слагаемых приводит к тому, что множество $\sum_{(j, \mu_I(j)) \in I} F_j$ будет иметь ФП, подобную (7). Отличие состоит в том, что для каждого фиксированного $z \in z^*$ в формуле (7) вместо четкого множества $U_{z^*}(N)$ имеется образ $U_{z^*}(I)$ нечеткого множества I. Согласно принципу обобщения Заде [12] образом I при отображении $U_{z^*} : 2^N \to [0,1]$ (см. (6)) является нечеткое множество $U_{z^*}(I) =$ $= \{(u, \mu_{U_{z^*}(I)}(u)) : u \in U\}$ с ФП $\mu_{U_{z^*}(I)}(u) = \max\{\alpha \in [0,1] : u \in U_{z^*}(I(\alpha))\}$, $u \in U$, где

$$I(\alpha) = \{j \in N : \mu(j) \ge \alpha\} \quad (8)$$

— сечение уровня $\alpha \in [0,1]$ нечеткого множества $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ индексов слагаемых;

$$U_{z^*}(I(\alpha)) = \{u \in U : z^* \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)\}$$

— образ сечения $I(\alpha)$ уровня $\alpha \in [0,1]$ нечеткого множества I индексов слагаемых при отображении U_{z^*}(см. (6)). Четкое множество $U_{z^*}(I(\alpha))$ содержит значения $u \in U$ всех тех уровней дискретных сечений суммы $\Sigma_{I(\alpha)}(u)$ (см. (3)), которые содержат z^* .

Замечание 2. Пусть A — множество значений степеней принадлежности $\mu_I(j), j \in N$, нечеткого множества $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ индексов слагаемых. Поскольку степени принадлежности различных индексов слагаемых могут совпадать, то мощность $|A| \le n$. Очевидно, что для получения различных сечений $I(\alpha) = \{j \in N : \mu_I(j) \ge \alpha\} \ne \varnothing$ нечеткого множества I следует заменить условие $\alpha \in [0,1]$ условием $\alpha \in A$. Назовем $I(\alpha)$ множеством индексов слагаемых уровня α.

Таким образом, в случае нечеткого множества I индексов слагаемых формула (7) (которая определяет ФП суммы ДНЧ с четким множеством слагаемых N) при фиксированном значении $z^* \in \mathbb{R}$ примет вид задачи нечеткого математического программирования:

$$M_\Sigma(z^*) = \max\{u \in U : (u, \mu_{U_{z^*}(I)}(u)) \in U_{z^*}(I)\}. \tag{9}$$

Суть (9) заключается в максимизации (в некотором смысле) значения u на нечетком множестве $U_{z^*}(I)$. Задачи нечеткого математического программирования достаточно хорошо изучены. Найдем решение этой задачи. Пусть

$$M_{I(\alpha)}(z^*) = \max\{u \in U : u \in U_{z^*}(I(\alpha))\} \tag{10}$$

— максимальное значение $u \in U$ на сечении $U_{z^*}(I(\alpha)) \ne \varnothing$ уровня $\alpha \in A$ нечеткого множества допустимых альтернатив $U_{z^*}(I)$. Согласно [14] нечеткое множество максимальных значений

$$M_\Sigma(z^*) = \{(u, \mu_{M_\Sigma(z^*)}) : u \in U\} \tag{11}$$

задается в виде $M_\Sigma(z^*) = \{(M_{I(\alpha)}(z^*), \alpha) : \alpha \in A\}$ и имеет ФП

$$\mu_{M_\Sigma(z^*)}(u) = \max\{\alpha \in A : u = M_{I(\alpha)}(z^*)\}, \tag{12}$$

$$u \in \operatorname{supp}(M_\Sigma(z^*)) = \{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\}. \tag{13}$$

Сформулируем условия, при которых носитель множества $M_\Sigma(z^*)$ непустой.

Утверждение 1. Множество $\operatorname{supp}(M_\Sigma(z^*)) \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда $z^* \in Z$, где

$$Z = \left\{ \sum_{j \in I(\alpha)} x_j : x_j \in X_j, j \in I(\alpha); \alpha \in A \right\}. \tag{14}$$

Доказательство. Предположим, что $\{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\} \ne \varnothing$. Тогда согласно (10) и (13) $\exists \alpha \in A$, для которого $U_{z^*}(I(\alpha)) \ne \varnothing$. Отсюда и из (6) при $K = I(\alpha)$ следует, что $\exists u \in U$, для которого $z^* \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)$. Следовательно, согласно (3) для $\forall j \in I(\alpha)$ существует $x_j^* \in X_j$, что $z^* = \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^*$. Поэтому из (14) получим $z^* \in Z$.

И наоборот. Пусть $z^* \in Z$. Тогда согласно (14) $\exists \alpha \in A$ и для $\forall j \in I(\alpha)$ $\exists x_j^* \in X_j$, что $z^* = \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^*$. Поэтому согласно (3) при $K = I(\alpha)$ существует $u \in U$ (например, $u^{\min} = \min_{u \in U} u$ ввиду замечания 1), для которого $z^* \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)$. Отсюда и из (6) при $K = I(\alpha)$ получим $U_{z^*}(I(\alpha)) \ne \varnothing$. Поскольку множество U конечно в силу замечания 1, то в задаче (10) существует максимум $M_{I(\alpha)}(z^*)$ и тогда $\{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\} \ne \varnothing$.

Утверждение доказано.

Замечание 3. Будем рассматривать только те значения $z^* \in \mathbb{R}$, для которых существует набор слагаемых с суммой z^*. Лишь в этом случае на основании утверждения 1 нечеткое множество $M_\Sigma(z^*)$ максимумов задачи (9) не будет пустым. Поэтому далее будем рассматривать только значения $z^* \in Z$. Назовем множество Z (формула (14)) областью определения суммы Σ с нечетким множеством слагаемых.

Функция принадлежности (12) нечеткого множества $M_\Sigma(z^*)$ максимумов задачи (9) достаточно сложна для использования, поэтому представим ее в более удобном виде. Обозначим $\Sigma_{I(\alpha)} = \{z, \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z)) : z \in Z\}$ дискретное нечеткое число на Z с ФП

$$\mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z) = \\ = \max\{u \in U : z \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)\},\ z \in \operatorname{supp}(\Sigma_{I(\alpha)}) = \left\{ \sum_{j \in I(\alpha)} x_j : x_j \in X_j,\ j \in I(\alpha) \right\}, \tag{15}$$

где

$$\Sigma_{I(\alpha)}(u) = \\ = \left\{ \sum_{j \in I(\alpha)} x_j : \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^B \le \sum_{j \in I(\alpha)} x_j \le \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^T;\ x_j^T, x_j^B \in F_j(u),\ x_j \in X_j,\ j \in I(\alpha) \right\}$$

— дискретное сечение суммы уровня u (см. (3) при $K = I(\alpha)$). Из (4) и (5) следует, что ДНЧ $\Sigma_{I(\alpha)}$ равно сумме F_j с индексами j из множества слагаемых $I(\alpha)$ уровня α. Значение $\Sigma_{I(\alpha)} = \sum_{j \in I(\alpha)} F_j$ назовем суммой уровня $\alpha \in A$. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для фиксированного значения $z^* \in Z$ ФП нечеткого множества $M_\Sigma(z^*) = \{(u, \mu_{M_\Sigma(z^*)}(u)) : u \in U \subset [0,1]\}$ имеет вид

$$\mu_{M_\Sigma(z^*)}(u) = \max\{\alpha \in A : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*)\},\ u \in \operatorname{supp}(M_\Sigma(z^*)), \tag{16}$$

где носитель нечеткого множества $M_\Sigma(z^*)$ задается формулой

$$\operatorname{supp}(M_\Sigma(z^*)) = \{u \in U \subset [0,1] : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}. \tag{17}$$

Доказательство. Поскольку $z^* \in Z$, то из утверждения 1 следует $\operatorname{supp}(M_\Sigma(z^*)) \ne \varnothing$. Вначале докажем равенство (17). Для этого с учетом (13) достаточно показать, что $\{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\} = \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}$. Рассмотрим включение $\{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\} \supseteq \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}$. Пусть $u' \in \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}$. Предположим противное, что $u' \notin \{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\}$. Тогда $u' \ne M_{I(\alpha)}(z^*)$ для любого $\alpha \in A$. Отсюда и из (10) получим $u' \ne \max\{u \in U : u \in U_{z^*}(I(\alpha))\}$ для любого $\alpha \in A$. Тогда на основании (6) при $K = I(\alpha)$ и (15) $u' \ne \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*)$ для любого $\alpha \in A$. Получили противоречие.

Докажем включение $\{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\} \subseteq \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}$. Пусть $u' \in \{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\}$. Предположим противное, что $u' \notin \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*), \alpha \in A\}$. Тогда $\forall \alpha \in A\ u' \ne \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*)$. Отсюда и из (6) при $K = I(\alpha)$ и (15) получим $u' \ne \max\{u \in U : u \in U_{z^*}(I(\alpha))\}$. Поэтому согласно (10) $u' \notin \{M_{I(\alpha)}(z^*) : \alpha \in A\}$. Получили противоречие.

Далее докажем формулу (16). Для любого $\alpha \in A$ при $K = I(\alpha)$ из (6) следует отношение $u \in U_{z^*}(I(\alpha)) \Leftrightarrow z^* \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)$, из которого с учетом (10) и (15) вытекает $M_{I(\alpha)}(z^*) = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*)$.

В результате из (12) получим (16).

Теорема 1 доказана.

Таким образом, согласно (9) $M_\Sigma(z)$ — является функцией принадлежности суммы $\Sigma = \sum_{(j,\mu_I(j))\in I} F_j$ ДНЧ F_j, $j \in N$, с нечетким множеством $I = \{(j, \mu_I(j))$: $j \in N\}$ индексов слагаемых. Однако согласно теореме 1 для фиксированных $z^* \in Z$ значения $M_\Sigma(z^*)$ образовывают нечеткие множества на $U \subset [0,1]$ с ФП $\mu_{M_\Sigma(z^*)}(u)$. Из этого следует, что Σ — это нечеткое множество на $Z \subset \mathbb{R}$ с ФП, значения которой образуют нечеткие множества. Таким образом, согласно исследованиям, приведенным в работе [15], Σ представляет нечеткое множество типа-2 (НМТ-2). В «манере вертикальных срезов» [16] НМТ-2 суммы Σ на $Z \subset \mathbb{R}$ имеет вид

$$\Sigma = \{(z, M_\Sigma(z)): z \in Z\} = \{(z, \{(u, \mu_{M_\Sigma(z)}(u)): u \in J_z\}): z \in Z\},$$

где $\mu_{M_\Sigma(z)}(u)$, $u \in \mathrm{supp}(M_\Sigma(z))$, — ФП нечеткого множества $M_\Sigma(z) = \{(u, \mu_{M_\Sigma(z)}(u)): u \in U\}$ (см. (11)) значений нечеткой степени принадлежности элемента $z \in Z$ НМТ-2 суммы Σ, а $J_z = \mathrm{supp}(M_\Sigma(z))$ — множество первичных степеней принадлежности. Согласно [16, 17] НМТ-2 Σ на $Z \subset \mathbb{R}$ можно также характеризовать как ФП типа-2 (ФПТ-2) $\mu_\Sigma(z,u) = \mu_{M_\Sigma(z)}(u), u \in J_z$, и $\mu_\Sigma(z,u) = 0$, $u \neq J_z$. Тогда $\Sigma = \{((z,u), \mu_\Sigma(z,u)): u \in [0,1],\ z \in Z\}$. Такое представление будем использовать далее.

СУММА НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Определение 1. Пусть на числовой оси $\mathbb{R}$ заданы ДНЧ F_j, $j \in N$, с соответствующими ФП $\mu_{F_j}(x_j)$ и носителями $X_j = \mathrm{supp}(F_j)$, $j \in N$. Также задано $I = \{(j, \mu_I(j)): j \in N\}$ — нечеткое множество на множестве индексов слагаемых N с ФП $\mu_I(j)$, $j \in N$. Суммой $\sum_{(j,\mu_I(j))\in I} F_j$ ДНЧ F_j, $j \in N$, с нечетким множеством I индексов слагаемых назовем НМТ-2

$$\Sigma = \{((z,u), \mu_\Sigma(z,u)): u \in [0,1], z \in Z\} \text{ на } Z = \left\{ \sum_{j\in I(\alpha)} x_j : x_j \in X_j, j \in I(\alpha), \alpha \in A \right\}$$

(см. (14)) с ФПТ-2

$$\mu_\Sigma(z,u) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha\in A}\{\alpha : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z)\}, & y \in J_z, \\ 0, & y \notin J_z, \end{cases} \tag{18}$$

где согласно (8) $I(\alpha) = \{j \in N : \mu_I(j) \geq \alpha\}$ — множество индексов слагаемых уровня α, $\alpha \in A$.

В этом определении также используем следующие обозначения:

$$J_z = \{u \in U : u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z), \alpha \in A\} \subset [0,1] \tag{19}$$

— множество первичных степеней принадлежности $u \in U$ со строго положительными вторичными оценками $\mu_\Sigma(z,u)$, которое совпадает с носителем $\mathrm{supp}(M_\Sigma(z))$ (см. (17)) нечеткого множества $M_\Sigma(z)$ значений максимума (9), $z \in Z$;

$$\Sigma_{I(\alpha)} = \{(z, \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z)): z \in Z\} \tag{20}$$

– ДНЧ, равное сумме F_j с индексами j из множества $I(\alpha)$ слагаемых уровня $\alpha \in A$ (т.е. $\Sigma_{I(\alpha)} = \sum_{j\in I(\alpha)} F_j$) с ФП $\mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z) = \max\{u \in U : z \in \Sigma_{I(\alpha)}(u)\}$, $z \in \mathrm{supp}(\Sigma_{I(\alpha)})$ (см. (15));

$$\operatorname{supp}(\Sigma_{I(\alpha)}) = \left\{ \sum_{j \in I(\alpha)} x_j : x_j \in X_j, j \in I(\alpha) \right\} \tag{21}$$

— носитель ДНЧ $\Sigma_{I(\alpha)}$ (см. (15));

$$\Sigma_{I(\alpha)}(u) =$$

$$= \left\{ \sum_{j \in I(\alpha)} x_j : \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^B \le \sum_{j \in I(\alpha)} x_j \le \sum_{j \in I(\alpha)} x_j^T ; x_j^B, x_j^T \in F_j(u), x_j \in X_j, j \in I(\alpha) \right\} \tag{22}$$

— дискретное сечение суммы $\Sigma_{I(\alpha)} = \sum_{j \in I(\alpha)} F_j$ уровня $u \in U$ (см. (3) при $K = I(\alpha)$, $\alpha \in A$;

$$F_j(u) = \{x_j \in X_j : \mu_{F_j}(x_j) \ge u\} \tag{23}$$

— сечение уровня $u \in U$ ДНЧ $F_j, j \in N$;

$$U = \{\mu_{F_j}(x_j) : x_j \in X_j, j \in N\} \tag{24}$$

— множество значений степеней принадлежности ДНЧ F_j, $j \in N$ (см. замечание 1);

$$A = \{\mu_I(j) : j \in N\} \tag{25}$$

— множество значений $\mu_I(j)$, $j \in N$, степеней принадлежности нечеткого множества $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ индексов слагаемых (см. замечание 2).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий определение 1.

Пример 1. Пусть на числовой оси $\mathbb{R}$ заданы ДНЧ $F_1 = \{(1; 0,3), (2; 1), (3; 0,5)\}$ («приблизительно» 2) и $F_2 = \{(4; 0,4), (6; 1), (8; 0,8)\}$ («четное число около 6») с носителями соответственно $X_1 = \{1, 2, 3\}$ и $X_2 = \{4, 6, 8\}$. Найдем сумму ДНЧ F_1 и F_2 с нечетким множеством $I = \{(1; 0,8), (2; 0,6)\}$ индексов слагаемых. Областью определения этой суммы является множество $Z = \{1, 2, 3\} \cup \{5, \ldots, 11\}$ (см. (14)).

С помощью (25) определим множество $A = \{0,6; 0,8\}$ значений степеней принадлежности нечеткого множества $I = \{(1; 0,8), (2; 0,6)\}$ индексов слагаемых. Используя (8), построим сечение нечеткого множества $I(0,8) = \{1\}$ уровня $\alpha = \mu_I(1) = 0,8$.

Согласно (15) вычислим значения ФП $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(z)$ дискретного нечеткого множества $\Sigma_{I(0,8)} = \{(z, \mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(z)) : z \in Z\}$, равного сумме ДНЧ с индексами слагаемых из множества $I(0,8) = \{1\}$. Поскольку

$$\Sigma_{I(0,8)} = F_1, \tag{26}$$

то очевидно, что $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(z) = \mu_{F_1}(x_1)$ и $z = x_1$ для $z \in \operatorname{supp}(\Sigma_{I(0,8)}) = \operatorname{supp}(F_1) = X_1 = \{1, 2, 3\}$. Отсюда $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(1) = 0,3$; $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(2) = 1$; $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(3) = 0,5$ и $\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(z) = 0$ для $z \in Z \setminus \operatorname{supp}(\Sigma_{I(0,8)}) = \{5, \ldots, 11\}$.

Далее согласно (8) построим сечение $I(0,6) = \{1, 2\}$ уровня $\alpha = \mu_I(2) = 0,6$ нечеткого множества индексов слагаемых I. При этом необходимо найти значения ФП $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(z)$ ДНЧ $\Sigma_{I(0,6)} = \{(z, \mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(z)) : z \in Z\}$, равного сумме ДНЧ с индексами слагаемых из множества $I(0,6) = \{1, 2\}$, т.е.

$$\Sigma_{I(0,6)} = F_1 + F_2. \tag{27}$$

Согласно (21) носитель $\operatorname{supp}(\Sigma_{I(0,6)}) = \left\{ \sum_{j \in I(0,6)} x_j : x_j \in X_j, j \in I(0,6) \right\} =$ $= \{x_1 + x_2 : x_1 \in \{1,2,3\}, x_2 \in \{4,6,8\}\} = \{5, \ldots, 11\}$. На основании формулы (24) построим $U = \{0,3; 0,4; 0,5; 0,8; 1\}$ — множество значений степеней принадлежности ДНЧ F_1 и F_2. Для каждого значения $u \in U$, используя (23), вычислим сечения уровня u ДНЧ F_1 и F_2: $F_1(0,3) = \{1,2,3\}$, $F_2(0,3) = \{4,6,8\}$, $F_1(0,4) = \{2,3\}$, $F_2(0,4) = \{4,6,8\}$, $F_1(0,5) = \{2,3\}$, $F_2(0,5) = \{6,8\}$, $F_1(0,8) = \{2\}$, $F_2(0,8) = \{6,8\}$, $F_1(1) = \{2\}$, $F_2(1) = \{6\}$. Далее найдем дискретные сечения суммы уровня $u \in U$ по формуле (22), которая примет вид

$$\Sigma_{I(0,6)} = \{x_1 + x_2 : x_1^B + x_2^B \le x_1 + x_2 \le x_1^T + x_2^T;\ x_1^T, x_1^B \in F_1(u);\ x_2^T, x_2^B \in F_2(u);$$

$x_1 \in \{1,2,3\}$; $x_2 \in \{4,5,6\}$. В результате $\Sigma_{I(0,6)}(0,3) = \{5,\ldots,11\}$, $\Sigma_{I(0,6)}(0,4) =$ $= \{6,\ldots,11\}$, $\Sigma_{I(0,6)}(0,5) = \{8,\ldots,11\}$, $\Sigma_{I(0,6)}(0,8) = \{8,9,10\}$, $\Sigma_{I(0,6)}(1) = \{8\}$. Определим значения ФП дискретного нечеткого числа $\Sigma_{I(0,6)}$ по формуле (15): $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(5) = 0,3$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(6) = 0,4$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(7) = 0,4$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(8) = 1$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(9) = 0,5$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(10) = 0,8$; $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(11) = 0,5$ и $\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(z) = 0$ для $z \in Z \setminus \operatorname{supp}(\Sigma_{I(0,6)}) = \{1,2,3\}$. В заключение из (18) найдем ФПТ-2 $\mu_\Sigma(z,u)$, $u \in [0,1]$, $z \in Z$. В табл. 1 даны значения $\mu_\Sigma(z,u) > 0$.

Таким образом, получим НМТ-2 суммы:

$\Sigma = \{((1;0);0,6), ((1;0,3);0,8), ((2;0);0,6), ((2;1);0,8), ((3;0);0,6), ((3;0,5);0,8), ((5;0);0,8),$
$((5;0,3);0,6), ((6;0);0,8), ((6;0,4);0,6), ((7;0);0,8), ((7;0,4);0,6), ((8;0);0,8), ((8;10,6),$
$((9;0);0,8), ((9;0,5);0,6), ((10;0);0,8), ((10;0,8);0,6), ((11;0);0,8), ((11;0,5);0,6)\}$.

Каждую тройку $(z, y, \mu_\Sigma(z,u))$ в полученном НМТ-2 суммы Σ можно интерпретировать следующим образом. Сумма ДНЧ F_1 и F_2 с нечетким множеством I индексов слагаемых равна z со степенью принадлежности u со степенью истинности этого факта, равной $\mu_\Sigma(z,u)$.

Таблица 1. Расчетные данные для примера 1

z	$\mu_{\Sigma_{I(0,6)}}(z)$	$\mu_{\Sigma_{I(0,8)}}(z)$	ФПТ-2
1	0	0,3	$\mu_\Sigma(1;0) = 0,6;\ \mu_\Sigma(1;0,3) = 0,8$
2	0	1	$\mu_\Sigma(2;0) = 0,6;\ \mu_\Sigma(2;1) = 0,8$
3	0	0,5	$\mu_\Sigma(3;0) = 0,6;\ \mu_\Sigma(3;0,5) = 0,8$
5	0,3	0	$\mu_\Sigma(5;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(5;0,3) = 0,6$
6	0,4	0	$\mu_\Sigma(6;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(6;0,4) = 0,6$
7	0,4	0	$\mu_\Sigma(7;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(7;0,4) = 0,6$
8	1	0	$\mu_\Sigma(8;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(8;1) = 0,6$
9	0,5	0	$\mu_\Sigma(9;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(9;0,5) = 0,6$
10	0,8	0	$\mu_\Sigma(10;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(10;0,8) = 0,6$
11	0,5	0	$\mu_\Sigma(11;0) = 0,8;\ \mu_\Sigma(11;0,5) = 0,6$

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СУММЫ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Отметим, что непосредственно использовать определение 1 сложно для понимания. Кроме того, интерпретация полученного НМТ-2 суммы Σ недостаточно убедительна. Поэтому представим операцию суммы ДНЧ с нечетким множеством индексов слагаемых в более удобном для использования виде. Для этого применим декомпозиционный подход.

Согласно [16] для любого НМТ-2 можно определить вложенные как «обычные» нечеткие множества типа-1 (НМТ-1), так и типа-2 (НМТ-2). Пусть для каждого $z \in Z$ задана единственная первичная степень принадлежности $u_z \in [0,1]$. Вложенное НМТ-2 $\widetilde{S}^e$ в НМТ-2 суммы $\Sigma = \{((z,u), \mu_\Sigma(x,u)) : u \in [0,1], z \in Z\}$ задается как совокупность $\widetilde{S}^e = \{((z,u_z), \mu_{\widetilde{S}^e}(x,u_z)) : z \in Z\}$, где $\mu_{\widetilde{S}^e}(z,u_z) = \mu_\Sigma(z,u_z)$ для $\forall z \in Z$. Каждый элемент этого набора в работе [16] рассматривается как подмножество, поэтому совокупность $\widetilde{S}^e$ (т.е. и НМТ-2) понимается в качестве классического объединения ее элементов как для обычных нечетких множеств. Будем полагать, что вложенное НМТ-2 $\widetilde{S}^e = \{((z,u_z), \mu_{\widetilde{S}^e}(x,u_z)) : z \in Z\}$ в НМТ-2 суммы Σ имеет постоянную вторичную оценку $\alpha \in A$, если $\mu_{\widetilde{S}^e}(z,u_z) \equiv \alpha$. Обозначим такое НМТ-2 как $S_\alpha^e = \{((z,u_z),\alpha) : z \in Z\}$. Вложенным НМТ-1 в НМТ-2 суммы Σ называется $S^e = \{(z, \mu_{S^e}(z)) : z \in Z\}$ с ФП $\mu_{S^e}(z) = u_z$, $z \in Z$.

Замечание 4. Очевидно, что для $\widetilde{S}_\alpha^e$ существует единственное вложенное в него НМТ-1 $S_\alpha^e = \{(z,u_z) : z \in Z\}$, поэтому НМТ-2 $\widetilde{S}_\alpha^e$ можно всегда представить в виде $\widetilde{S}_\alpha^e = \{(S_\alpha^e, \alpha)\}$.

Свойство НМТ-2 суммы Σ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть для каждого $\alpha \in A$ вложенное НМТ-1 $S_\alpha^e = \{(z,u_z) : z \in Z\}$ представляет сумму уровня α, которая является ДНЧ $S_\alpha^e \equiv \sum_{I(\alpha)} \equiv$ $\equiv \{(z, \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z)) : z \in Z\}$, равным сумме $\sum\limits_{j \in I(\alpha)} F_j$ ДНЧ F_j с индексами j из множества $I(\alpha)$ индексов слагаемых уровня α. Тогда НМТ-2 суммы Σ можно представить как совокупность $\{\widetilde{S}_\alpha^e : \alpha \in A\}$ вложенных НМТ-2 $\widetilde{S}_\alpha^e =$ $= \{(S_\alpha^e, \alpha)\}$ с соответствующими постоянными вторичными оценками $\alpha \in A$. Иными словами, $\Sigma = \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим включение $\Sigma \subseteq \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$. Пусть $((z^*,u^*), \mu_\Sigma(z^*,u^*)) \in \Sigma$, $z^* \in Z$, $u^* \in J_{z^*}$. Это значит, что $J_{z^*} \neq \varnothing$ и согласно (18), (19)

$$\exists \alpha^* \in A : u^* = \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*), \tag{28}$$

$$\mu_\Sigma(z^*,u^*) = \alpha^*. \tag{29}$$

Покажем, что $((z^*,u^*), \mu_\Sigma(z^*,u^*)) \in \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$. Предположим противное. Пусть для $\forall \alpha \in A$ (в том числе и для α^*) справедливо отношение $((z^*,u^*), \mu_\Sigma(z^*,u^*)) \notin \{(\Sigma_{I(\alpha^*)}, \alpha^*)\}$. Возможны два варианта: либо согласно (20) $u^* \neq \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)$, что противоречит условию (28), либо $\mu_\Sigma(z^*,u^*) \neq \alpha^*$, что приводит к противоречию относительно равенства (29). Таким образом, включение $\Sigma \subseteq \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$ доказано.

Далее рассмотрим включение $\Sigma \supseteq \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$. Пусть $(\Sigma_{I(\alpha^*)}, \alpha^*) \in$ $\in \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) : \alpha \in A\}$. Тогда из (20) следует $((z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)), \alpha^*) \in \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha) :$ $\alpha \in A\}$. Предположим противное, что $((z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)), \alpha^*) \notin \Sigma = \{((z,u),$ $\mu_\Sigma(z,u)) : u \in J_z, z \in Z\}$. В этом случае для $z = z^*$ и $u = \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)$ вторичная оценка удовлетворяет неравенству $\alpha^* > \mu_\Sigma(z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*))$ (НМТ-2 суммы Σ рассматриваем как совокупность, т.е. классическое объединение элементов относительно обычных нечетких множеств). Тогда на основании (18) справедливо неравенство

$$\alpha^* > \mu_{\Sigma}(z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)) = \max_{\alpha \in A}\{\alpha : \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*) = \mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*)\}. \quad (30)$$

Поскольку для всех $\alpha \in A$, для которых $\mu_{\Sigma_{I(\alpha)}}(z^*) = \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)$, выполняются неравенства $\mu_{\Sigma}(z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)) \geq \alpha$, то они выполняются и для $\alpha = \alpha^*$. Отсюда следует неравенство $\mu_{\Sigma}(z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)) \geq \alpha^*$. Тогда (30) приводит к противоречию $\alpha^* > \mu_{\Sigma}(z^*, \mu_{\Sigma_{I(\alpha^*)}}(z^*)) \geq \alpha^*$, что и доказывает включение $\Sigma \supseteq \{\widetilde{S}^{\,e}(\alpha): \alpha \in A\}$. Следовательно, справедливо равенство $\Sigma = \{(\Sigma_{I(\alpha)}, \alpha): \alpha \in A\}$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, результирующее НМТ-2 суммы Σ можно разложить по вторичным оценкам на соответствующие ДНЧ. Кроме того, теорема 2 упрощает вычисление суммы с нечетким множеством индексов слагаемых. Проиллюстрируем это свойство.

Пример 2. Используем исходные данные примера 1, а также ДНЧ «приблизительно 2» $\Sigma_{I(0,8)} = F_1$ (см. (26)) и «четное число около 6» $\Sigma_{I(0,6)} = F_1 + F_2$ (см. (27)). Тогда согласно теореме 2 $\Sigma = \{(\Sigma_{I(0,6)}; 0,6), (\Sigma_{I(0,8)}; 0,8)\}$. Такое НМТ-2 можно интерпретировать следующим образом. Представим нечеткую сумму двух ДНЧ F_1 и F_2 с нечетким множеством $I = \{(1; 0,8), (2; 0,6)\}$ слагаемых:

— «приблизительно 2» со степенью истинности этого факта, равной 0,8;

— «четному числу около 6» со степенью истинности этого факта, равной 0,6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в статье операция суммы ДНЧ с нечетким множеством слагаемых приводит к достаточно сложному математическому объекту — НМТ-2. Направление исследования такой операции в дальнейшем может быть связано с изучением ее алгебраических свойств и поиском важных частных случаев. Данный подход может быть использован для обобщения других алгебраических операций на случай нечеткого множества операндов. Примером таких операций может быть лингвистическая неопределенность в описании самой совокупности НЧ. Например, при оценке какого-либо объекта по совокупности показателей может возникнуть необходимость учета нечеткого множества этих показателей, которое определяется их некоторым свойством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chang S.S.L., Zadeh L.A. On fuzzy mapping and control. *IEEE Transactions on Systems. Man, and Cybernetics.* 1972. Vol. 2, N 1. P. 30–34. https://doi.org/10.1109/TSMC.1972.5408553.
2. Mizumoto M., Tanaka K. The four operations of arithmetic on fuzzy numbers. *Syst. Compute. Controls.* 1976. N 5. P. 73–81. URL: https:mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=476531.
3. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science.* 1978. Vol. 9, N 6. P. 613–626. https://doi.org/10.1080/00207727808941724.
4. Heilpern S. Representation and application of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems.* 1997. Vol. 9. P. 259–268. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00146-2.
5. Voxman W. Canonical representations of discrete fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems.* 2001. Vol. 54. P. 457–466. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00053-6.
6. Wang G., Wu C., Zhao C. Representation and operations of discrete fuzzy numbers. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics.* 2005. Vol. 29, N 5. P. 1003–1010.

7. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.M. Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47, N 2. P. 250–259.
8. Zimmermann H.-J. Fuzzy set theory — and its applicationss. Dordrecht: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0646-0.
9. Mashchenko S. Intersections and unions of fuzzy sets of operands. *Fuzzy Sets and Systems.* 2018. Vol. 352. P. 12–25. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.006.
10. Mashchenko S.O., Kapustian D.O. Decomposition of intersections with fuzzy sets of operands. In: Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (eds.) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Cham: Springer, 2020. P. 417–432. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-50302-4.
11. Mashchenko S.O. Sums of fuzzy set of summands. *Fuzzy Sets and Systems.* 2020. https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.006.
12. Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I. *Inform. Sci.* 1975. Vol. 8. P. 199–249. https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5.
13. Casasnovas J., Riera J.V. Discrete fuzzy numbers defined on a subset of natural numbers. In: Castilio O. et al. (eds.). Theoretical advances and applications of fuzzy logic and soft computing. *Advances in Soft Computing.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. Vol. 42. P. 573–582.
14. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Москва: Наука, 1981. 208 с.
15. Zadeh L.A. Quantitative fuzzy semantics. *Inform. Sci.* 1971. Vol. 3. P. 159–176. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80004-X.
16. Mendel J.M., John R.I. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10. P. 117–127. https://doi.org/10.1109/91.995115.
17. Harding J., Walker C., Walker E. The variety generated by the truth value algebra of T2FS. *Fuzzy Sets and Systems.* 2010. Vol. 161. P. 735–749. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.07.004.

Надійшла до редакції 17.12.2020

С.О. Мащенко

СУМА ДИСКРЕТНИХ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ДОДАНКІВ

Анотація. Досліджується операція додавання дискретних нечітких чисел з нечіткою множиною індексів доданків як узагальнення операції суми з чіткою множиною операндів. Показано, що результатом цієї операції є нечітка множина типу-2 (НМТ-2). Побудована функція належності типу-2 цієї множини. Уведено поняття НМТ-2 суми дискретних чисел з нечіткою множиною індексів доданків. НМТ-2 суми може бути декомпозована за вторинними ступенями належності на набір відповідних дискретних нечітких чисел. Це допомагає представити результуючу НМТ-2 в зручній для розуміння і застосування формі. Наведено ілюстративні приклади.

Ключові слова: нечітке число, дискретне нечітке число, нечітка множина.

S.O. Mashchenko

SUM OF DISCRETE FUZZY NUMBERS WITH FUZZY SET OF SUMMANDS

Abstract. We investigate the operation of addition of discrete fuzzy numbers with a fuzzy set of summand indices. This is a generalization of the sum operation with a crisp set of operands. We show that the result of this operation is a type-2 fuzzy set of (T2FS). We construct the type-2 membership function of this set. We introduce the concept of a sum T2FS of discrete numbers with a fuzzy set of summand indices. The sum T2FS can be decomposed according to secondary membership grades into the corresponding collection of fuzzy numbers. It helps to represent the resultant T2FS in a form which is convenient for a proper understanding and applications. Illustrative examples are given.

Keywords: fuzzy number, discrete fuzzy number, fuzzy set.

Мащенко Сергей Олегович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: s.o.mashchenko@gmail.com.