

**РЕГУЛЯРИЗИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ
В КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ**

Аннотация. Рассмотрена проблема идентификации сложных дискретных систем в классе моделей линейной регрессии. При наличии погрешностей в данных соответствующая задача идентификации в большинстве случаев является некорректно поставленной. В условиях ограниченной неопределенности исходных данных предлагается находить приближенное регуляризованное решение и в качестве регуляризирующего параметра использовать размерность модели. Разработаны и исследованы два способа определения размерности модели, позволяющие находить приближенное решение задачи идентификации, согласованное по точности с погрешностью данных. На основе численного моделирования выполнены исследования разработанных способов идентификации и дана оценка их эффективности.

Ключевые слова: идентификация, линейная регрессия, сложная система, регуляризация, определение размерности модели, сингулярное разложение, численное моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании различных систем с дискретным временем часто используют уравнения регрессии, применяемые, например, в медицине, технических и организационных системах и т.д. Для таких систем идентификация — наиболее распространенный способ построения моделей. При этом часто допускается их приближенное описание, поскольку даже при использовании уравнений регрессии больших размерностей найти точное описание указанных систем не представляется возможным. В результате решения задачи структурно-параметрической идентификации находится приближенная модель. Даже если для рассматриваемой системы существует точное описание в виде уравнения регрессии, то при наличии неопределенных погрешностей в данных в большинстве случаев найти эти уравнения не представляется возможным.

В достаточной мере исследованными являются методы стохастической идентификации, в том числе в классе моделей регрессии. Существует большое число публикаций, посвященных проблеме стохастической идентификации [1–5].

Уравнения регрессии по сравнению с другими классами моделей систем позволяют в удобной для идентификации форме учитывать погрешности измерения как выходных, так и входных переменных. На их основе сформировалось направление идентификации, получившее название идентификация систем с ошибками в переменных (errors-in-variables (EIV) identification) [6]. В рамках стохастической идентификации предполагается, что все погрешности являются независимыми и одинаково распределенными случайными последовательностями с нулевым средним. Такие системы были рассмотрены в [6–11]. Основное внимание уделялось получению несмещенных оценок и состоятельности оценивания. При теоретико-множественном или нестохастическом подходе к трактовке неопределенности эти вопросы изложены в работах [12–21].

В настоящей статье рассматривается нестохастический подход к идентификации систем, включая сложные, системы большой размерности в классе моделей регрессии, а также асимптотическое моделирование, когда точному описанию соответствует бесконечномерная модель. В условиях ограниченной неопре-

деленности в исходных данных в настоящей работе, в отличие от упомянутых выше, находится приближенное регуляризованное решение [22], в котором размерность модели рассматривается как регуляризирующий параметр. При этом размерность модели может быть равной или меньше размерности системы, генерирующей данные.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим системы, имеющие один заданный или измеренный вход $u(t)$ и одну измеряемую переменную $y(t)$. Развиваемый подход и метод решения задачи идентификации в принципе применим и для случая многосвязной системы, когда возбуждающее воздействие может подаваться на каждый вход отдельно при нулевых значениях на всех остальных входах. Тогда задача идентификации такой системы может быть сведена к решению подзадач с одним входом и одним выходом.

В скалярном случае соотношение вход–выход для линейных стационарных дискретных динамических систем в каждый момент времени задается отображением

$$y(t) = G(q^{-1})u(t), \quad (1)$$

где $y(t)$ и $u(t)$ — выходная и входная переменные соответственно, $G(q^{-1})$ — передаточная функция оператора сдвига назад $q^{-1}: q^{-1}y(t) = y(t-1)$, которая в рассматриваемом случае записывается как

$$G(q^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i q^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^n a_j q^{-j}}, \quad q^{-0} = 1, \quad (2)$$

где a_j и b_i — вещественные числа, представляющие параметры системы.

В определенных ситуациях передаточная функция $G(q^{-1})$ может быть иррациональной или трансцендентной, например в случае систем с распределенными параметрами. Тогда (2) рассматривается как рациональная аппроксимация такой функции, которая при $n \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к точному описанию. В настоящей работе рассматриваются сложные системы, для которых представление (1), (2) может быть точным или приближенным, которое при $n \rightarrow \infty$ будет асимптотически стремиться к точному описанию. Кроме того, вместо точных значений $y(t)$ и $u(t)$ в каждый момент времени имеем только их приближенные измеренные значения:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \xi_y(t), \quad \tilde{u}(t) = u(t) + \xi_u(t).$$

Здесь погрешности измерения $\xi_y(t)$ и $\xi_u(t)$ считаются произвольными случайными, но ограниченными по величине последовательностями, удовлетворяющими условиям

$$|\xi_y(t)| \leq \varepsilon_y, \quad |\xi_u(t)| \leq \varepsilon_u, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, \quad (3)$$

где ε_y и ε_u — достаточно малые величины по отношению к точным сигналам $y(t)$, $u(t)$. Каких-либо других предположений о погрешностях не делается.

Системе (1), (2) соответствует модель линейной регрессии вида

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t) + \dots + b_n u(t-n).$$

Для простоты изложения запишем ее в виде

$$y(t) = b_0 u(t) - a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_n u(t-n). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение вектор параметров θ размерности $2n+1$, равный $\theta' = (b_0 \ -a_1 \ b_1 \ \dots \ -a_n \ b_n)$, где штрих обозначает операцию транспонирования. Тогда уравнение (4) примет вид

$$y(t) = \varphi'(t) \cdot \theta, \quad (5)$$

где регрессор определяется выражением

$$\varphi'(t) = [u(t) \ y(t-1) \ u(t-1) \ \dots \ y(t-n) \ u(t-n)]. \quad (6)$$

Задачу идентификации системы (1), (2) решим в классе моделей (5) как структурно-параметрическую, т.е. найдем ее размерность n и соответствующий ей вектор θ . Исходными данными для решения являются полученные по результатам экспериментов временные ряды $\{\tilde{u}(t), \tilde{y}(t)\}_{t_0}^T$, заданные на конечном интервале $[t_0, T]$. Для сложных систем задача идентификации в такой постановке является, как правило, некорректно поставленной. В этом случае невозможно получить несмещенные оценки, представляющие цель стохастической идентификации. Результатом идентификации в такой постановке будет приближенная модель, соответствующая регуляризованному решению, которое по точности согласовывается в некотором смысле с условиями (3). Это относится и к гарантированному оцениванию [12–21], поскольку в бесконечномерном случае размерность модели будет конечна, а в конечномерном она будет меньше размерности реальной системы. Более того, при нахождении регуляризованного решения размерность модели выступает в роли регуляризирующего параметра. Рассматриваются предельно допустимые размерности такие, что дальнейшее их увеличение приводит к существенному росту чувствительности получаемого решения к погрешностям или моделированию динамики возмущений.

Существует определенная аналогия между регуляризованным решением и моделью редуцированного порядка. Процедура построения модели редуцированного порядка по отношению к исходной точной приводит к приближенной модели меньшего порядка, отклик которой на любое допустимое входное воздействие не отклоняется от точного более чем на некоторую заданную малую величину. При этом, как показано в [23], инварианты редуцированной модели, а следовательно, и ее параметры, могут существенно отличаться от параметров точной модели. Как правило, собственные значения редуцированной модели представляют некоторый кластер собственных значений точной модели. Строгая сходимость редуцированной модели к точной при сближении их размерностей не всегда гарантируется. Например, для систем ядерного типа доказана только слабая сходимость рациональной аппроксимации к точному описанию [24].

2. МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

2.1. Формирование данных для идентификации. Пусть в результате проведенных на исследуемом объекте экспериментов на интервале времени $[t_0, T]$ получены измеренные значения входных и выходных величин $\{\tilde{u}(t), \tilde{y}(t)\}_{t_0}^T$. Число таких пар равно $(T - t_0 + 1)$, и оно должно быть достаточно большим, чтобы быть представленным в виде $T - t_0 + 1 = N + l$, где l — величина, превышающая предполагаемую размерность искомой модели, а N значительно больше величины l .

При стохастической идентификации и выполнении определенных требований к входной последовательности и погрешностям, представленным случайными после-

довательностями, независимыми между собой и от сигналов $u(t)$ и $y(t)$, доказывающаяся асимптотическая сходимость к точному решению при $N \rightarrow \infty$ [3, 4]. При неопределенности, задаваемой (3), сходимость в общем случае не гарантируется. Тем не менее возможен случай реализации погрешностей, когда качество оценивания может улучшаться с увеличением N . Поэтому при неточных данных всегда целесообразно задавать N большим, если это допускается в экспериментах. Задача идентификации с регуляризацией состоит в нахождении по этим исходным данным приближенной модели в классе (5) с таким вектором параметров θ и размерностью n , что отклики системы и модели на любое допустимое входное воздействие незначительно отличались бы величиной, согласованной со значениями ε_y и ε_u в (3).

Обозначим $t_{0,l} = t_0 + l$. По исходным данным сформируем ганкелеву матрицу $\Phi(l, N) \in R^{(2l+1) \times N}$ следующего вида:

$$\Phi(l, N) = [\tilde{\varphi}(t_{0,l}) \ \tilde{\varphi}(t_{0,l+1}) \ \dots \ \tilde{\varphi}(T)], \quad (7)$$

где $\tilde{\varphi}(t_{0,l} + i)$ — вектор-столбцы регрессоров, формируемых согласно (6), но с использованием измеренных с погрешностью величин входных и выходных переменных.

Для определения оценки вектора параметров $\theta \in R^{2n+1}$ и величины n , $n \leq l$, задающей его размерность, используем переопределенную систему уравнений

$$\theta' \cdot \Phi(l, N) = \varphi'_0, \quad (8)$$

где φ'_0 — вектор-строка:

$$\varphi'_0(t) = [\tilde{y}(t_{0,l}) \ \tilde{y}(t_{0,l+1}) \ \dots \ \tilde{y}(T)].$$

Из (8) сформируем множество переопределенных систем уравнений, соответствующих разным размерностям n вектора θ :

$$\Phi'(n, N) \cdot \theta_n = \varphi_0, \quad n = 2, 3, \dots, n_{\max}; \quad 2n_{\max} + 1 \leq l, \quad (9)$$

где матрица $\Phi'(n, N)$ образована из $\Phi(l, N)$ исключением всех строк после $2n+1$ -й с последующим транспонированием; при этом вектор θ_n имеет $2n+1$ компоненту. Каждой системе множества (9) поставим в соответствие расширенную матрицу Φ_n :

$$\Phi_n = [\varphi_0 \ \Phi'(n, N)]. \quad (10)$$

Матрица (10) при каждом n имеет размер $N \times 2(n+1)$, т.е. с ростом n на единицу число строк у нее сохраняется, а количество столбцов увеличивается на два. Используем ее для определения размерности искомой модели. Пусть система, генерирующая данные, имеет точное описание в классе моделей регрессии при некотором конечном n_T . Тогда семейство матриц (10) при точных данных имеет следующее свойство. При $n < n_T$ она будет полноранговой, т.е. $\text{rank } \Phi_n = 2(n+1)$, а начиная с $n = n_T$ она становится неполноранговой. Причем для $n = n_T$ она имеет один линейно зависимый столбец, а для всех последующих n их число будет увеличиваться на единицу, т.е. для $n = n_T + 1$ будет два столбца, для $n = n_T + 2$ — три столбца и т.д. Матрица $\tilde{\Phi}_n$, сформированная с использованием значений $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{u}(t)$, с вероятностью почти единица будет полноранговой при любом n . Однако при достаточно малых значениях ε_u и ε_y она будет близкой к вырожденной, начиная с $n \geq n_T$. Это свойство семейства матриц (10) используется при определении размерности модели в задаче структурно-параметрической идентификации.

Следует заметить, что в зависимости от уровня погрешностей и структурных особенностей системы, определяемых расположением собственных значений характеристического полинома в устойчивой области комплексной плоскости, а также от свойств управляемости и наблюдаемости, размерность модели может оказаться равной n_T или меньше ее. Объясняется это следующим. Если дробно-рациональную передаточную функцию (2) разложить на элементарные дроби, соответствующие корням характеристического многочлена, то получим модальное представление для выхода $y(t)$. Число мод будет равно n_T , включая действительные, комплексные и кратные корни характеристического многочлена. Каждая мода имеет в этом разложении свой вклад в общий сигнал $y(t)$. В результате в зависимости от указанных структурных свойств системы отношение сигнал/шум (ОСШ) отдельных мод будет разным и среди них могут оказаться моды с ОСШ, близкими или меньшими единицы. Различить их на фоне шумов не представляется возможным. Наличие у системы близких собственных значений приводит к тому, что в результате идентифицируется одна мода, которая представляет кластер мод системы. Особенно это характерно при больших размерностях систем, генерирующих данные. Кроме изложенных факторов, влияющих на выбор размерности модели, отметим ситуацию, когда с увеличением n число обусловленности [25], как правило, возрастает и это может привести к большой чувствительности решения к погрешностям в данных. Поскольку предлагаемые способы решения задач структурно-параметрической идентификации ориентированы на сложные системы, включая бесконечномерные, возникает необходимость в использовании процедур регуляризации, которые приводят к нахождению приближенных регуляризованных решений.

2.2. Определение размерности модели по ε -рангу расширенной матрицы.

Нахождение по неточным данным размерности модели, соответствующей регуляризованному решению, является нетривиальной задачей особенно для сложных систем высокого порядка. Рассмотрим подход, в котором регуляризирующим параметром считается размерность модели. Предлагаемые способы ее определения не являются строгими, поскольку не существует четкой границы между областями, соответствующими устойчивым и неустойчивым решениям. Существует некоторая переходная зона, в которой быстро возрастает чувствительность решения к имеющимся в данных погрешностям [24]. Поэтому разные способы нахождения размерности могут давать разные ее значения из этой переходной зоны. Полагаем, что погрешности данных незначительные, т.е. ОСШ является величиной, намного большей единицы. Тогда для определения размерности модели используем понятие неполноты ранга расширенной матрицы Φ_n при разных n . В соответствии с понятием ε -ранга матрицы A [25], где ε — достаточно малая величина, строится неполноранговая матрица B по формуле

$$\text{rank}(A, \varepsilon) = \min_{\|A-B\|_2 \leq \varepsilon} \text{rank}(B),$$

которая имеет ранг, на единицу меньший ранга матрицы A .

При каждом n осуществим SVD-разложение матрицы Φ_n , т.е. представив ее в виде

$$\Phi_n = U_n \cdot \Sigma_n \cdot V_n', \quad (11)$$

где U_n и V_n — ортогональные прямоугольные матрицы размера $N \times N$ и $2(n+1) \times 2(n+1)$, а Σ_n — матрица сингулярных чисел, расположенных на ее диагонали в невозрастающем порядке, которая имеет размер $N \times 2(n+1)$. Испол-

зую разложение (11), запишем Φ_n в виде суммы двух матриц:

$$\Phi_n = \overline{\Phi}_n + \delta\Phi_n, \quad (12)$$

где $\overline{\Phi}_n = \sum_{i=1}^{2n+1} \sigma_i (u_i \cdot v_i')$, $\delta\Phi_n = \sigma_{2(n+1)} (u_{2(n+1)} \cdot v_{2(n+1)}')$, а u_i , $i=1, 2n+1$, $u_{2(n+1)}$

и v_i , $i=1, 2n+1$, $v_{2(n+1)}$ — соответствующие вектор-столбцы матриц U_n и V_n ; σ_i и $\sigma_{2(n+1)}$ — сингулярные числа матрицы Σ_n . Выражение (12) справедливо, поскольку согласно [25] имеем $\Sigma_n = [\Sigma_{n0} \ 0]$, где Σ_{n0} — квадратная матрица сингулярных чисел размера $2(n+1) \times 2(n+1)$, $N \gg 2(n+1)$.

Из (12) согласно [25] следует

$$\|\delta\Phi_n\| = \|\Phi_n - \overline{\Phi}_n\|, \quad \|\delta\Phi_n\|_2 = \sigma_{2(n+1)},$$

т.е. сингулярное число $\sigma_{2(n+1)}$ определяет по норме $\|\cdot\|_2$ близость матрицы Φ_n к вырожденной, имеющей ранг $2n+1$. Более того, матрица $\delta\Phi_n$ является минимальной среди всех неполноранговых матриц по этой норме [25]. Следовательно, значение n , при котором $\delta\Phi_n$ имеет погрешность, согласованную с погрешностью исходных данных (ε_u , ε_y), можно принять за размерность модели, соответствующей регуляризованному решению.

Конкретизируем это условие согласованности. Пусть E_n — матрица, имеющая тот же размер, что и $\delta\Phi_n$ для соответствующих варьируемых n . В качестве элементов E_n возьмем значения ε_u и ε_y , которые соответственно расположены вместо элементов $u(t)$, $y(t)$ матрицы Φ_n . Формируем абсолютную матрицу $|\delta\Phi_n|$, элементами которой являются абсолютные значения элементов $\delta\Phi_n$. Варьируем значение n и проверяем выполнимость неравенства

$$|\delta\Phi_n| \leq E_n. \quad (13)$$

Наименьшее значение n , при котором (13) выполняется, выберем в качестве искомого n . Однако на практике (13) выполняется довольно редко, поскольку матрица $\delta\Phi_n$ находится по норме $\|\cdot\|_2$, а (13) дает сравнительную оценку по более сложной норме. Более приемлемый результат имеем в случае использования следующей сравнительной оценки матриц $\delta\Phi_n$ и E_n :

$$\max_{i,j} |\delta\Phi_n(i,j)| \leq \max[\varepsilon_u, \varepsilon_y], \quad (14)$$

где $\delta\Phi_n(i,j)$ — элементы матрицы $\delta\Phi_n$, расположенные в i -й строке и j -м столбце.

Как и в случае (13), за оценку n принимаем его наименьшее значение, при котором (14) выполняется. Определяемая с помощью (13) или (14) оценка размерности модели приводит к регуляризованному решению задачи идентификации. Действительно, при $\varepsilon_u \rightarrow 0$, $\varepsilon_y \rightarrow 0$ норма $\|\delta\Phi_n\|$ также стремится к нулю согласно (13), (14). При этом n растет неограниченно, если точное решение соответствует бесконечной размерности, т.е. в классе асимптотического моделирования. Когда система имеет конечную размерность в классе регрессионных моделей, то увеличивается разрыв между σ_{2n+1} и $\sigma_{2(n+1)}$ (здесь n — размерность системы). Поэтому размерность, определяемая из (13), (14), вначале будет возрастать, приближаясь к точному n , а затем условия (13), (14) будут выполняться вследствие увеличивающегося разрыва между σ_{2n+1} и $\sigma_{2(n+1)}$ при фиксированном n . Таким образом, в результате решения задачи идентификации получим регуляризованное решение, согласованное по точности с погрешностями в данных.

2.3. Определение размерности по невязке. Оценка размерности модели по близости матрицы Φ_n к вырожденной, согласованная по точности с погрешностью данных, не всегда дает качественный результат. В определенных случаях отклик модели и реальной системы на одинаковые входные воздействия могут существенно отличаться. При плохой обусловленности невязка системы (9) при использовании метода наименьших квадратов (МНК) может значительно превышать погрешности данных. В таких случаях следует выделять интервал неоднозначности сравнительных оценок и на нем определять порядок модели исходя из принципа невязки, который используется для определения параметра регуляризации при решении некорректно поставленных задач. Для этого матрицы $\Phi'(n, N)$ переопределенных систем (9) с использованием SVD-разложения запишем в виде

$$\Phi'(n, N) = U_{N_n} \cdot \Sigma_{N_n} V'_{2n+1}. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что $N \gg 2n+1$, матрицу Σ_{N_n} в (15) представим в виде

$$\Sigma_{N_n} = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_0} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где Σ_{n_0} — квадратная матрица порядка $2n+1$. Тогда каждую систему в (9) запишем как

$$U_N \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{n_0} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V'_{2n+1} \cdot \theta = \varphi_0. \quad (16)$$

Для фиксированного n решение системы (16) методом наименьших квадратов примет вид

$$\theta = V_{2n+1} \cdot \Sigma_{n_0}^{-1} \cdot U'_{2n+1} \cdot \varphi_0, \quad (17)$$

где для U_N было использовано блочное представление

$$U_N = [U_{2n+1} \quad U_{N-2n-1}],$$

в котором матрица U_{2n+1} составлена из первых $2n+1$ столбца матрицы U_N , а в матрицу U_{N-2n-1} вошли остальные столбцы. Подставив (17) в (16), получим невязку $\vartheta_{\text{МНК}}$ решения (17):

$$\vartheta_{\text{МНК}} = (U_{2n+1} U'_{2n+1} - E) \varphi_0, \quad (18)$$

где E — единичная матрица. Используем свойство ортогональности матрицы U_{N_n} , т.е. $U_{N_n} U'_{N_n} = E$, из которого следует, что

$$U_{N_n} \cdot U'_{N_n} = [U_{2n+1} \quad U_{N-2n-1}] \cdot \begin{bmatrix} U'_{2n+1} \\ U'_{N-2n-1} \end{bmatrix} = U_{2n+1} \cdot U'_{2n+1} + U_{N-2n-1} \cdot U'_{N-2n-1}.$$

Это позволяет невязку (18) записать в виде

$$\vartheta_{\text{МНК}} = -(U_{N-2n-1} \cdot U'_{N-2n-1}) \varphi_0. \quad (19)$$

Варьируя значение параметра n в интервале неопределенности, можно установить зависимость $\|\vartheta_{\text{МНК}}\|$ от n . Для каждого значения n существует множество сопоставимых по точности решений задачи идентификации, согласованных с погрешностями данных. Условие принадлежности этому множеству согласно [22] определяется неравенством

$$\|\vartheta_{\text{МНК}}\| \leq 2(\varepsilon_y + \delta \|\theta\|),$$

где θ — решение (9) для соответствующего n , а δ — норма погрешности задания матрицы $\Phi'(n, N)$.

В качестве нормы будем использовать l_∞ . Тогда согласно принципу невязки наименьшее значение n , при котором выполняется неравенство

$$\|\vartheta_{\text{МНК}}\|_\infty \leq 2(\varepsilon_y + \delta\|\theta\|_\infty), \quad (20)$$

где $\delta = \max\{\varepsilon_u, \varepsilon_y\}$, определяет искомую размерность модели.

Сформулированный принцип невязки определения n аналогичен используемому при нахождении нормального решения СЛАУ по неточно известным правой части и матрицы.

2.4. Решение задачи параметрической идентификации. После определения размерности модели из (9) находится окончательное решение задачи идентификации для той переопределенной системы, которая соответствует этой размерности. Отметим, что решение, получаемое обыкновенным МНК, было найдено и представлено выражением (17). Для переопределенных систем с неточно заданными правой частью и матрицей вместо обычного метода целесообразно использовать обобщенный МНК [25].

Для любого способа решения СЛАУ важным является оценка числа обусловленности ее матрицы. Оценку числа обусловленности можно установить по сингулярным числам матрицы Σ_{n_0} и определить равенством

$$\kappa(n) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{2n+1}},$$

где σ_1 и σ_{2n+1} — первое и последнее сингулярные числа. При хорошей обусловленности решение, получаемое любым из рассмотренных методов, дает приемлемый результат.

При плохой обусловленности следует использовать регуляризованный МНК, который можно найти, например, с помощью MATLAB. Следует заметить, что регуляризованное решение является приближенным и любое согласованное по точности решение не уступает тем, которые могут рассматриваться как более точные. В области согласованных по точности решений ни одно из них не имеет каких-либо преимуществ перед другими, кроме одного — малой чувствительности по отношению к погрешностям в данных. Именно это определяет практическую пригодность выбираемого решения из множества рассмотренных.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

3.1. Исходные данные. С помощью численного моделирования были проведены исследования предлагаемых подходов относительно проблемы идентификации сложных систем и методов нахождения регуляризованного решения.

Для получения последовательности значений выходной переменной на вход исследуемой системы подавалась последовательность $u(t)$, представляющая реализацию случайного процесса типа белый шум со значениями, равномерно распределенными в интервале $[0, 2]$. По полученным в результате реализациям последовательностей $u(t)$ и $y(t)$ вычислялись значения $y_{\max} = \max_t |y(t)|$ и $u_{\max} = \max_t |u(t)|$. Шумы измерений $\xi_y(t)$ и $\xi_u(t)$ в уравнении (3) также задавались в виде реализаций случайных процессов типа белый шум. Они являются равномерно распределенными в интервалах $[-\varepsilon_y, \varepsilon_y]$ и $[-\varepsilon_u, \varepsilon_u]$ соответственно. Числа ε_y и ε_u определялись как

$$\varepsilon_y = \varepsilon \cdot y_{\max}, \quad \varepsilon_u = \varepsilon \cdot u_{\max}. \quad (21)$$

Число ε согласно (21) характеризует относительный уровень погрешности данных. При формировании реальных (неточных) значений входных и выходных

переменных системы задавалось число ε , вычислялись реализации помех, которые складывались с уже вычисленными незашумленными последовательностями входных и выходных переменных. Рассматривались случаи, когда $\varepsilon = 0$ (отсутствие шумов измерения), $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$.

При фиксированном значении ε задавался интервал $[n_{\min} : n_{\max}]$ возможных значений размерности n аппроксимирующей модели. Для каждого $n \in [n_{\min} : n_{\max}]$ с помощью рядов входных и выходных переменных (см. разд. 2) формировались матрицы $\Phi(n, N)$, Φ_n , $\bar{\Phi}_n$, $\delta\Phi_n$ и величина $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_y, \varepsilon_u)$.

3.2. Описание экспериментов. Вначале рассмотрим систему невысокого порядка.

Пример 1. Исследуемая динамическая система задается передаточной функцией следующего вида [26]:

$$G(z) = \frac{0.8 \cdot (1 - 1.2488z^{-1} + 0.9604z^{-2})}{1 - 1.4491z^{-1} + 0.9604z^{-2}}. \quad (22)$$

Здесь z — комплексная переменная. Передаточной функции (22) соответствует разностное уравнение

$$y(k) - 1.4491y(k-1) + 0.9604y(k-2) = 0.8(u(k) - 1.2488u(k-1) + 0.9604u(k-2)).$$

Отклик этой системы на единичное входное воздействие представляет слабозатухающий колебательный процесс.

При отсутствии помех ($\varepsilon = 0$) зависимость минимального сингулярного числа матрицы $\Phi(n, N)$ от размерности модели n представляет собой ниспадающую к нулю кривую. Последнее ненулевое число получено при $n = 2$, что совпадает с размерностью системы, генерирующей данные. Параметрическая идентификация при $n = 2$ дала совпадение оценок параметров с истинными значениями исследуемого объекта.

При уровне помех $\varepsilon = 0.01$ зависимости левых и правых частей (14) от n показаны на рис. 1. Из рисунка видно, что согласно (14) получаем размерность модели, равную истинной $n = 2$. Этот же результат получаем при сопоставлении левой (невязки) и правой частей (20) в зависимости от n , что иллюстрирует рис. 2. Переходные процессы модели (сплошная кривая), полученной в результате решения задачи параметрической идентификации, и исследуемой системы (пунктирная линия) показаны на рис. 3. Как видим, графики выходных переменных модели и системы достаточно близки.

При более высоком уровне помех $\varepsilon = 0.1$ результаты моделирования представлены на рис. 4–6. Как видно на рис. 4, согласно (14) размерность модели рав-

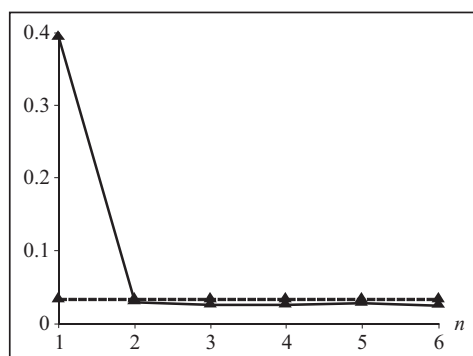


Рис. 1. Значения левой (сплошная линия) и правой (пунктирная линия) частей (14) в зависимости от n

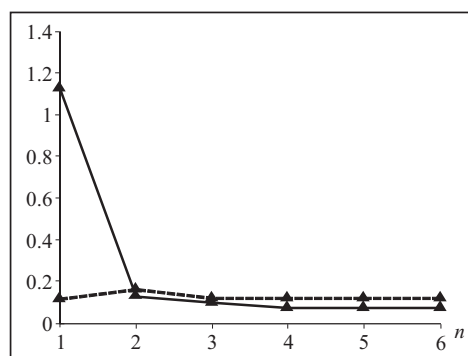


Рис. 2. Определение размерности по принципу невязки (20)

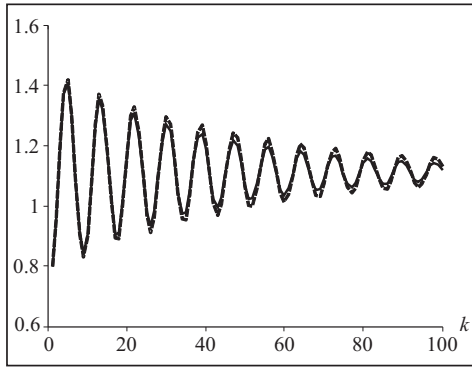


Рис. 3. Переходные процессы модели при $n = 2$ и исследуемой системы примера 1 при $\varepsilon = 0.01$

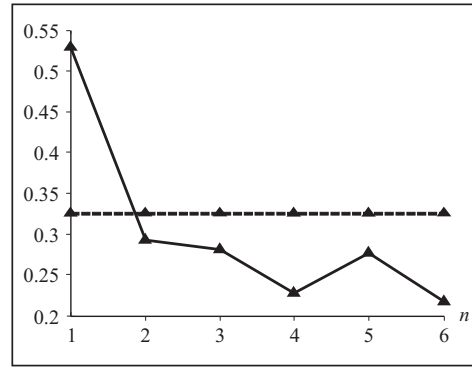


Рис. 4. Зависимости левой и правой частей (14) от n при $\varepsilon = 0.1$

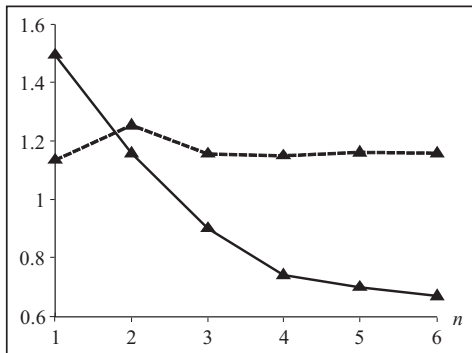


Рис. 5. Зависимости левой и правой частей (20) от n

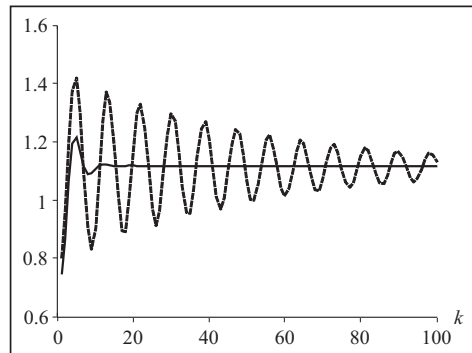


Рис. 6. Переходные процессы модели при $n = 2$ и исследуемой системы примера 1 при $\varepsilon = 0.1$

на истинной. Условие (20) в соответствии с рис. 5 выполняется при $n = 2$. Графики переходного процесса модели (сплошная кривая) и исследуемой системы (пунктирная кривая) изображены на рис. 6.

Пример 2. Исследуемая динамическая система, имитирующая более сложную систему, представляет параллельное соединение устойчивых апериодических и колебательных типовых звеньев, коэффициенты усиления которых — постоянные затухания, и периоды колебаний выбирались случайным образом. Здесь приведены данные для динамической системы размерности $n_T = 16$, которая содержит четыре апериодических звена и шесть колебательных звеньев. В рассматриваемом примере были выбраны $n_{\min} = 2$ и $n_{\max} = 18$. При точных исходных данных ($\varepsilon = 0$) зависимости минимального сингулярного числа σ_{2n+1} матрицы $\Phi(n, N)$ от n , начиная с $n = 4$, приведены в табл. 1.

Размерность модели определяется $n = 7$, поскольку при больших n задача параметрической идентификации ввиду вычислительных погрешностей становится некорректно поставленной. На рис. 7 приведено сравнение переходных процессов исследуемой системы (пунктирная линия) и модели (сплошная) при $n = 7$. Как видно из рисунка, графики переходных процессов достаточно близки.

Таблица 1

n	4	5	6	7	8	9
σ_{2n+1}	1.160	0.06274	0.004910	0.0007358	$3.701 \cdot 10^{-6}$	$5.309 \cdot 10^{-7}$

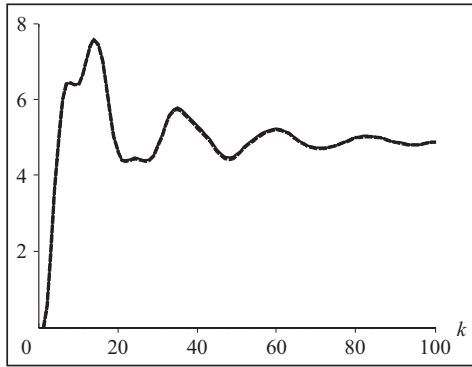


Рис. 7. Переходные процессы модели при $n = 7$ и исследуемой системы примера 2 при $\varepsilon = 0$

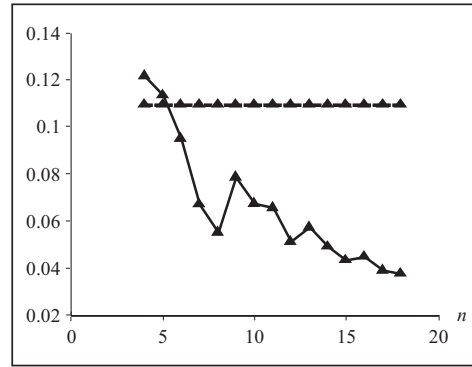


Рис. 8. Зависимости левых (сплошная линия) и правых (пунктирная линия) частот (14) от n

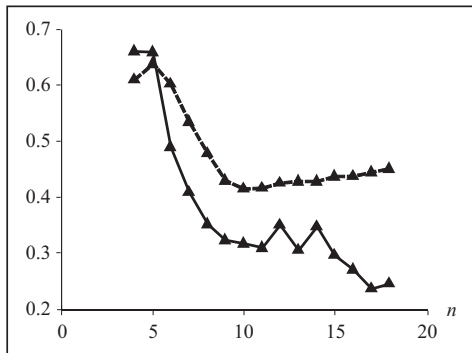


Рис. 9. Зависимости левых (сплошная линия) и правых (пунктирная линия) частот (20) от n

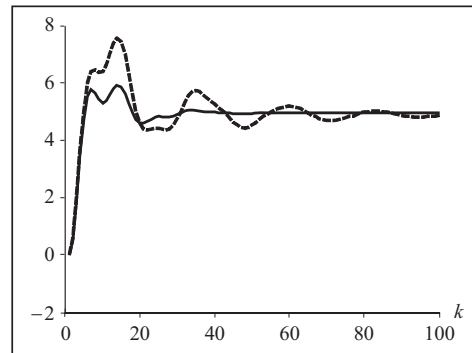


Рис. 10. Переходные процессы модели (сплошная линия) для $n = 7$ и исследуемой системы (пунктирная линия) примера 2 при $\varepsilon = 0.01$

Для уровня шумов $\varepsilon = 0.01$ зависимости левых (сплошная линия) и правых (пунктирная линия) частот (14) от n изображены на рис. 8. Здесь условие (14) дает размерность модели $n = 5$.

Графики левых (сплошная линия) и правых (пунктирная линия) частот (20) в зависимости от n показаны на рис. 9. Видно, что условие, определяемое (20), выполняется при $n = 5$.

Переходный процесс при размерности модели $n = 5$ приведен на рис. 10. При уровне шумов $\varepsilon = 0.1$ кривые зависимости левых и правых частот условий (14) и (20) не пересекаются. Поэтому исходя из этих критериев невозможно сделать обоснованный выбор порядка модели.

3.3. Анализ результатов моделирования. Для динамических систем относительно невысокого порядка рассмотренные выше два способа определения размерности модели дают одинаковый результат, который во многих случаях совпадает с размерностью системы, генерирующей данные. При большой погрешности исходных данных ($\varepsilon = 0.1$) качество получаемой модели, как показывает сравнение переходных процессов (см. рис. 6), недостаточно высокое. Для улучшения этого результата следует использовать более эффективные алгоритмы параметрической идентификации, описанные, например, в [11], или вместо МНК и его обобщений разработать новые методы параметрической идентификации с более качественной фильтрацией.

При идентификации сложных систем, как показывают вычислительные эксперименты, найти можно только приближенное регуляризованное решение,

размерность которого меньше размерности исследуемой системы. Большое значение при этом имеют структурные особенности системы и информативность входного сигнала. При плохой управляемости, наблюдаемости или при наличии у системы, генерирующей данные, близко расположенных собственных значений размерность модели может оказаться существенно меньшей. Важно при этом, насколько входное воздействие способно возбудить каждую моду системы. Это хорошо видно из графиков, иллюстрирующих зависимость минимального сингулярного числа матриц $\Phi(n, N)$ от n , а также из табл. 1. В этом случае сингулярные числа с ростом размерности монотонно убывают, т.е. отсутствует выход значений на минимальное постоянное значение. Как видно из табл. 1, начиная с $n = 7$ имеем сильное влияние неточностей в данных. Тогда при точных данных можно использовать модель редуцированного порядка, переходный процесс которой мало отличается от исходной системы (см. рис. 7). Естественно, что с увеличением погрешности оба способа нахождения размерности модели дают равную или меньшую по отношению к редуцированной модели размерность. При этом качество модели, получаемой при параметрической идентификации, ухудшается с увеличением ε . Для достаточно больших ε в выбранном интервале $[n_{\min} : n_{\max}]$ графики левых и правых частей (14) и (20) могут не пересекаться, т.е. в этом случае нельзя установить размерность модели. Это соответствует случаю, когда по исходным данным нельзя получить качественную модель, поскольку влияние шумов становится существенным. Следовательно, необходимо развить другие подходы к проблеме идентификации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идентификация с нахождением приближенного регуляризованного решения открывает новые возможности для практического применения развиваемого в настоящей работе подхода. Так, на практике не всегда возможно реализовать постоянно возбуждающее воздействие, приемлемое для исследуемой системы, особенно в пассивных экспериментах [2–4]. Реализованная в эксперименте $u(t)$ может быть представлена в виде разложения по системе линейно независимых функций, т.е. в виде суммы некоторых функций. Выделим из них подсистему функций, для каждой из которых ОСШ больше единицы. Тогда отклик модели, найденной с помощью предложенного метода идентификации с регуляризацией, будет близок к отклику системы на любое входное воздействие из множества, являющегося линейной комбинацией функций данной подсистемы [1]. Такая модель является адекватной системе только на рассмотренном выше множестве входных воздействий. Динамические характеристики приближенных моделей могут существенно отличаться от характеристики полной точной модели, если таковая существует. Это относится и к конечному числу данных на ограниченных интервалах и не очень больших ОСШ. Поэтому не исключается возможность применения описанных в статье подходов и методов к адаптивной идентификации на скользящих интервалах динамического процесса. Тогда целесообразно рассматривать два примыкающих один к другому скользящих интервала. На интервале слева от общей точки будет решаться описанными методами задача адаптивной идентификации, а на интервале вперед — задача прогноза или управления с использованием, например, эффективного для таких случаев управления по прогнозу (известное как *model predictive control* — MPC) [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ljung L. System identification: Theory for the user. Prentice-Hall, 1999. 609 p.
2. Söderström T., Stoica P. System identification. Hemel Hempstead, U.K.: Prentice-Hall International, 1989. 612 p.
3. Van Overschee P., De Moor B. Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica*. 1993. Vol. 29, N 3. P. 649–660.
4. Van Overschee P., De Moor B. Subspace identification for linear systems. Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1996. 254 p.
5. Zhang E., Pintelon R. Identification of multivariable dynamic errors-in-variables system with arbitrary inputs. *Automatica*. 2017. Vol. 82, N 8. P. 69–78.
6. Söderström T. Errors-in-variables methods in system identification. Cham: Springer, 2018. 485 p.
7. Hong M., Söderström T., Zheng W.X. Accuracy analysis of bias-eliminating least square estimates for errors-in-variables identification. *Automatica*. 2007. Vol. 43, N 9. P. 1590–1596.
8. Söderström T. Accuracy analysis of the Frisch scheme for identifying errors-in-variables systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 2007. Vol. 52, Iss. 6. P. 985–997.
9. Söderström T. Errors-in-variables methods in system identification. *Automatica*. 2007. Vol. 43, N 6. P. 939–958.
10. Kleiberg D., Söderström T., Yang-Wallentin F. Errors-in-variables system identification using structural equation modeling. *Automatica*. 2016. Vol. 66, N 4. P. 218–230.
11. Hyundeok Kang, Guoxiang Gu, Wei Xing Zheng. A graph subspace approach to system identification based on errors-in-variables system models. *Automatica*. 2019. Vol. 109, N 11. Article 108535.
12. Norton J.P. Identification of parameter bounds for ARMAX models from records with bonded noise. *International Journal of Control*. 1987. Vol. 45, N 2. P. 375–390.
13. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никитенко А.С. Решение системы линейных уравнений с неопределенностью в обеих частях. *Кибернетика*. 1988. № 4. С. 47–52.
14. Veres S.M., Norton J.P. Parameter-bounding algorithms for linear errors-in-variables models. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter É. (Eds.). *Bounding Approaches to System Identification*. Boston, MA: Springer, 1996. P. 275–288.
15. Cerone V. Parameter bounds for ARMAX models from records with bounded errors in variables. *International Journal of Control*. 1993. Vol. 57, N 1. P. 225–235.
16. Назин С.А., Поляк Б.Т. Параметрическое оценивание методом эллипсоидов в линейных многомерных системах с неопределенным описанием модели. *Автоматика и телемеханика*. 2007. № 6. С. 67–80.
17. Cerone V., Regruto D. Set-membership error-in-variables identification through convex relaxation techniques. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 2012. Vol. AC-57, N 2. P. 517–522.
18. Casini M., Garulli A., Vicino A. Feasible parameter set approximation for linear models with bounded uncertain regressors. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 2014. Vol. AC-59, N 11. P. 2910–2920.
19. Kremenetskiy I.A., Salnikov N.N. Nonstochastic approach to determining the dimension and parameters of linear autoregressive models by the input and output variables measurements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, N 1. P. 19–31.
20. Salnikov N.N. Accuracy of estimation of parameters of linear regression on errors in variables. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, N 11. P. 18–30.
21. Salnikov N.N., Siryk S.V. Parameter estimation algorithm of the linear regression with bounded noise in measurements of all variables. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, N 4. P. 1–15.
22. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1974. 430 с.
23. Губарев В.Ф., Фатенко В.В. Геометрический и вариационные методы редукции порядка модели. Сравнительный анализ. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 38–52.
24. Губарев В.Ф. Моделивання та ідентифікація складних систем. Київ: Наук. думка, 2014. 248 с.
25. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999. 548 с.

26. Soverini U., Söderström T. Frequency domain EIV identification combining the Frisch scheme and Yule–Walker equations. *Proc. of European Control Conf.* (Lin, Austria, 2015). P. 2038–2043.
27. Rawlings J.B., Mayne D.Q. Model predictive control: Theory and design. Nob Hill Publishing, Madison, WI, 2009.

Надійшла до редакції 22.12.2020

В.Ф. Губарев, М.М. Сальников, С.В. Мельничук
РЕГУЛЯРИЗОВАНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ
В КЛАСІ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

Анотація. Розглянуто проблему ідентифікації складних дискретних систем в класі моделей лінійної регресії. За наявності похибок в даних відповідна задача ідентифікації у більшості випадків є некоректно поставленою. В умовах обмеженої невизначеності наявних даних запропоновано знаходити наближений регуляризований розв'язок і як регуляризаційний параметр використовувати розмірність моделі. Розроблено та досліджено два способи знаходження розмірності моделі, що дають змогу знаходити наближений розв'язок задачі ідентифікації, узгоджений за точністю з похибкою даних. На основі чисельного моделювання виконано дослідження розроблених способів ідентифікації та наведено оцінку їхньої ефективності.

Ключові слова: ідентифікація, лінійна регресія, складна система, регуляризація, знаходження розмірності моделі, сингулярний розклад, чисельне моделювання.

V.F. Gubarev, N.N. Salnikov, S.V. Melnychuk
IDENTIFICATION OF REGULARIZED MODELS IN THE LINEAR REGRESSION CLASS

Abstract. Identification of complex discrete systems in the class of linear regression models is considered. The problem of identifying an exact model on noisy initial data is known to be ill-posed. This is especially significant when using high-dimensional models. Within the guaranteed approach to uncertainty used in the article, it is proposed to use the dimension of the model as a regularization parameter. Here we suggested and tested two techniques for estimating optimal dimension and parameters of linear regression model to ensure its consistency in accuracy with the data error. Numerical simulations were carried out and their efficiency was evaluated.

Keywords: identification, linear regression, complex system, regularization, model dimension estimation, SVD, simulation.

Губарев В'ячеслав Федорович,
чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, професор, завідувач відділу Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ, e-mail: v.f.gubarev@gmail.com.

Сальников Микола Миколайович,
доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ, e-mail: salnikov.nikolai@gmail.com.

Мельничук Сергій Вікторович,
кандидат техн. наук, старший науковий співробітник Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ, e-mail: sergvik@ukr.net.