УДК 519.21

М.М. ЛУЗ
BNP Paribas Cardif, Україна,
e-mail: *maksim_luz@ukr.net*.

М.П. МОКЛЯЧУК
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *moklyachuk@gmail.com.*

МІНІМАКСНА ФІЛЬТРАЦІЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З ПЕРІОДИЧНО СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ

Анотація. Розглянуто задачу оптимальної фільтрації функціоналів, що залежать від невідомих значень стохастичної послідовності з періодично стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності зі стаціонарним шумом. Для послідовностей з визначеними спектральними щільностями отримано формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів. Запропоновано формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналів у тому випадку, коли спектральні щільності послідовності точно не відомі, тоді як визначені множини допустимих спектральних щільностей.

Ключові слова: періодично стаціонарні прирости, мінімаксно-робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність.

ВСТУП

Упродовж останнього десятиліття моделі з довгою пам'яттю та нестаціонарні моделі постійно перебувають у полі зору дослідників (див., наприклад, [1–3]). Ці моделі використовують для аналізу даних із різних галузей економіки, фінансів, кліматології, забруднення повітря, а також під час оброблення сигналів. З моменту першого видання [4] моделі інтегрованої авторегресії рухомого середнього (ARIMA) є стандартним інструментом аналізу часових рядів. Добре зарекомендували себе моделі, які містять дробове інтегрування. У [5] досліджено сезонну модель ARFIMA та проаналізовано її застосування до монетарної політики Федерального резерву США. Інший тип нестаціонарності описано періодично корельованими або циклостаціонарними процесами, визначеними в [6]. Ці процеси широко використовують для оброблення сигналів [7]. Періодичні часові ряди можна розглядати як продовження моделі SARIMA [8, 9]. Наведені моделі використовують для оцінювання параметрів моделі та задач прогнозування.

Зауважимо, що безпосереднє застосування розроблених результатів до реальних даних може призвести до значного збільшення значень похибок оцінок через наявність похибок вимірювань, неповної інформації про спектр тощо. Це є причиною підвищення інтересу до робастних методів оцінювання, які є обґрунтованими в таких випадках. Так, наприклад, у [10] запропоновано робастний метод оцінювання параметрів моделі SARFIMA та проілюстровано його застосування для прогнозування концентрацій забруднювачів — діоксиду сірки SO_2.

Робастні методи успішно застосовують для розв'язання задач оцінювання лінійних функціоналів від невідомих стохастичних процесів. У [11] вперше була сформульована як гра двох гравців і розв'язана задача мінімаксної екстраполяції стаціонарних процесів. Огляд результатів з робастних методів аналізу даних зроблено в [12]. Останні результати з мінімаксного оцінювання для стаціонарних процесів, періодично корельованих процесів та процесів зі стаціонарними приростами наведено в [13–18].

У цій статті описано методи розв'язання задачі оптимального оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)\xi(-k)$, який залежать від невідомих значень стохастичної послідовності $\xi(k)$ з періодично стаціонарними приростами. Оцінки будуються за спостереженнями послідовності $\xi(k)+\eta(k)$ у точках $k=0,-1,-2,\ldots$, де $\eta(k)$ — некорельована з послідовністю $\xi(k)$ стаціонарна стохастична послідовність.

СТОХАСТИЧНІ ПОСЛІДОВНОСТІ З ПЕРІОДИЧНО СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ

Наведемо короткий огляд спектральної теорії стохастичних послідовностей з періодично стаціонарними приростами порядку *n*.

Розглянемо стохастичну послідовність $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$. Позначимо B_μ оператор зсуву з кроком $\mu\in\mathbb{Z}$ таким, що $B_\mu\xi(m)=\xi(m-\mu)$; $B:=B_1$. Запишемо таке означення [14].

Означення 1. Для стохастичної послідовності $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$ послідовність

$$\xi^{(n)}(m,\mu)=(1-B_\mu)^n\xi(m)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\xi(m-l\mu),\quad \binom{n}{l}=\frac{n!}{l!(n-l)!},\qquad (1)$$

називається стохастичною послідовністю приростів порядку n з кроком $\mu\in\mathbb{Z}$.

Така послідовність задовольняє співвідношення:

$$\xi^{(n)}(m,-\mu)=(-1)^n\xi^{(n)}(m+n\mu,\mu),$$

$$\xi^{(n)}(m,k\mu)=\sum_{l=0}^{(k-1)n}A_l\xi^{(n)}(m-l\mu,\mu),\quad k\in\mathbb{N},$$

де коефіцієнти $\{A_l, l=0,1,2,\ldots,(k-1)n\}$ обчислюються за формулою

$$(1+x+\ldots+x^{k-1})^n=\sum_{l=0}^{(k-1)n}A_lx^l.$$

Означення 2. Послідовність $\xi^{(n)}(m,\mu)$ приростів порядку n, яка породжена стохастичною послідовністю $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$, є стаціонарною, якщо математичні сподівання

$$\mathsf{E}\xi^{(n)}(m_0,\mu)=c^{(n)}(\mu),$$

$$\mathsf{E}\,\xi^{(n)}(m_0+m,\mu_1)\xi^{(n)}(m_0,\mu_2)=D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$$

існують для всіх m_0,μ,m,μ_1,μ_2 і не залежать від m_0. Функція $c^{(n)}(\mu)$ називається середнім значенням послідовності $\xi^{(n)}(m,\mu)$, а функція $D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$ — структурною функцією послідовності (або структурною функцією *n*-го порядку стохастичної послідовності $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$). Стохастична послідовність $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$, яка визначає стаціонарну послідовність приростів порядку *n* за формулою (1), називається стохастичною послідовністю зі стаціонарними приростами порядку *n* (або інтегрованою послідовністю порядку n).

Теорема 1. Середнє значення $c^{(n)}(\mu)$ та структурну функцію $D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$ стохастичної стаціонарної послідовності $\xi^{(n)}(m,\mu)$ приростів порядку n можна представити у вигляді

$$c^{(n)}(\mu)=c\mu^n, \tag{2}$$

$$D^{(n)}(m;\mu_1,\mu_2)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\mu_1\lambda})^n(1-e^{i\mu_2\lambda})^n \frac{1}{\lambda^{2n}}dF(\lambda), \tag{3}$$

де c — константа, $F(\lambda)$ — неперервна зліва неспадна обмежена функція, така що $F(-\pi)=0$.

Стала c і функція $F(\lambda)$ визначаються однозначно послідовністю приростів $\xi^{(n)}(m,\mu)$. З іншого боку, функції $c^{(n)}(\mu)$ (2) і $D^{(n)}(m;\mu_1,\mu_2)$ (3) з функцією $F(\lambda)$, яка задовольняє зазначені умови, є середнім значенням і структурною функцією стаціонарної послідовності $\xi^{(n)}(m,\mu)$ приростів порядку n.

Надалі будемо називати спектральною функцією та спектральною щільністю стохастичної послідовності зі стаціонарними приростами спектральну функцію та спектральну щільність відповідної стаціонарної послідовності приростів.

Використовуючи представлення (3) та теорему Кархунена [19], можна отримати спектральне зображення стаціонарної послідовності приростів $\xi^{(n)}(m,\mu)$

$$\xi^{(n)}(m,\mu)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\mu\lambda})^n \frac{1}{(i\lambda)^n}dZ_{\xi^{(n)}}(\lambda), \tag{4}$$

де $Z_{\xi^{(n)}}(\lambda)$ — стохастичний процес з некорельованими приростами, пов'язаний зі спектральною функцією $F(\lambda)$ співвідношенням

$$\mathsf{E}|Z_{\xi^{(n)}}(\lambda_2)-Z_{\xi^{(n)}}(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)<\infty,\ -\pi\le\lambda_1<\lambda_2<\pi.$$

Означення 3. Стохастична послідовність $\{\xi(m), m\in\mathbb{Z}\}$ називається послідовністю з періодично стаціонарними (періодично корельованими) приростами з періодом T, якщо стаціонарною є послідовність приростів порядку n

$$\xi^{(n)}(m,\mu T)=(1-B_{\mu T})^n\xi(m).$$

З означення 3 випливає, що послідовність

$$\xi_p(m)=\xi(mT+p-1),\quad p=1,2,\ldots,T,\quad m\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

утворює векторну послідовність $\vec{\xi}(m)=\{\xi_p(m)\}_{p=1,2,\ldots,T}$, $m\in\mathbb{Z}$, зі стаціонарними приростами порядку n. Дійсно, для всіх $p=1,2,\ldots,T$

$$\xi_p^{(n)}(m,\mu)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\xi_p(m-l\mu)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\xi((m-l\mu)T+p-1)=$$

$$=\xi^{(n)}(mT+p-1,\mu T),$$

де $\xi_p^{(n)}(m,\mu)$ — приріст порядку n компоненти $\xi_p(m)$, $p=1,2,\ldots,T$, векторної послідовності $\vec{\xi}(m)$.

Теорема 2. Структурну функцію $D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$ векторної стаціонарної послідовності приростів порядку n можна представити у вигляді

$$D^{(n)}(m; \mu_1, \mu_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} (1 - e^{-i\mu_1 \lambda})^n (1 - e^{i\mu_2 \lambda})^n \frac{1}{\lambda^{2n}} dF(\lambda), \qquad (6)$$

де $F(\lambda)$ — матричнозначна спектральна функція стаціонарної послідовності $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$.

Використовуючи представлення (6) та теорему Кархунена [19], можна отримати спектральне зображення послідовності приростів $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$:

$$\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} (1 - e^{-i\mu\lambda})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}}(\lambda), \qquad (7)$$

де $\vec{Z}_{\xi^{(n)}}(\lambda) = \{Z_p(\lambda)\}_{p=1}^{T}$ — (векторнозначний) стохастичний процес з некорельованими приростами на $[-\pi, \pi)$, який позв'язаний зі спектральною функцією $F(\lambda)$ співвідношенням

$$\mathsf{E}(Z_p(\lambda_2) - Z_p(\lambda_1))\overline{(Z_q(\lambda_2) - Z_q(\lambda_1))} = F_{pq}(\lambda_2) - F_{pq}(\lambda_1), -\pi \le \lambda_1 < \lambda_2 < \pi.$$

МЕТОД ФІЛЬТРАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛІВ, ЩО БАЗУЄТЬСЯ НА ВЛАСТИВОСТЯХ ПРОЄКЦІЙ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянемо векторну стохастичну послідовність $\vec{\xi}(m)$ зі стаціонарними приростами, побудовану з послідовності $\xi(m)$ за допомогою перетворення (5). Нехай стаціонарна послідовність $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu) = \{\xi_p^{(n)}(m, \mu)\}_{p=1}^{T}$ приростів порядку n має абсолютно неперервну спектральну функцію $F(\lambda)$ і спектральну щільність $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$. Нехай $\vec{\eta}(m) = \{\eta_p(m)\}_{p=1}^{T}$ — некорельована з послідовністю $\vec{\xi}(m)$ стаціонарна стохастична послідовність з абсолютно неперервною спектральною функцією $G(\lambda)$ та спектральною щільністю $g(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$. Будемо вважати, що середні значення послідовності $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$ приростів та стаціонарної послідовності $\vec{\eta}(m)$ дорівнюють нулю. Також вважатимемо, що крок приросту $\mu > 0$.

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\vec{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} (\vec{a}(k))^{\mathrm{T}} \vec{\xi}(-k), \qquad (8)$$

що залежить від невідомих значень стохастичної послідовності $\vec{\xi}(k) = \{\xi_p(k)\}_{p=1}^{T}$ зі стаціонарними приростами. Оцінки базуються на спостереженнях послідовності $\vec{\zeta}(m) = \vec{\xi}(m) + \vec{\eta}(m)$ у точках $m = 0, -1, -2, \ldots$

Насамперед наведемо умови, які необхідні для розв'язання цієї задачі.

Припустимо, що коефіцієнти $\vec{a}(k) = \{a_p(k)\}_{p=1}^{T}$, $k \ge 0$, які визначають функціонал (8), задовольняють умови

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\vec{a}(k)\| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \|\vec{a}(k)\|^2 < \infty, \qquad (9)$$

а також, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\left[\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}\right]d\lambda < \infty. \tag{10}$$

Ця умова є необхідною і достатньою для того, щоб середньоквадратична похибка оптимальної оцінки функціонала $A\vec{\xi}$ не дорівнювала нулю.

Метод оцінювання, який використовує властивості проєкцій у Гільбертовому просторі, запропонував Колмогоров [20]. Цей метод можна описати, як трьохетапну процедуру:

1) визначити цільовий елемент Гільбертового простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, який потрібно оцінити;

2) визначити підпростір простору H, який породжений спостереженнями;

3) знайти оцінку цільового елемента як ортогональну проєкцію на визначений підпростір.

Етап 1. Функціонал $A\vec{\xi}$ не належить Гільбертовому простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. За допомогою наведеної далі леми опишемо зображення функціонала $A\vec{\xi}$ як суми функціонала зі скінченним другим моментом, що належить простору H, і функціонала, що залежить від спостережень послідовності $\vec{\zeta}(k)$ («початкові значення»).

Лема 1. Функціонал $A\vec{\xi}$ можна представити у такому вигляді:

$$A\vec{\xi} = A\vec{\zeta} - A\vec{\eta},$$

$$A\vec{\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} (\vec{a}(k))^{\mathrm{T}} \vec{\zeta}(-k), \quad A\vec{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} (\vec{a}(k))^{\mathrm{T}} \vec{\eta}(-k).$$

За умов (9) функціонал $A\vec{\eta}$ має скінченний другий момент. Для знаходження оцінки функціонала $A\vec{\xi}$ достатньо знайти оцінку функціонала $A\vec{\eta}$. Нехай $\Delta(f, g; \hat{A}\vec{\xi}) = \mathsf{E}|A\vec{\xi} - \hat{A}\vec{\xi}|^2$ позначає середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\xi}$ функціонала $A\vec{\xi}$ і нехай $\Delta(f, g; \hat{A}\vec{\eta}) := \mathsf{E}|A\vec{\eta} - \hat{A}\vec{\eta}|^2$ позначає середньоквадратичну похибку оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\eta}$ функціонала $A\vec{\eta}$. Оскільки функціонал $A\vec{\zeta}$ залежить від значень стохастичної послідовності, що спостерігаються, можемо записати такі співвідношення:

$$\hat{A}\vec{\xi} = A\vec{\zeta} - \hat{A}\vec{\eta}, \tag{11}$$

$$\Delta(f, g; \hat{A}\vec{\xi}) = \mathsf{E}|A\vec{\xi} - \hat{A}\vec{\xi}|^2 = \mathsf{E}|A\vec{\zeta} - A\vec{\eta} - A\vec{\zeta} + \hat{A}\vec{\eta}|^2 = \mathsf{E}|A\vec{\eta} - \hat{A}\vec{\eta}|^2 =$$
$$= \Delta(f, g; \hat{A}\vec{\eta}). \tag{12}$$

Щоб знайти оптимальну оцінку функціонала $A\vec{\eta}$, використовуємо спектральні розклади стаціонарної послідовності $\vec{\eta}(m) = \{\eta_p(m)\}_{p=1}^{T}$, стаціонарної послідовності $\vec{\eta}^{(n)}(m, \mu)$ приростів та застосовуємо метод проєкції у Гільбертовому просторі [20].

Стаціонарна стохастична послідовність $\vec{\eta}(m)$ допускає спектральне розкладання

$$\vec{\eta}(m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} d\vec{Z}_{\eta}(\lambda),$$

а послідовність приростів $\vec{\eta}^{(n)}(m,\mu)$ допускає спектральне розкладання

$$\vec{\eta}^{(n)}(m,\mu)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \, d\vec{Z}_{\eta}(\lambda),$$

де $\vec{Z}_{\eta}(\lambda)$ — стохастичний процес із некорельованими приростами, що відповідає спектральній функції $G(\lambda)$. Між випадковими процесами $\vec{Z}_{\eta}(\lambda)$ та $\vec{Z}_{\eta^{(n)}}(\lambda)$ існує залежність, задана співвідношенням [14]

$$d\vec{Z}_{\eta^{(n)}}(\lambda)=(i\lambda)^n \, d\vec{Z}_{\eta}(\lambda), \quad \lambda\in[-\pi,\pi).$$

З урахуванням спектральних розкладів (4), (7) стаціонарна послідовність приростів $\vec{\zeta}^{(n)}(m,\mu)$ допускає спектральне розкладання

$$\vec{\zeta}^{(n)}(m,\mu)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}}(\lambda)+\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \, d\vec{Z}_{\eta}(\lambda).$$

Спектральна щільність $p(\lambda)$ послідовності $\vec{\zeta}(m)$ становить $p(\lambda)=f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)$.

Етап 2. Позначимо: $H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)}+\eta_{\mu}^{(n)})$ — замкнутий лінійний підпростір, породжений значеннями $\{\xi_p^{(n)}(k,\mu)+\eta_p^{(n)}(k,\mu): p=1,\dots,T; k=0,-1,-2,-3,\dots\}$ у Гільбертовому просторі $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ випадкових величин γ із нульовим середнім значенням, $\mathsf{E}\gamma=0$, скінченною дисперсією, $\mathsf{E}|\gamma|^2<\infty$, та скалярним добутком $(\gamma_1;\gamma_2)=\mathsf{E}\gamma_1\overline{\gamma_2}$; $L_2^{0-}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))$ — замкнутий лінійний підпростір у Гільбертовому просторі $L_2(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))$ векторних функцій із скалярним добутком $\langle g_1;g_2\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(g_1(\lambda))^{\mathrm{T}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))\overline{g_2(\lambda)}\,d\lambda$, породжений функціями $e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n}\boldsymbol{\delta}_l$, $\boldsymbol{\delta}_l=\{\delta_{lp}\}_{p=1}^T$, $l=1,\dots,T$, $k=0$, $-1,-2\dots$, де δ_{lp} — символ Кронекера.

Співвідношення

$$\vec{\xi}^{(n)}(k,\mu)+\vec{\eta}^{(n)}(k,\mu)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda)$$

визначає взаємно однозначну відповідність між елементами $e^{i\lambda k}(1-e^{-i\lambda\mu})^n(i\lambda)^{-n}$ простору $L_2^{0-}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))$ та елементами $\vec{\xi}^{(n)}(k,\mu)+\vec{\eta}^{(n)}(k,\mu)$ простору $H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)}+\eta_{\mu}^{(n)})$.

Із співвідношення (11) випливає, що лінійну оцінку $\hat{A}\vec{\xi}$ функціонала $A\vec{\xi}$ можна навести у вигляді

$$\hat{A}\vec{\xi}=\sum_{k=0}^{\infty}(\vec{a}(k))^{\mathrm{T}}(\vec{\xi}(-k)+\vec{\eta}(-k))-\int_{-\pi}^{\pi}(\vec{h}_{\mu}(\lambda))^{\mathrm{T}} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda), \tag{13}$$

де $\vec{h}_{\mu}(\lambda)=\{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ — спектральна характеристика оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\eta}$.

Етап 3. Знаходимо середньоквадратично оптимальну оцінку як проєкцію $\hat{A}\vec{\eta}$ елемента $A\vec{\eta}$ на підпростір $H^{0-}(\xi_\mu^{(n)}+\eta_\mu^{(n)})$. Ця проєкція визначається двома умовами:

1) $\hat{A}\vec{\eta}\in H^{0-}(\xi_\mu^{(n)}+\eta_\mu^{(n)})$;

2) $(A\vec{\eta}-\hat{A}\vec{\eta})\perp H^{0-}(\xi_\mu^{(n)}+\eta_\mu^{(n)})$.

З умови 2 випливає співвідношення, яке справедливе для всіх $k=0,-1,-2,\ldots$, а саме:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g(\lambda)(-i\lambda)^n-(\vec{h}_\mu(\lambda))^{\mathrm{T}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))]\frac{(1-e^{i\lambda\mu})^n}{(-i\lambda)^n}e^{-i\lambda k}d\lambda=0.$$

Це співвідношення дає змогу отримати спектральну характеристику $\vec{h}_\mu(\lambda)$ оцінки $\hat{A}\vec{\eta}$:

$$(\vec{h}_\mu(\lambda))^{\mathrm{T}}=(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g(\lambda)(-i\lambda)^n(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}-$$

$$-\frac{(-i\lambda)^n(\vec{C}_\mu(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1},$$

$$\vec{A}(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{\infty}\vec{a}(k)e^{-ik\lambda},\quad \vec{C}_\mu(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{\infty}\vec{c}_\mu(k)e^{i(k+1)\lambda},$$

де $\vec{c}(k)=\{c_p(k)\}_{p=1}^{T},k\geq 0$, — невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти.

З умови 1 випливає, що спектральна характеристика $\vec{h}_\mu(\lambda)$ допускає зображення:

$$\vec{h}_\mu(\lambda)=\vec{h}(\lambda)(1-e^{-i\lambda\mu})^n\frac{1}{(i\lambda)^n},\quad \vec{h}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\vec{s}(k)e^{-i\lambda k},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\vec{h}(\lambda))^{\mathrm{T}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))(\vec{h}(\lambda))\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{\lambda^{2n}}d\lambda<\infty,\qquad \frac{(i\lambda)^n\vec{h}_\mu(\lambda)}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}\in L_2^{0-}.$$

Це зображення спектральної характеристики $\vec{h}_\mu(\lambda)$ дає змогу записати співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi}[(\vec{A}(e^{i\lambda})^{\mathrm{T}}g(\lambda)\frac{(\lambda)^{2n}}{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}-$$

$$-\frac{\lambda^{2n}(\vec{C}_\mu(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}}{|1-e^{-i\lambda\mu}|^{2n}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}]e^{-ij\lambda}d\lambda=0,\ j\geq 1. \tag{14}$$

Обчислимо для всіх $k,j\in\mathbb{Z}$ коефіцієнти Фур'є відповідних функцій

$$S_{k,j}^{\mu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\lambda(j+k)}\frac{\lambda^{2n}g(\lambda)}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}d\lambda,\ k\geq 0,\ j\geq -\mu n;$$

$$P_{k,j}^{\mu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(j-k)}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}d\lambda,\ k,j\geq 0;$$

$$Q_{k,j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(j-k)}f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}d\lambda,\ k,j\geq 0.$$

Використовуючи ці коефіцієнти Фур'є, співвідношення (14) можна записати як систему лінійних рівнянь

$$\sum_{m=-\mu n}^{\infty}S_{j+1,m}^{\mu}\vec{a}_{-\mu}(m)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{j+1,k+1}^{\mu}\vec{c}_{\mu}(k),\ \ j\geq 0,$$

для обчислення невідомих коефіцієнтів $\vec{c}_{\mu}(k),\ k\geq 0.$ Тут

$$\vec{a}_{-\mu}(m)=\sum_{l=\max\left\{\left[-\frac{m}{\mu}\right]',0\right\}}^{n}(-1)^{l}\binom{n}{l}\vec{a}(m+\mu l),\ \ m\geq-\mu n, \tag{15}$$

де $[x]'$ — найменше ціле число серед чисел, більших або рівних x.

Цю систему можна записати так:

$$\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu}=\mathbf{P}_{\mu}\mathbf{c}_{\mu},$$

де $\mathbf{c}_{\mu}=((c_{\mu}(0))^{\mathrm{T}},(c_{\mu}(1))^{\mathrm{T}},(c_{\mu}(2))^{\mathrm{T}},\dots)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_{\mu}=((\vec{a}_{\mu}(0))^{\mathrm{T}},\ (\vec{a}_{\mu}(1))^{\mathrm{T}},\ (\vec{a}_{\mu}(2))^{\mathrm{T}},\dots)^{\mathrm{T}},$ $\vec{a}_{\mu}(k)=\vec{a}_{-\mu}(k-\mu n),\ k\geq 0,$ обчислюються за формулою (15), $\mathbf{P}_{\mu}$, $\mathbf{S}_{\mu}$ — лінійні оператори у просторі ℓ_2, які задаються матрицями з $T\times T$ елементами $(\mathbf{P}_{\mu})_{l,k}=P_{l,k}^{\mu},\ l,k\geq 0,\ (\mathbf{S}_{\mu})_{l,k}=S_{l+1,k-\mu n}^{\mu},\ l,k\geq 0.$

Отже, невідомі коефіцієнти $\vec{c}_{\mu}(k),\ k\geq 0,$ які визначають спектральну характеристику $\vec{h}_{\mu}(\lambda),$ обчислюються за формулою

$$\vec{c}_{\mu}(k)=(\mathbf{P}_{\mu}^{-1}\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu})_k,\quad k\geq 0,$$

де $(\mathbf{P}_{\mu}^{-1}\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu})_k,\ \ k\geq 0,$ — k-й елемент вектора $\mathbf{P}_{\mu}^{-1}\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu}.$

Спектральну характеристику $\vec{h}_{\mu}(\lambda)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\xi}$ функціонала $A\vec{\xi}$ можна обчислити за формулою

$$(\vec{h}_{\mu}(\lambda))^{\mathrm{T}}=(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g(\lambda)(-i\lambda)^{n}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}-$$
$$-(-i\lambda)^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{P}_{\mu}^{-1}\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu})_k e^{i(k+1)\lambda}\right)^{\mathrm{T}}(1-e^{i\lambda\mu})^{-n}\ (f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}. \tag{16}$$

Значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}\vec{\xi}$ обчислюється за формулою

$$\Delta(f,g;\hat{A}\vec{\xi})=\Delta(f,g;\hat{A}\vec{\eta})=\mathsf{E}\,|A\vec{\eta}-\hat{A}\vec{\eta}|^{2}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^{n}(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g(\lambda)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{P}_{\mu}^{-1}\mathbf{S}_{\mu}\mathbf{a}_{\mu})_k e^{i(k+1)\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\right]\times$$

$$\times(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}f(\lambda)(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}\times$$

$$\times\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}(e^{-i\lambda})g(\lambda)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu)_k e^{i(k+1)\lambda}\right)\right]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}f(\lambda)+\right.$$

$$\left.+(\lambda)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu)_k e^{i(k+1)\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\right]\times$$

$$\times(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}g(\lambda)(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda))^{-1}\times$$

$$\times\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}(e^{-i\lambda})f(\lambda)+(\lambda)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu)_k e^{i(k+1)\lambda}\right)\right]d\lambda=$$

$$=\left\langle\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu,\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu\right\rangle+\left\langle\mathbf{Q}\mathbf{a},\mathbf{a}\right\rangle, \tag{17}$$

де $\mathbf{a}=((\vec{a}(0))^{\mathrm{T}},(\vec{a}(1))^{\mathrm{T}},(\vec{a}(2))^{\mathrm{T}},\dots)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Q}$ — лінійний оператор у просторі ℓ_2, що визначений матрицею з $T\times T$ елементами $(\mathbf{Q})_{l,k}=Q_{l,k}$, $l,k\ge 0$; $\left\langle x,y\right\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\bar{y}(k)$ для векторів $x=(x(0),x(1),x(2),\dots)^{\mathrm{T}}$, $y=(y(0),y(1),y(2),\dots)^{\mathrm{T}}$.

Теорема 3. Нехай стохастична послідовність $\{\vec{\xi}(m),m\in\mathbb{Z}\}$ визначає стаціонарну послідовність приростів $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, некорельована з послідовністю $\vec{\xi}(m)$ стаціонарна стохастична послідовність $\{\vec{\eta}(m),m\in\mathbb{Z}\}$ має спектральну щільність $g(\lambda)$ та виконується умова мінімальності (10). Нехай також коефіцієнти $\{\vec{a}(k)\colon k\ge 0\}$ задовольняють умови (9). Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\vec{\xi}$ функціонала $A\vec{\xi}$, який залежить від невідомих значень послідовності $\vec{\xi}(m)$, $m=0,-1,-2,\dots$, на основі спостережень за послідовністю $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\dots$ обчислюється за формулою (13). Спектральна характеристика $\vec{h}_\mu(\lambda)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\xi}$ обчислюється за формулою (16). Значення середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g;\hat{A}\vec{\xi})$ обчислюється за формулою (17).

Як наслідок із запропонованої теореми можна отримати середньоквадратично оптимальну оцінку невідомого значення

$$A_{N,p}\vec{\xi}=\xi_p(N)=(\vec{\xi}(N))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_p,\ \ p=1,2,\dots,T,\ \ N\le 0,$$

стохастичної послідовності зі стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\dots$

Наслідок 1. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{\xi}_p(N)$ невідомого значення $\xi_p(N)$, $p=1,2,\dots,T$, $N\le 0$, стохастичної послідовності зі стаціонарними приростами за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\dots$ обчислюється за формулою

$$\hat{\xi}_p(N) = (\xi_p(N) + \eta_p(N)) - \int_{-\pi}^{\pi} (\vec{h}_{\mu,N,p}(\lambda))^{\mathrm{T}} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda). \qquad (18)$$

Спектральна характеристика $\vec{h}_{\mu,N,p}(\lambda)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$(\vec{h}_{\mu,N,p}(\lambda))^{\mathrm{T}} = (e^{-i\lambda N}\boldsymbol{\delta}_p)^{\mathrm{T}} g(\lambda)(-i\lambda)^n (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} -$$

$$-\frac{(-i\lambda)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n)_k e^{i\lambda(k+1)}\right)^{\mathrm{T}}}{(1-e^{i\lambda\mu})^n} (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1}. \qquad (19)$$

Тут вектор $\mathbf{a}_n = (a_n(0), a_n(1), \ldots, a_n(n), 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}$, $a_n(k) = (-1)^k \binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{S}_{\mu,p}$ — лінійний оператор у просторі ℓ_2, що визначається матрицею з $T \times T$ елементами $(\mathbf{S}_{\mu,p})_{l,k} = S^{\mu}_{l+1,p-\mu k}$, $l \ge 0$, $0 \le k \le n$, та $(\mathbf{S}_{\mu,p})_{l,k} = 0$, $l \ge 0$, $k > n$.

Значення середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$\Delta(f, g; \hat{\xi}_p(N)) = \mathsf{E}|\xi_p(N) - \hat{\xi}_p(N)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}} \left[(1-e^{i\lambda\mu})^n (e^{-i\lambda N}\boldsymbol{\delta}_p)^{\mathrm{T}} g(\lambda) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n)_k e^{i\lambda(k+1)}\right)^{\mathrm{T}}\right] \times$$

$$\times (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} f(\lambda)(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} \Bigg[(1-e^{-i\lambda\mu})^n (e^{i\lambda N}\boldsymbol{\delta}_p) g(\lambda) -$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n)_k e^{i\lambda(k+1)}\right)\Bigg] d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}} \Bigg[(1-e^{i\lambda\mu})^n (e^{-i\lambda N}\boldsymbol{\delta}_p)^{\mathrm{T}} f(\lambda) +$$

$$+(\lambda)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n)_k e^{i\lambda(k+1)}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg] (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} g(\lambda)(f(\lambda) +$$

$$+\lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} \times \Bigg[(1-e^{-i\lambda\mu})^n (e^{i\lambda N}\boldsymbol{\delta}_p) f(\lambda) +$$

$$+(\lambda)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n)_k e^{i\lambda(k+1)}\right)\Bigg] d\lambda = \left\langle \mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n, P_\mu^{-1}\mathbf{S}_{\mu,p}\mathbf{a}_n \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}_0\boldsymbol{\delta}_p, \boldsymbol{\delta}_p \right\rangle. \qquad (20)$$

ФІЛЬТРАЦІЯ СТОХАСТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З ПЕРІОДИЧНО СТАЦІОНАРНИМИ ПРИРОСТАМИ

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(\vartheta)}(k)\vartheta(-k)$, що залежить від невідомих значень стохастичної послідовності $\vartheta(m)$ з періодично стаціонарними приростами.

Оцінки базуються на спостереженнях послідовності $\zeta(m)=\vartheta(m)+\eta(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ Функціонал можна представити у вигляді

$$A\vartheta=\sum_{k=0}^{\infty}a^{(\vartheta)}(k)\vartheta(-k)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{T}a^{(\vartheta)}(mT+p-1)\vartheta(-(mT+p-1))=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{T}a_p(m)\xi_p(-m)=\sum_{m=0}^{\infty}(\vec{a}(m))^{\mathrm{T}}\vec{\xi}(-m)=A\vec{\xi}, \tag{21}$$

де

$$\vec{\xi}(-m)=(\xi_1(-m),\xi_2(-m),\ldots,\xi_T(-m))^{\mathrm{T}},\ \xi_p(-m)=\vartheta(-(mT+p-1)); \tag{22}$$

$$\vec{a}(m)=(a_1(m),a_2(m),\ldots,a_T(m))^{\mathrm{T}},\ a_p(m)=a^{(\vartheta)}(mT+p-1);\ p=1,2,\ldots,T. \tag{23}$$

Теорема 4. Нехай стохастична послідовність $\vartheta(k)$ із періодично стаціонарними приростами генерує за формулою (22) векторну стохастичну послідовність $\vec{\xi}(m)$, що визначає стаціонарну послідовність $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ приростів з матрицею спектральної щільності $f(\lambda)=\{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$. Нехай $\{\vec{\eta}(m), m\in\mathbb{Z}\}$, $\vec{\eta}(m)=(\eta_1(m),\eta_2(m),\ldots,\eta_T(m))^{\mathrm{T}}$, $\eta_p(-m)=\eta(-(mT+p-1))$, $p=1,2,\ldots,T$, — некорельована з послідовністю $\vec{\xi}(m)$ стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $g(\lambda)$, і виконується умова мінімальності (10). Нехай коефіцієнти, що обчислені за формулою (23), задовольняють умови (9). Тоді оптимальна лінійна оцінка функціонала $A\vartheta=A\vec{\xi}$ (21) на основі спостережень послідовності $\zeta(m)=\vartheta(m)+\eta(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ обчислюється за формулою (13). Спектральна характеристика $\vec{h}_{\mu}(\lambda)=\{h_p(\lambda)\}_{p=1}^{T}$ та значення середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g;\hat{A}\vec{\xi})$ оптимальної оцінки $\hat{A}\vec{\xi}$ обчислюються за формулами (16), (17) відповідно.

Як наслідок із запропонованої теореми можна отримати оптимальну оцінку невідомого значення $\vartheta(-M)$, $M\geq 0$, стохастичної послідовності $\vartheta(m)$ з періодично стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності $\zeta(m)=\vartheta(m)+\eta(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ Використовуючи позначення

$$\vartheta(-M)=\vartheta_p(-N)=(\vec{\xi}(-N))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_p,\ N=\left[\frac{M}{T}\right],\ p=M+1-NT,$$

та отримані результати, можна зробити висновок, що виконується такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай стохастична послідовність $\vartheta(k)$ з періодично стаціонарними приростами генерує за формулою (22) векторну стохастичну послідовність $\vec{\xi}(m)$, що визначає стаціонарну стохастичну послідовність $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ приростів із матрицею спектральної щільності $f(\lambda)=\{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$. Нехай $\{\vec{\eta}(m), m\in\mathbb{Z}\}$, $\vec{\eta}(m)=(\eta_1(m),\eta_2(m),\ldots,\eta_T(m))^{\mathrm{T}}$, $\eta_p(-m)=\eta(-(mT+$ $+p-1))$, $p=1,2,\ldots,T$, — некорельована з послідовністю $\vec{\xi}(m)$ стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $g(\lambda)$. Нехай виконується умова мінімальності (10). Оптимальна лінійна оцінка $\hat{\vartheta}(-M)$ невідомого значення $\vartheta(-M)$, $M\geq 0$, стохастичної послідовності з періодично стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності $\zeta(m)=\vartheta(m)+\eta(m)$ у точках

$m = 0, -1, -2, \ldots$ обчислюється за формулою (18). Спектральна характеристика $\vec{h}_{\mu,N,p}(\lambda)$ оцінки обчислюється за формулою (19). Значення середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки обчислюється за формулою (20).

МІНІМАКСНИЙ МЕТОД ФІЛЬТРАЦІЇ

Значення середньоквадратичних похибок та спектральні характеристики оптимальних оцінок функціоналів, які залежать від невідомих значень стохастичної послідовності $\vec{\xi}(m)$, що визначають стаціонарну стохастичну послідовність $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ приростів з матрицею спектральної щільності $f(\lambda)$ на основі спостережень послідовності $\vec{\xi}(m) + \vec{\eta}(m)$ у точках $m = 0, -1, -2, \ldots$, можна обчислити за формулами (16), (17) відповідно за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стохастичних послідовностей $\vec{\xi}(m)$ і $\vec{\eta}(m)$ точно відомі. Однак на практиці спектральні щільності послідовностей зазвичай точно не відомі. Якщо в таких випадках визначається клас допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$, то можна застосовувати мінімаксний (робастний) підхід до оцінки лінійних функціоналів. Цей метод полягає у знаходженні оцінки, яка мінімізує максимальні значення середньоквадратичних похибок для всіх спектральних щільностей з класу $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ допустимих спектральних щільностей одночасно. Для формалізації цього підходу використаємо наведені далі означення.

Означення 4. Для класу спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ спектральні щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$ та $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ називаються найменш сприятливими в класі $\mathcal{D}$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$, якщо виконується співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 5. Для класу спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ спектральну характеристику $h^0(\lambda)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\vec{\xi}$ називають мінімаксною (робастною), якщо виконуються умови

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} L_2^{0-}(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}} \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} \Delta(h^0; f, g).$$

З огляду на наведені означення та виведені співвідношення можемо переконатись, що справедливі такі леми.

Лема 1. Спектральні щільності $f^0 \in \mathcal{D}_f$, $g^0 \in \mathcal{D}_g$, які задовольняють умову (10), є найменш сприятливими в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$, якщо оператори $\mathbf{P}_\mu^0$, $\mathbf{S}_\mu^0$, $\mathbf{Q}^0$, що задаються коефіцієнтами Фур'є функцій

$$\frac{\lambda^{2n} g^0(\lambda)}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))^{-1}, \quad \frac{\lambda^{2n}}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))^{-1},$$

$$f^0(\lambda) g^0(\lambda) (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))^{-1},$$

обчислюють розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g}\left(\left\langle \mathbf{S}_\mu^0\mathbf{a}_\mu, \mathbf{P}_\mu^{-1}\mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu\right\rangle + \langle\mathbf{Qa},\mathbf{a}\rangle\right)=$$

$$=\left\langle \mathbf{S}_\mu\mathbf{a}_\mu, (\mathbf{P}_\mu^0)^{-1}\mathbf{S}_\mu^0\mathbf{a}_\mu\right\rangle + \langle\mathbf{Qa},\mathbf{a}\rangle. \tag{24}$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h_\mu(f^0, g^0)$ обчислюють за формулою (19), якщо $h_\mu(f^0, g^0)\in H_{\mathcal{D}}$.

Детальніший аналіз властивостей найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксно-робастних спектральних характеристик можна зробити, якщо мінімаксна спектральна характеристика h^0 та найменш сприятливі спектральні щільності (f^0, g^0) утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_{\mathcal{D}}\times\mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f^0, g^0)\ge\Delta(h^0; f^0, g^0)\ge\Delta(h^0; f, g)\quad \forall f\in\mathcal{D}_f,\ \forall g\in\mathcal{D}_g,\ h\in H_{\mathcal{D}}$$

справджуються, якщо $h^0 = h_\mu(f^0, g^0)$ і $h_\mu(f^0, g^0)\in H_{\mathcal{D}}$, де (f^0, g^0) — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\widetilde{\Delta}(f,g) = -\Delta(h_\mu(f^0, g^0); f, g)\to\inf,\quad (f,g)\in\mathcal{D}. \tag{25}$$

Тут функціонал $\Delta(h_\mu(f^0, g^0); f, g)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h_\mu(f^0, g^0); f, g)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}[(1-e^{-i\lambda\mu})^n(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g^0(\lambda)-(\vec{C}_\mu^0(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}]\times$$

$$\times(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))^{-1}\times$$

$$\times[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}(e^{-i\lambda})g^0(\lambda)-\vec{C}_\mu^0(e^{-i\lambda})]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}f^0(\lambda)+(\lambda)^{2n}(\vec{C}_\mu^0(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}]\times$$

$$\times(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))^{-1}g(\lambda)(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))^{-1}\times$$

$$\times[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}(e^{-i\lambda})f^0(\lambda)+(\lambda)^{2n}\vec{C}_\mu^0(e^{-i\lambda})]d\lambda,$$

$$\vec{C}_\mu^0(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{\infty}((\mathbf{P}_\mu^0)^{-1}\mathbf{S}_\mu^0\mathbf{a}_\mu)_k e^{i(k+1)\lambda}.$$

Задача на умовний екстремум (25) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)=\widetilde{\Delta}(f,g)+\delta(f,g\,|\,\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g)\to\inf, \tag{26}$$

де $\delta(f,g\,|\,\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g)$ — індикаторна функція множини $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$. Розв'язок (f^0, g^0) цієї задачі на безумовний екстремум характеризується умовою $0\in\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, де $\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ — субдиференціал функціонала $\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)$ у точці $(f^0, g^0)\in\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$. Ця умова дає змогу знаходити найменш сприятливі спектральні щільності у багатьох класах спектральних щільностей $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. Форма функціонала $\Delta(h_\mu(f^0,g^0);f,g)$ зручна для застосування методу невизначених множників Лагранжа для пошуку розв'язків задачі на екстремум (26). Використовуючи метод множників Лагранжа та форму субдиференціалів індикаторних функцій $\delta(f,g\,|\,\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g)$ множин $\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ спектральних щільностей, знаходимо співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей (див. [14, 15, 17]).

НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ СПЕКТРАЛЬНІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСАХ $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_V^U$

Розглянемо задачу фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$, який залежить від невідомих значень послідовності зі стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ за умови, що множини допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D}_{f0}^k, \mathcal{D}_{Vg}^{Uk}, k=1,2,3,4$, визначаються так:

$$\mathcal{D}_{f0}^1=\{f(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}f(\lambda)\,d\lambda=P\},$$

$$\mathcal{D}_{f0}^2=\{f(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}\mathrm{Tr}[f(\lambda)]\,d\lambda=p\},$$

$$\mathcal{D}_{f0}^3=\{f(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}f_{kk}(\lambda)\,d\lambda=p_k,\, k=\overline{1,T}\},$$

$$\mathcal{D}_{f0}^4=\{f(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}\left\langle B_1,f(\lambda)\right\rangle d\lambda=p\},$$

$$\mathcal{D}_{Vg}^{U1}=\{g(\lambda)|V(\lambda)\le g(\lambda)\le U(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)\,d\lambda=Q\},$$

$$\mathcal{D}_{Vg}^{U2}=\{g(\lambda)|\mathrm{Tr}[V(\lambda)]\le \mathrm{Tr}[g(\lambda)]\le \mathrm{Tr}[U(\lambda)],\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}[g(\lambda)]d\lambda=q\},$$

$$\mathcal{D}_{Vg}^{U3}=\{g(\lambda)|\,v_{kk}(\lambda)\le g_{kk}(\lambda)\le u_{kk}(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_{kk}(\lambda)d\lambda=q_k,\, k=\overline{1,T}\},$$

$$\mathcal{D}_{Vg}^{U4}=\{g(\lambda)|\left\langle B_2,V(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_2,g(\lambda)\right\rangle\le\left\langle B_2,U(\lambda)\right\rangle,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\langle B_2,g(\lambda)\right\rangle d\lambda=q\}.$$

Тут спектральні щільності $V(\lambda),U(\lambda)$ відомі і фіксовані, $p,p_k,q,q_k,k=\overline{1,T}$, — задані числа, p,B_1,Q,B_2 — задані додатно визначені Ермітові матриці. Визначимо

$$C_\mu^{f0}(e^{i\lambda})=(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}}g^0(\lambda)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}((\mathbf{P}_\mu^0)^{-1}\mathbf{S}_\mu^0\mathbf{a}_\mu)_k e^{i(k+1)\lambda}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}) = (1-e^{i\lambda\mu})^n (\vec{A}(e^{i\lambda}))^{\mathrm{T}} f^0(\lambda) + (\lambda)^{2n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((\mathbf{P}_{\mu}^0)^{-1} \mathbf{S}_{\mu}^0 \mathbf{a}_{\mu})_k e^{i(k+1)\lambda} \right)^{\mathrm{T}}.$$

З умови $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ знаходимо наступні рівняння, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності для цих заданих множин допустимих спектральних щільностей.

Для першого набору $\mathcal{D}_{f0}^1 \times \mathcal{D}_{Vg}^{U1}$ допустимих спектральних щільностей маємо рівняння

$$(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right) \times$$

$$\times \vec{\alpha}_f \cdot \vec{\alpha}_f^* \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right), \qquad (27)$$

$$(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))) \times$$

$$\times (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}^* + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda)) (|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))), \qquad (28)$$

де $\vec{\alpha}_f$ та $\vec{\beta}$ — вектори множників Лагранжа, матриця $\Gamma_1(\lambda) \le 0$ та $\Gamma_1(\lambda) = 0$, якщо $g_0(\lambda) > V(\lambda)$, матриця $\Gamma_2(\lambda) \ge 0$ та $\Gamma_2(\lambda) = 0$, якщо $g_0(\lambda) < U(\lambda)$.

Для другого набору допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D}_{f0}^2 \times \mathcal{D}_{Vg}^{U2}$ маємо рівняння

$$(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \alpha_f^2 \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right)^2, \qquad (29)$$

$$(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (\beta^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda)) (|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda) +$$

$$+ \lambda^{2n} g^0(\lambda)))^2, \qquad (30)$$

де α_f^2, β^2 — множники Лагранжа, функція $\gamma_1(\lambda) \le 0$ та $\gamma_1(\lambda) = 0$, якщо $\mathrm{Tr}[f_0(\lambda)] > \mathrm{Tr}[V(\lambda)]$, функція $\gamma_2(\lambda) \ge 0$ та $\gamma_2(\lambda) = 0$, якщо $\mathrm{Tr}[f_0(\lambda)] < \mathrm{Tr}[U(\lambda)]$.

Для третього набору допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D}_{f0}^3 \times \mathcal{D}_{Vg}^{U3}$ маємо рівняння

$$(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right) \times$$

$$\times \{\alpha_{fk}^2 \delta_{kl}\}_{k,l=1}^T \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right), \qquad (31)$$

$$(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))) \times$$

$$\times \{(\beta_k^2 + \gamma_{1k}(\lambda) + \gamma_{2k}(\lambda)) \delta_{kl}\}_{k,l=1}^T (|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda))), \qquad (32)$$

де α_{fk}^2, β_k^2 — множники Лагранжа, δ_{kl} — символи Кронекера, функція $\gamma_{1k}(\lambda)\le 0$ та $\gamma_{1k}(\lambda)=0$, якщо $g_{kk}^0(\lambda)>v_{kk}(\lambda)$, функція $\gamma_{2k}(\lambda)\ge 0$ та $\gamma_{2k}(\lambda)=0$, якщо $g_{kk}^0(\lambda)< u_{kk}(\lambda)$.

Для четвертого набору допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D}_{f0}^4 \times \mathcal{D}_{Vg}^{U4}$ маємо рівняння

$$(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \alpha_f^2 \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda)+\lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right) \times$$

$$\times B_1^{\mathrm{T}} \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda)+\lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right), \tag{33}$$

$$(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (\beta^2 + \gamma'_1(\lambda) + \gamma'_2(\lambda))(|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda)+\lambda^{2n} g^0(\lambda))) \times$$

$$\times B_2^{\mathrm{T}}(|1-e^{i\lambda\mu}|^n (f^0(\lambda)+\lambda^{2n} g^0(\lambda))), \tag{34}$$

де β^2, α_f^2 — множники Лагранжа, функція $\gamma'_1(\lambda)\le 0$ та $\gamma'_1(\lambda)=0$, якщо $\langle B_2, g_0(\lambda)\rangle > \langle B_2, V(\lambda)\rangle$, функція $\gamma'_2(\lambda)\ge 0$ та $\gamma'_2(\lambda)=0$, якщо $\langle B_2, g_0(\lambda)\rangle < \langle B_2, U(\lambda)\rangle$.

Справедлива така теорема.

Теорема 5. Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ у класах $\mathcal{D}_{f0}^k \times \mathcal{D}_{Vg}^{Uk}, k=1,2,3,4$, для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$ за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ визначаються умовою мінімальності (10), рівняннями (27), (28); (29), (30); (31), (32); (33), (34) відповідно, задачею на умовний екстремум (24) та обмеженнями на щільності з відповідних класів. Мінімаксно-робастна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A\vec{\xi}$ визначається за формулою (19).

НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ СПЕКТРАЛЬНІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСАХ $\mathcal{D}_{1\delta} \times \mathcal{D}_\varepsilon$

Розглянемо задачу фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$, який залежить від невідомих значень послідовності зі стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ за умови, що множини допустимих спектральних щільностей $\mathcal{D}_{1\delta}^k, \mathcal{D}_\varepsilon^k, k=1,2,3,4$, визначаються так:

$$\mathcal{D}_{1\delta}^1 = \{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} |\mathrm{Tr}\,(f(\lambda)-f_1(\lambda))| d\lambda \le \delta \},$$

$$\mathcal{D}_{1\delta}^2 = \{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} |f_{kk}(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)| d\lambda \le \delta_k, k=\overline{1,T} \},$$

$$\mathcal{D}_{1\delta}^3 = \{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} |\langle B_1, f(\lambda)-f_1(\lambda)\rangle| d\lambda \le \delta \},$$

$$\mathcal{D}_{1\delta}^{4} = \{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} | f_{ij}(\lambda) - f_{ij}^{1}(\lambda) | d\lambda \le \delta_i^j, \, i, j = \overline{1,T} \};$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon}^{1} = \{ g(\lambda) | \mathrm{Tr}\,[g(\lambda)] = (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}\,[g_1(\lambda)] + \varepsilon \mathrm{Tr}\,[W(\lambda)],$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\,[g(\lambda)]\, d\lambda = p \},$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon}^{2} = \{ g(\lambda) | g_{kk}(\lambda) = (1-\varepsilon) g_{kk}^{1}(\lambda) + \varepsilon w_{kk}(\lambda),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, \, k = \overline{1,T} \},$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon}^{3} = \{ g(\lambda) | \left\langle B_2, g(\lambda) \right\rangle = (1-\varepsilon) \left\langle B_2, g_1(\lambda) \right\rangle + \varepsilon \left\langle B_2, W(\lambda) \right\rangle,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle B_2, g(\lambda) \right\rangle d\lambda = p \},$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon}^{4} = \{ g(\lambda) | g(\lambda) = (1-\varepsilon) g_1(\lambda) + \varepsilon W(\lambda), \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda = P \}.$$

Тут спектральні щільності $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, $W(\lambda)$ — невідома спектральна щільність, $p, p_k, k = 1, T,$ — задані числа, P — задана додатно визначена Ермітова матриця.

Для першого набору $\mathcal{D}_{1\delta}^{1} \times \mathcal{D}_{\varepsilon}^{1}$ допустимих спектральних щільностей маємо рівняння

$$(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))^{*} = \beta^2 \gamma_2(\lambda) \left[\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right]^2, \quad (35)$$

$$(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{g0}(e^{i\lambda}))^{*} = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda))(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)))^2, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} |\mathrm{Tr}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))|\, d\lambda = \delta, \quad (37)$$

де α^2, β^2— множники Лагранжа, функція $\gamma_1(\lambda) \le 0$ та $\gamma_1(\lambda) = 0$, якщо $\mathrm{Tr}\,[g_0(\lambda)] > (1-\varepsilon)\mathrm{Tr}\,[g_1(\lambda)]$, функція $|\gamma_2(\lambda)| \le 1$ та

$$\gamma_2(\lambda) = \mathrm{sign}\,(\mathrm{Tr}\,(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))) : \mathrm{Tr}\,(f_0(\lambda) - f_1(\lambda)) \ne 0.$$

Для другого набору $\mathcal{D}_{1\delta}^{2} \times \mathcal{D}_{\varepsilon}^{2}$ допустимих спектральних щільностей маємо рівняння

$$(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))(C_{\mu}^{f0}(e^{i\lambda}))^{*} = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right) \times$$

$$\times \{ \beta_k^2 \gamma_k^2(\lambda) \delta_{kl} \}_{k,l=1}^{T} \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}} (f^0(\lambda) + \lambda^{2n} g^0(\lambda)) \right), \quad (38)$$

$$(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda)))\times$$

$$\times\{(\alpha_k^2+\gamma_k^1(\lambda))\delta_{kl}\}_{k,l=1}^T(|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))), \qquad (39)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}|f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)|\,d\lambda=\delta_k, \qquad (40)$$

де α_k^2, β_k^2 — множники Лагранжа, функція $\gamma_k^1(\lambda)\le 0$ та $\gamma_k^1(\lambda)=0$, якщо $g_{kk}^0(\lambda)>(1-\varepsilon)g_{kk}^1(\lambda)$, функція $|\gamma_k^2(\lambda)|\le 1$ та

$$\gamma_k^2(\lambda)=\operatorname{sign}\,(f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda))\colon f_{kk}^0(\lambda)-f_{kk}^1(\lambda)\ne 0,\; k=\overline{1,T}.$$

Для третього набору $\mathcal{D}_{1\delta}^4\times\mathcal{D}_\varepsilon^4$ допустимих спектральних щільностей маємо рівняння

$$(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \beta^2\gamma_{2'}(\lambda)\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))\right)\times$$

$$\times B_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))\right), \qquad (41)$$

$$(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (\alpha^2+\gamma_{1'}(\lambda))(|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda)))\times$$

$$\times B_2^{\mathrm{T}}(|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))), \qquad (42)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}|\left\langle B_1, f_0(\lambda)-f_1(\lambda)\right\rangle|\,d\lambda=\delta, \qquad (43)$$

де α^2, β^2 — множники Лагранжа, функція $\gamma_{1'}(\lambda)\le 0$ та $\gamma_{1'}(\lambda)=0$, якщо $\left\langle B_2, g_0(\lambda)\right\rangle>(1-\varepsilon)\left\langle B_2, g_1(\lambda)\right\rangle$, функція $|\gamma_{2'}(\lambda)|\le 1$ та

$$\gamma_{2'}(\lambda)=\operatorname{sign}\left\langle B_1, f_0(\lambda)-f_1(\lambda)\right\rangle\colon\left\langle B_1, f_0(\lambda)-f_1(\lambda)\right\rangle\ne 0.$$

Для четвертого набору $\mathcal{D}_{1\delta}^4\times\mathcal{D}_\varepsilon^4$ допустимих спектральних щільностей маємо рівняння

$$(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{f0}(e^{i\lambda}))^* = \left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))\right)\times$$

$$\times\{\beta_{ij}(\lambda)\gamma_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))\right), \qquad (44)$$

$$(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))(C_\mu^{g0}(e^{i\lambda}))^* = (|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda)))\times$$

$$\times(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}^*+\Gamma(\lambda))(|1-e^{i\lambda\mu}|^n\,(f^0(\lambda)+\lambda^{2n}g^0(\lambda))), \qquad (45)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}|f_{ij}^{0}(\lambda)-f_{ij}^{1}(\lambda)|\,d\lambda=\delta_i^j, \qquad (46)$$

де $\vec{\alpha}$, β_{ij} — множники Лагранжа, функція $\Gamma(\lambda)\le 0$ та $\Gamma(\lambda)=0$, якщо $g_0(\lambda)>(1-\varepsilon)g_1(\lambda)$, функція $|\gamma_{ij}(\lambda)|\le 1$ та

$$\gamma_{ij}(\lambda)=\frac{f_{ij}^{0}(\lambda)-f_{ij}^{1}(\lambda)}{|f_{ij}^{0}(\lambda)-f_{ij}^{1}(\lambda)|}:\ f_{ij}^{0}(\lambda)-f_{ij}^{1}(\lambda)\ne 0,\ i,j=\overline{1,T}.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 6. Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ у класах $\mathcal{D}_{1\delta}^{k}\times\mathcal{D}_{\varepsilon}^{k}, k=1,2,3,4$, для оптимальної лінійної фільтрації функціонала $A\vec{\xi}$ за спостереженнями послідовності $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ у точках $m=0,-1,-2,\ldots$ визначаються умовою мінімальності (10), рівняннями (35)–(37); (38)–(40); (41)–(43); (44)–(46) відповідно, задачею на умовний екстремум (24) та обмеженнями на щільності з відповідних класів. Мінімаксно-робастна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A\vec{\xi}$ обчислюється за формулою (19).

ВИСНОВКИ

У цій статті наведено методи розв’язання задачі фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень послідовності з періодично стаціонарними приростами. Оцінки базуються на спостереженнях послідовності зі стаціонарним шумом. Задача досліджується у випадку спектральної визначеності, коли спектральні щільності послідовностей точно відомі. Запропоновано підхід, заснований на методі ортогональних проєкцій у Гільбертовому просторі. Виведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок функціоналів.

У разі спектральної невизначеності, коли спектральні щільності точно не відомі, а задаються деякі класи допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксно-робастний метод. Установлено зображення середньоквадратичної похибки у вигляді лінійного функціонала щодо спектральних щільностей, що дає змогу розв’язати відповідну задачу умовної оптимізації та описати мінімаксні (робастні) оцінки функціоналів. Виведено формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксну (робастну) спектральну характеристику оптимальних лінійних оцінок функціоналів для певних класів допустимих спектральних щільностей.

Отримано співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей, а саме: класи щільностей $\mathcal{D}_0$ з обмеженнями на момент, класи $\mathcal{D}_{1\delta}$, що описують моделі «δ-околу» у просторі L_1 фіксованої обмеженої спектральної щільності, класи $\mathcal{D}_{\varepsilon}$, що описують «$\varepsilon$-забруднені» моделі фіксованої обмеженої спектральної щільності, класи $\mathcal{D}_{V}^{U}$, що описують «смугові» моделі спектральних щільностей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dudek A., Hurd H., Wojtowicz W. PARMA methods based on Fourier representation of periodic coefficients. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics.* 2016. Vol. 8, N 3. P. 130–149. https://doi.org/10.1002/wics.1380.
2. Johansen S., Nielsen M.O. The role of initial values in conditional sum-of-squares estimation of nonstationary fractional time series models. *Econom. Theory.* 2016. Vol. 32, N 5. P. 1095–1139. https://doi.org/10.1017/S02664666150001.10.
3. Reisen V.A., Zamprogno B., Palma W., Arteche J. A semiparametric approach to estimate two seasonal fractional parameters in the SARFIMA model. *Math. Comput. Simul.* 2014. Vol. 98. P. 1–17. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2013.11.001.
4. Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Ljung, G.M. Time series analysis, forecasting and control. 5rd ed., Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2016. 712 p.
5. Porter-Hudak S. An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggegrates. *J. Am. Stat. Assoc.* 1990. Vol. 85, N 410. P. 338–344. https://doi.org/10.1080/01621459.1990.10476206.
6. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях. *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 137, № 2. С. 1026–1029.
7. Napolitano A. Cyclostationarity: New trends and applications. *Signal Process.* 2016. Vol. 120. P. 385–408. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.09.011.
8. Lund R. Choosing seasonal autocovariance structures: PARMA or SARMA. In: Bell WR, Holan SH, McElroy TS (eds). Economic time series: modelling and seasonality. London: Chapman and Hall, 2011. P. 63–80. https://doi.org/10.1201/b11823.
9. Basawa I.V., Lund R., Shao Q. First-order seasonal autoregressive processes with periodically varying parameters. *Stat. Probab. Lett.* 2004. Vol. 67, N 4. P. 299–306. https://doi.org/10.1016/j.spl.2004.02.001.
10. Reisen V.A., Monte E.Z., Franco G.C., Sgrancio A.M., Molinares F.A.F., Bondon P., Ziegelmann F.A., Abraham B. Robust estimation of fractional seasonal processes: Modeling and forecasting daily average SO_2 concentrations. *Math. Comput. Simul.* 2018. Vol. 146. P. 27–43. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.10.004.
11. Grenander U. A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 1957. Vol. 6. P. 371–379. https://doi.org/10.1007/BF02589429.
12. Kassam S.A., Poor H.V. Robust techniques for signal processing: A survey. *Proc. IEEE.* 1985. Vol. 73, N 3. P. 433–481. https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13167.
13. Liu Y., Xue Yu. and Taniguchi M. Robust linear interpolation and extrapolation of stationary time series in Lp. *J. Time Ser. Anal.* 2020. Vol. 41, N 2. P. 229–248. https://doi.org/10.1111/jtsa.12502.
14. Luz M., Moklyachuk M. Estimation of stochastic processes with stationary increments and cointegrated sequences. London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2019. 282 p. https://nlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119663539.
15. Moklyachuk M.P. Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 2015. Vol. 3, N 4. P. 348–419. https://doi.org/10.19139/soic. v3i4.173.
16. Moklyachuk M.P., Golichenko I.I. Periodically correlated processes estimates. Saarbrucken:LAP Lambert Academic Publishing, 2016. 308 p. https:/www.lap-publishing.com/catalog/details/store/gb/book/978-3-659-88507-5/periodically-correlated-processes-estimates.

17. Moklyachuk M.P., Masyutka A.Yu. Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 296 p. https:/www.amazon.co.uk/Minimax-robust-estimation-technique-Mikhail-nique-Mikhail-Moklyachuk/dp/365919817X.

18. Moklyachuk M.P., Sidei M.I., Masyutka O.Yu. Estimation of stochastic processes with missing observations. New York, NY: Nova Science Publishers, 2019. 334 p. https: //novapublishers.com/shop/estimates-of-stochastic-processes-with-missing-observations.

19. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. The theory of stochastic processes. I. Berlin: Springer, 2004. 574 p. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-61943-4.

20. Kolmogorov A.N. In: Shiryayev A.N. (Ed.) Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics, Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers. 1992. 579 p. https:/www.springer.com/gp/book/9789401050036.

M.M. Luz, M.P. Moklyachuk

MINIMAX FILTERING OF SEQUENCES WITH PERIODICALLY STATIONARY INCREMENTS

Abstract. The authors consider the problem of optimal filtering of linear functionals that depend on unknown values of the stochastic sequence with periodically stationary increments based on observations of the sequence with a stationary noise. For sequences with known spectral densities, formulas for the values of the root-mean-square errors and spectral characteristics of the optimal estimates of the functionals are obtained. Formulas that determine the least favorable spectral densities and minimax (robust) spectral characteristics of the optimal linear estimates of functionals are proposed in the case where spectral densities of the sequence are not known exactly while some sets of feasible spectral densities are given.

Keywords: periodically stationary increments, minimax-robust estimate, least favorable spectral density.

Надійшла до редакції 29.03.2021