

УДК 004.94; 674.047

Соколовська Я.І., Семенюк В.Я., Мокрицька О.В.

Національний лісотехнічний університет України, Луцький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО СТАНУ ДЕРЕВИНИ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ З ВРАХУВАННЯМ БАГАТОФАЗНОСТІ

Соколовська Я.І., Семенюк В.Я., Мокрицька О.В. Математичне та програмне забезпечення моделювання в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з врахуванням багатофазності. Стаття присвячена математичному моделюванню деформаційно-релаксійних і тепломасообмінних процесів у гігроскопічних капілярно-пористих матеріалах як анізотропних трифазних середовищах, що має важливе значення для розроблення та обґрунтування енергоощадних технологій гідротермічного оброблення деревини. Сформульовано математичну модель тепломасоперенесення для періодів сталої і спадаючої швидкості сушіння капілярно-пористих матеріалів. Побудовано математичну модель реологічної поведінки деревини як трифазного середовища з врахуванням анізотропії тепломеханічних характеристик. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для чисельної реалізації математичних моделей на основі адаптації методу скінченних елементів. Встановлено закономірності впливу технологічних параметрів сушіння на процеси в'язкопружного деформування і тепломасоперенесення у твердій, рідкій і паровій фазах деревини.

Ключові слова: сушіння капілярно-пористих матеріалів, напруги і деформації дерева в процесі сушіння.

Форм. 23. Табл. 0. Рис. 4. Літ. 22.

Ya.I. Sokolowsky, V.Ya. Semenyuk, O.V. Mokritska Mathematical and simulation software viscoelastic state of wood during drying with regard phases. The paper is devoted to the mathematical modeling of strain- relaksionnyh and heat and mass transfer processes in hygroscopic capillary- porous materials like 3-phase anisotropic media, is essential for the development and study of energy efficient technologies hydrothermal treatment of wood. Formulated a mathematical model for the period was heat and mass transfer and decreasing rate of drying of capillary- porous materials. A mathematical model of the rheological behavior of wood as a three-phase environment, taking into account the anisotropy of mechanical properties. Developed object-oriented application software for the numerical implementation of mathematical models based on the adaptation of the finite element method. The regularities of the influence of process parameters on the process of drying viscoelastic deformation and heat and mass transfer in solid, liquid and vapor phases wood.

Key words: drying of capillary- porous materials, stresses and strains of wood in the drying process.

Equat. 23. Tabl. 0. Fig. 4. Ref. 22.

Соколовський Я.І., Семенюк В.Я., Мокрицька О.В. Математическое и программное обеспечение моделирования вязкоупругого состояния древесины в процессе сушки с учетом многофазности. Статья посвящена математическому моделированию деформационно- релаксионных и тепломассообменных процессов в гигроскопических капиллярно- пористых материалах как анизотропных трехфазных средах, имеет важное значение для разработки и обоснования энергосберегающих технологий гидротермической обработки древесины. Сформулирована математическая модель тепломассопереноса для периодов постоянной и убывающей скорости сушки капиллярно- пористых материалов. Построена математическая модель реологического поведения древесины как трехфазной среды с учетом анизотропии тепломеханических характеристик. Разработано объектно- ориентированное прикладное программное обеспечение для численной реализации математических моделей на основе адаптации метода конечных элементов. Установлены закономерности влияния технологических параметров сушки на процессы вязкоупругого деформирования и тепломассопереноса в твердой, жидкой и паровой фазах древесины.

Форм. 23. Табл. 0. Рис. 4. Лит. 22.

Вступ

Актуальність досліджень. Створення нових та вдосконалення існуючих енерго- та ресурсозберігаючих технологій процесу зневоднення гетерогенних капілярно-пористих матеріалів набуває важливого практичного значення у зв'язку з високими вимогами до якості готової продукції, потребою зниження фінансових та часових витрат на процес промислового впровадження. У вирішенні цієї важливої проблеми значну роль відіграє розроблення математичних моделей для дослідження деформаційно-релаксацийних і тепломасообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням багатофазності і багатокомпонентності матеріалу.

Аналіз відомих досліджень. Незважаючи на значні успіхи у цій галузі, на сьогодні не існує єдиного феноменологічного підходу щодо моделювання процесів деформування і тепломасоперенесення у гетерогенних капілярно-пористих структурах. У теоріях сушіння, сорбції та фільтрації розходження носить принциповий характер, хоча за своїм змістом вони мають відображати сумісні фізичні процеси у капілярно-пористих середовищах. Наявні математичні моделі та методи аналізу деформування та тепломасоперенесення в деревині у процесі сушіння[1-5], в основному, базуються на підході до структурної будови матеріалу як гомогенної, не беруть до уваги особливостей зміни в'язкопружної поведінки матеріалу з врахуванням кінетики фазових переходів. Ці процеси в основному досліджені для задач в одновимірній постановці із залученням значної кількості допущень[6,7]. Тому актуальним завданням є розроблення математичних моделей процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, як трифазного середовища, що складається з твердої фази (деревної речовини), рідкої і пароповітряної фаз. Математичні моделі тепломасоперенесень та деформування, що враховують багатофазність капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння, уможливають прогнозування особливостей зміни вологовмісту, температури окремих фаз, напружено-

деформівного стану на всіх етапах процесу сушіння деревини та дозволяють вирішувати задачі інтенсифікації технологій сушіння.

Метою дослідження є розроблення двовимірних математичних моделей та прикладного програмного забезпечення для їх чисельної реалізації та встановлення закономірностей анізотропного в'язкопружного деформування деревини як багатофазної структури у процесі конвективного сушіння.

Математична модель в'язкопружного стану деревини як трифазної системи. У силу складної стохастичної капілярної структури деревини, яка характеризується різною за величиною і неоднаковою геометричною формою елементів, визначити дійсні геометричні розміри капілярів є практично неможливо. Перехід від опису явищ в окремій фазі до континуальних рівнянь капілярно-пористого матеріалу може бути отриманий на основі об'ємного усереднення мікрорівнів для макроскопічних параметрів кожної фази. Тому в подальшому приймаються допущення[8-10]:

– характерні розміри капілярно-пористої структури деревини є набагато більші за молекулярно-кінетичні розміри і набагато менші за відстані, на яких відбувається суттєва зміна макроскопічних параметрів;

– малі значення деформацій і переміщень твердої фази та її нестисливість і сталість густини;

– парогазова суміш (повітря і волога) характеризується властивостями ідеального газу;

– сукупність мікрокапілярів становить собою систему циліндрів у клітинах деревини із змінним радіусом r_K , який залежить від вологості у гігроскопічній області деревини;

– система макрокапілярів деревини моделюється як різні анатомічні елементи для різних порід та описується як сукупність паралельних капілярів різних радіусів у клітинних стінках деревини.

Для розроблення математичної моделі записуємо повний тензор напружень для гетерогенного середовища σ^{kl} у вигляді суми усереднених напружень у фазах

$$\sigma^{kl} = c_T \langle \sigma_T^{kl} \rangle_T + c_P \langle \sigma_P^{kl} \rangle_P + c_{II} \langle \sigma_{II}^{kl} \rangle_{II}, \quad (1)$$

$$\text{де } \langle \sigma_T^{kl} \rangle_T = \frac{1}{dV} \int_{dV_T} \sigma_T^{kl} d'V, \quad \langle \sigma_P^{kl} \rangle_P = \frac{1}{dV} \int_{dV_P} \sigma_P^{kl} d'V, \quad \langle \sigma_{II}^{kl} \rangle_{II} = \frac{1}{dV} \int_{dV_{II}} \sigma_{II}^{kl} d'V, \quad c_T = dV_T/dV;$$

$c_P = dV_P/dV$; $c_{II} = dV_{II}/dV$ – об'ємні концентрації твердої (Т), рідкої (Р) і парогазової (ІІ) фаз; V_T, V_P, V_{II} – відповідні їх об'єми; верхні індекси, зокрема k і l позначають компоненти тензора напружень.

Згідно з другим допущенням, можемо записати

$$\varepsilon_T^{ik} - \varepsilon_{T0}^{ik} = 1 - c_T/c_{T0}; \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

де ε_{T0}^{ik} , c_{T0} – компоненти деформації та об'ємна концентрація у початковий момент часу.

Приймаємо, що деформації твердої фази ε_T^{ij} складаються з деформацій деревної речовини $\langle \varepsilon_T^{ij} \rangle_T$ і фіктивних деформацій ε_Φ^{ij} , які зумовлюють перебудову капілярно-пористої системи деревини, тобто $\varepsilon_T^{ij} = \langle \varepsilon_T^{ij} \rangle_T + \varepsilon_\Phi^{ij}$.

Для побудови тензора фіктивних напружень[9,11], що відповідає тензору фіктивних деформацій ε_Φ^{ij} , користуємось прийнятими фізичними допущеннями. Тоді структуру деревини розглядаємо як середовище з подвійною пористістю[12]. Тверда фаза із системою мікрокапілярів складає матрицю матеріалу. Для листяних порід судини, волокна лібриформи, серцевинні промені можна віднести до системи мікропор. Для хвойних порід мікрокапіляри у клітинних стінках моделюються як вкладене пористе середовище. У подальшому скористаємось методами дослідження таких систем [9,12].

Тоді повні усередненні напруження σ^{ij} представляємо у вигляді

$$\sigma^{ij} = (1 - c_{MK}) \langle \sigma_{KC}^{ij} \rangle_{KC} + c_{MK} \langle \sigma_{MK}^{ij} \rangle_{MK}, \quad (3)$$

де $\langle \sigma_{KC}^{ij} \rangle_{KC}$, $\langle \sigma_{MK}^{ij} \rangle_{MK}$ – усереднені компоненти напружень у клітинних стінках і макропорах, c_{MK} – об'ємний вміст пор у деревині.

Величини $\langle \sigma_{KC}^{ij} \rangle_{KC}$ записуємо аналогічно

$$\langle \sigma_{KC}^{ij} \rangle_{KC} = (1 - c_K) \langle \sigma_T^{ij} \rangle_T + c_K \langle \sigma_K^{ij} \rangle_K, \quad (4)$$

де $\langle \sigma_K^{ij} \rangle_K$ – усередненні напруження у капілярах клітинних стінок; c_K – об'ємний вміст пор у клітинних стінках.

Для визначення питомих вкладів тепломасоперенесення у кожній фазі вважаємо, що загальна геометрична поверхня (поперечний перетин) вологої деревини дорівнює сумі поверхонь (поперечних перетинів) твердої, рідкої і пароповітряної фаз. Причому поверхня твердої фази є величина стала, а поверхні рідкої і пароповітряної фаз змінюються залежно від вологовмісту деревини. Тоді для визначення величин $\langle \sigma_K^{ij} \rangle_K$, $\langle \sigma_{MK}^{ij} \rangle_{MK}$ отримуємо:

$$\langle \sigma_{MK}^{ij} \rangle_{MK} = c_{MK}^P \langle \sigma_P^{ij} \rangle_P + c_{MK}^{\Pi} \langle \sigma_{\Pi}^{ij} \rangle_{\Pi}; \langle \sigma_K^{ij} \rangle_K = c_K^P \langle \sigma_K^{ij} \rangle_K + c_K^{\Pi} \langle \sigma_{\Pi}^{ij} \rangle_{\Pi};$$

$$c_{MK}^P + c_{MK}^{\Pi} = 1; c_K^P + c_K^{\Pi} = 1,$$
(5)

де c_{MK}^P , c_{MK}^{Π} ; c_K^P , c_K^{Π} – об'ємний вміст рідкої і пароповітряної фаз у матеріалах і капілярах.

Величини тисків у рідкій P_P і пароповітряній P_{Π} фазах пов'язані співвідношенням $P_P = P_{\Pi} + P_{KT}$, де P_{KT} – величина капілярного тиску залежно від вологості деревини. Для визначення P_{KT} з врахуванням допущення про циліндричну форму капілярів використано формулу Лапласа $P_{KT} \approx 2\sigma(T)/r^*$, де $\sigma = 0,07564(1 - 0,02T)$. Величина r^* характеризує дисперсність розмірів пор і визначена на основі апроксимації відомих експериментальних даних[13]

Залежно від розмірів капілярів перенесення у рідкій фазі може здійснюватися не тільки дифузійним потоком пари, але й потоком, що переноситься плівковим механізмом під дією градієнта розклинюючого тиску. Для оцінювання внеску плівкового механізму використано рівняння Дерюгіна – Нерпіна.

Отримано співвідношення для визначення фіктивного тензора напружень, що характеризує зміщення твердої фази деревини

$$\sigma_{\Phi}^{ij} = \frac{1}{1 - c_{MK}} \left\{ \langle \sigma^{ij} \rangle - (c_{MK} c_{MK}^P + c_K^P (1 - c_{MK})) \langle \sigma_P^{ij} \rangle_P - (c_{MK} c_{MK}^{\Pi} + c_K^{\Pi} (1 - c_{MK})) \langle \sigma_{\Pi}^{ij} \rangle_{\Pi} \right\}. \quad (6)$$

Математичне моделювання зв'язку між компонентами напружень $\sigma_{ij}(\tau)$ і деформацій $\varepsilon_{ij}(\tau)$ для твердої фази (деревина скелету) з врахуванням анізотропії механічних властивостей базується на інтегральних рівняннях Больцмана – Вольтера[14,15], які доповнені залежністю всихання гігроскопічних матеріалів від вологості

$$\langle \sigma_T^{ij}(\tau) \rangle_T = C \left(\langle \varepsilon_T^{ij}(\tau) \rangle_T - \langle \varepsilon_T^U(\tau) \rangle_T \right) - C \int_0^{\tau} R(t, \tau) \left(\langle \varepsilon_T^{ij}(\tau) \rangle_T - \langle \varepsilon_T^U(\tau) \rangle_T \right) dt, \quad (7)$$

де C – тензор компонентів пружності деревної речовини; ε_T^U – вектор деформацій, зумовлений всиханням деревини; $R(t, \tau) = R^{ijkl}(t, \tau)$ – тензор ядра релаксації, за допомогою якого визначається реологічна поведінка деревини.

Аналогічно здійснено математичне моделювання зв'язку між тензорами напружень твердої фази і тензорами фіктивних деформацій.

Таким чином, отримано математичну модель деформаційно-релаксаційних процесів у деревині під час сушіння як трифазному середовищі з врахуванням анізотропії тепломеханічних характеристик

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij}(\tau) = & (D_T + A_{MK})\sigma^{ij} + (D_T c_{II} + A_{MK} \gamma_1) p_{II} \delta^{ij} + (D_T c_P + A_{MK} \gamma_2) p_P \delta^{ij} + \\ & + \int_0^\tau \left((D_T K(t, \tau) + A_{MK} K_\phi(t, \tau)) \sigma^{ij} + (D_T K(t, \tau) c_{II} + \right. \\ & \left. + A_{MK} K_\phi(t, \tau) \gamma_1) p_{II} \delta^{ij} + (D_T K(t, \tau) c_P + A_{MK} K_\phi(t, \tau) \gamma_2) p_P \delta^{ij} \right) dt - \beta \varepsilon_T^U. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут введено позначення: $D_T = \Pi / c_T$; $A_{MK} = \Pi_\phi / (1 - c_{MK})$; $\gamma_1 = c_{MK} (c_{MK}^P - c_K^P) + c_K^P$; $\gamma_2 = c_{MK} (c_{MK}^\Pi - c_K^\Pi) + c_K^\Pi$; Π – тензор миттєвих податливостей, який визначається за допомогою тензора C ; Π_ϕ – фіктивний тензор податливості, що визначається за допомогою тензора пружності C_ϕ ; β – коефіцієнти тензора всихання.

Функції реологічної поведінки деревини вибираються у вигляді

$$K(t, \tau) = d_0 + \sum_{n=1}^N d_{ij} \exp\left(\frac{-\beta_{ij}(t - \tau)}{\tau_P}\right), \quad (9)$$

де коефіцієнти d_0 , d_{ij} , β_{ij} і час релаксації τ_P визначаються шляхом апроксимації відомих експериментальних даних деформацій повзучості [16,17].

Для визначення деформаційно-релаксаційних процесів за математичною моделлю (8) знайдено об'ємні концентрації фаз як для початкового стану деревини, так і з врахуванням зміни вологості. У подальшому прийнято рівномірний розподіл фаз за об'ємом деревини, що дало змогу скористатися умовами адитивності.

Об'ємний вміст пароповітряної суміші визначається за формулою[2]

$$c_{II0} = 1 - \rho_W \left(\frac{1}{\rho_T} + \frac{W}{100\rho_P} \right) \frac{100}{100 + W}. \quad (10)$$

Оскільки значення c_{T0} можна одержати на основі апроксимації експериментальних даних повітроємності деревини, а значення густини деревної твердої фази ρ_T і води ρ_B відомі[17], то з врахуванням (10) одержуємо:

$$\begin{aligned} c_{P0} = & \frac{1}{\rho_{II} - \rho_T} \left(\rho_W \left(1 + \frac{1}{\rho_T} + \frac{W}{100\rho_P} \right) \frac{100}{100 + W} - \rho_{II} \right); \\ c_{T0} = & \frac{1}{\rho_{II} - \rho_T} \left(\rho_W (\rho_{II} - \rho_T - 1) \left(1 + \frac{1}{\rho_T} + \frac{W}{100\rho_P} \right) \frac{100}{100 + W} - \rho_{II} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де c_{T0} , c_{P0} , c_{II0} – об'ємні концентрації фаз у початковий момент часу, ρ_W – густина деревини для конкретної вологості. Її визначаємо для різних порід з густиною ρ_{12} для нормалізованої вологості за формулою [17]

$$\rho_W = \begin{cases} k_{\alpha 1} \rho_{12} \frac{100 + W}{100 + k_{\alpha 2} W}, & W \leq 30\%; \\ k_{\alpha 3} \rho_{12} (1 + 0.1W), & W > 30\%, \end{cases} \quad (12)$$

де $k_{\alpha 1} = 0,957$, $k_{\alpha 2} = 0,6$, $k_{\alpha 3} = 0,811$ (для акації, берези, бука, граба) і $k_{\alpha 1} = 0,946$, $k_{\alpha 2} = 0,5$, $k_{\alpha 3} = 0,823$ для інших порід.

Математична модель визначення в'язкопружного стану деревини як капілярно-пористого трифазного середовища включає рівняння рівноваги механіки гетерогенних середовищ

$$\begin{aligned} \frac{\partial (c_T \langle \sigma_{TX} \rangle_T)}{\partial x} + \frac{\partial (c_T \langle \sigma_{TXY} \rangle_T)}{\partial y} + p_T \frac{\partial c_T}{\partial x} + Q_{1,2} &= 0; \\ \frac{\partial (c_T \langle \sigma_{TY} \rangle_T)}{\partial x} + \frac{\partial (c_T \langle \sigma_{TY} \rangle_T)}{\partial y} + p_T \frac{\partial c_T}{\partial y} + Q_{2,2} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

де $p_T = -\frac{1}{3}\langle\sigma_T\rangle_T$, $Q_{1,2}$, $Q_{2,2}$ – складові потоків масоперенесення.

Граничні умови характеризують стан деревини у частковий момент сушіння і мають вигляд:

$$\begin{aligned} \langle\sigma_{TX}\rangle_T = 0, x = 0, x = l_1; \langle\sigma_{TY}\rangle_T = 0, y = 0, x = l_2; \\ \langle\sigma_{TXY}\rangle_T = 0, x = 0, x = l, y = 0, y = l_2, \end{aligned} \quad (14)$$

де l_1, l_2 – геометричні розміри поперечного перетину деревини.

Математичні моделі тепломасоперенесення. Математичні моделі для визначення концентрації рідини, пари, повітря і пароповітряної суміші у деревній пластині запропоновано у вигляді диференційних рівнянь вологопровідності з граничними умовами, характерними для першого та другого періодів процесу сушіння[3,18]. Базуючись на розв'язках диференційних рівнянь вологоперенесення, а також рівняннях стану газової фази і законі Дальтона, з врахуванням частки вільного від рідини об'єму матеріалу, отримано закономірності розподілу перенесення вологості, тепла та концентрації парогазової суміші у деревній пластині. Зокрема, для першого періоду процесу сушіння отримано:

- для перенесення вологи у рідкій фазі

$$\begin{aligned} U_P(\bar{x}, Fo_{UP}) = A_P (Fo_{UP} + 0,5 \cdot \bar{x}^2 - 1/6) + \frac{2A_P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 Fo_{UP}) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 Fo_{UP}) \int_0^1 U_{0P}(z, 0) \cos(\pi n z) dz + \int_0^1 U_{0P}(z, 0) dz; \end{aligned} \quad (15)$$

- для переміщення вологи у паровій фазі

$$\begin{aligned} U_{II}(\bar{x}, Fo_{UII}) = A_{II} (Fo_{UII} + 0,5 \bar{x}^2 - 1/6) + \frac{2A_{II}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 Fo_{UII}) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 Fo_{UII}) \int_0^1 U_{0II}(z, 0) \cos(\pi n z) dz + \int_0^1 U_{0II}(z, 0) dz, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\bar{x} = x/l$; Fo_{UP} , Fo_{UII} – масообмінні критерії Фур'є; A_P , A_{II} – величини, залежні від характеристик масообміну, початкових значень розподілу вологи U_{0P} , U_{0II} у рідкій і паровій фазах; l – геометричний розмір.

Аналогічно отримано математичні моделі для визначення перенесення вологи у рідкій і паровій фазах та перенесення повітря і пароповітряної суміші для другого періоду процесу сушіння. Зокрема:

- для перенесення вологи у рідкій фазі:

$$\begin{aligned} U_P(\bar{x}, Fo_{mp}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1)\frac{\pi\bar{x}}{2}\right) \exp\left(-\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo_{UP}\right) \times \\ \times \int_0^1 U_{0P}(z, 0) \cos\left(\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)z\right) dz; \end{aligned} \quad (17)$$

- для перенесення вологи у паровій фазі

$$\begin{aligned} U_{II}(\bar{x}, Fo_{UII}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left((2n-1)\frac{\pi\bar{x}}{2}\right) \exp\left(-\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo_{UII}\right) \times \\ \times \int_0^1 U_{0II}(z, 0) \cos\left(\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)z\right) dz, \end{aligned} \quad (18)$$

- для знаходження температурного поля

$$\begin{aligned}
 T(\bar{x}, Fo) = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n \bar{x} (Bi \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n)}{(Bi + 1) \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \int_0^1 T_0(z) \cos \mu_n z dz + \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n \bar{x} (Bi \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n^2 [(Bi + 1) \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n]} \exp(-\mu_n^2 Fo) \int_0^1 Po(z) \cos \mu_n z dz + \\
 & + \left[\frac{1}{Bi} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n \bar{x})}{\mu_n [(Bi + 1) \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n]} \exp(-\mu_n Fo) \right] Ki(Fo),
 \end{aligned} \tag{19}$$

де Fo , Bi , Ki , Po – теплообмінні критерії Фур'є, Біо, Кірпічова, Померанцева; μ_n – корені характеристичного рівняння $ctg \mu_n = \mu_n / Bi$.

Прийнято допущення про те, що тиск водяної пари на поверхні деревини визначається з врахуванням середньої вологості сушіння матеріалу та рівноважної вологості повітря, а тиск водяної пари у середині деревини дорівнює тиску насиченої пари, що залежить від температури. Загальний тиск пароповітряної суміші у деревині визначається за законом Дальтона, а на поверхні матеріалу він дорівнює атмосферному. Моделювання впливу вологоперенесення на процес теплоперенесення здійснюється з врахуванням внутрішнього джерела у рівнянні теплоперенесення, яке описує потік випаровуючої вологи у деревині.

Алгоритмічне та прикладне програмне забезпечення У рамках об'єктно-орієнтованого підходу розроблено прикладне програмне забезпечення для чисельної реалізації отриманих математичних моделей в'язкопружного деформування деревини у процесі сушіння з врахуванням багатофазності.

Для чисельної реалізації математичної моделі (8) – (14) метод скінченних елементів (МСЕ) [4,5,19] адаптовано для в'язкопружної області деформування гетерогенного середовища. Для цього виведено еквівалентне варіаційне формулювання математичної моделі визначення в'язкопружного стану на основі використання принципу мінімуму повної потенціальної енергії. Функціонал Лагранжа, мінімальне значення якого збігається з розв'язком математичної моделі (8) – (14), остаточно записано у вигляді

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T C \varepsilon dV - \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T C \int_0^{\tau} R(t-s, t, U) \varepsilon ds dV - \int_V \varepsilon^T C \varepsilon_U dV + \int_V \varepsilon^T C \int_0^t R(t-s, t, U) \varepsilon_U ds dV, \tag{20}$$

де C – компоненти тензора, які характеризують анізотропні пружні характеристики твердої фази (деревної речовини) та характеристики багатофазності структури.

Для знаходження основних співвідношень МСЕ використано скінченно-різницеву апроксимацію векторів переміщень $\{u(\tau)\}$ і деформації $\{\varepsilon(\tau)\}$ та функції реологічної поведінки деревини $R(\tau, \tau')$ у часі. Зокрема, для $\{\varepsilon(\tau)\}$ та ядра релаксації отримано:

$$\{\varepsilon(\tau)\} = \{\varepsilon(\tau_i)\} + \frac{\{\varepsilon(\tau_{i+1})\} - \{\varepsilon(\tau_i)\}}{\tau_{i+1} - \tau_i} (\tau - \tau_i); \tag{21}$$

$$R_i^* = \frac{\Delta \tau}{2} R_i^*(\tau_0) + \Delta \tau \sum_{j=1}^M R_i^*(\tau_j) + \frac{\Delta \tau}{2} R_i^*(\tau_M). \tag{22}$$

З умови мінімуму функціонала Лагранжа отримано систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих переміщень на кожному часовому кроці $\Delta \tau_i$ ($i = \overline{1, M}$, де M – кількість часових інтервалів):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N U_n^k \left[\frac{1}{2} \int_{V_n} B^T C B \varphi_e(x) dV \right] + \sum_{n=1}^N U_n^k \left[\frac{1}{4} \int_{V_e} B^T C R(s_k, \tau_k) B \varphi_n(x) dV \right] = \\
 & = \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{n=1}^N U_n^j \left[\frac{\Delta \tau}{2} \int_V B^T C R(s_k, \tau_j) B \varphi_n(x) dV \right] + \sum_{n=1}^N \left[\int_{V_n} B^T C \varepsilon_U^k d\Omega \right] - \\
 & - \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\Delta \tau}{2} \int_{V_e} B^T C (R(s_k, \tau_j)) \varepsilon_U^j + R(s_k, \tau_{i+1}) \varepsilon_U^{i+1} \right] dV, k = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Програмна реалізація методу скінченних елементів на основі об'єктно-орієнтовного підходу полягала у розробці пакетів класів та відношень між ними[20,21]. На окремі пакети розділено класи, які відображають сутність об'єктно-орієнтовної реалізації МСЕ та реалізують: температурні та вологісні коефіцієнти, які містить задача визначення потоків масоперенесення у рідкій, твердій та газоподібній фазах (вони описані у вигляді функцій, що залежать від температури, вологості та інших аргументів); коефіцієнти, необхідні для розв'язування задачі в'язкопружності, які також обчислюють залежно від температури та вологовмісту матеріалу; параметри зовнішнього середовища, а саме температуру середовища t_c , відносну вологість φ (виокремленні в окремий інтерфейс); початкові значення температури t_0 , вологовмісту u_0 ,

компонент переміщень \vec{U} та напружень σ , а також геометричні розміри матеріалу (l_1 і l_2) та тривалість процесу τ ; параметри чисельного розв'язування, такі як кількість розбиттів за часом, кількість розбиттів за координатними осями, порядок квадратурних формул для обчислення інтегралів, тощо. Класи орієнтовані на конкретні обчислення матричної та векторної алгебри для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь; інтерфейс користувача.

Розроблено програмно-аналітичний комплекс скінченно-елементного аналізу деформаційно-релаксаційних полів у процесі сушіння капілярно-пористих тіл як багатофазних середовищ з врахуванням анізотропії в'язкопружних властивостей матеріалу, механізмів переродження залишкових деформацій.

Досліджено адекватність математичної моделі та порядок збіжності алгоритму МСЕ для в'язкопружної області деформування капілярно-пористих матеріалів. На основі статистичного критерію на базі коефіцієнта кореляції показано задовільну збіжність чисельного моделювання з відомими результатами, отриманими для часткових випадків.

Аналіз чисельних експериментів. Для проведення чисельних експериментів дослідження динаміки зміни температури, вологовмісту, концентрації рідини, пари та пароповітряної суміші і в'язкопружного деформування у процесі сушіння опрацьовано експериментальні дані. Уточнено значення деяких теплофізичних характеристик деревини, зокрема коефіцієнта вологопровідності як функції від температури і вологості: $a_{m1}(T, U) = a_{mt}(T) a_{mu}(U)$, $a_{m1}/a_{m2} = 1,25$. Для визначення коефіцієнта вологообміну використано залежність[22]

$\alpha = 0,95 \left(T / \varphi \varepsilon \exp(-2\sigma V_p / rTR) \right) 10^{-9}$, де V_p , σ – молярний об'єм та поверхневий натяг рідини, φ – відносна вологість середовища. Значення $r = r(U)$ отримано шляхом моделювання структури деревини як системи непостійних капілярів радіуса r , який залежить від вологості. У чисельних експериментах приймалися такі значення фізичних параметрів: для повітряної та парогазової фази[2,3,8]: $c_0 = 9,05 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К); $\alpha_{II} = 3,3 \cdot 10^{-4}$ Вт/(м²·К); $\varepsilon_{II} = 284$ Дж/(кг·К); $R_{III} = 8,3144$ Дж/(моль·К); $\nu_{III} = 461,9$ Дж/(кг·К); $\lambda_{III} = 0,0248$ Вт/(м·К); $c_{III} = 2,034 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); для рідкої фази: $\rho_p = 10^3$ кг/м³; $\lambda_p = 0,648$ Вт/(м·К); $c_p = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); $\alpha_p = 6 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м²·К); для твердої фази: $\rho_T = 1540$ кг/м³; $\lambda_T = 0,3$ Вт/(м·°C); $c_T = 3,7 \cdot 10^{-3}$ Дж/(кг·К); $\alpha_T = 1,66 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м²·К).

На рис. 1 показано зміну об'ємного вмісту фаз деревини сосни залежно від вологості, а рис. 2 характеризує зміну в часі об'ємного вмісту рідкої фази. Необхідно зазначити, що відмінність розподілу температурних полів з плином тривалості сушіння деревини посилюється, а саме температура твердої фази зростає, а збільшення температури рідкої фази сповільнюється, і вона не перевищує температури насиченої пари.

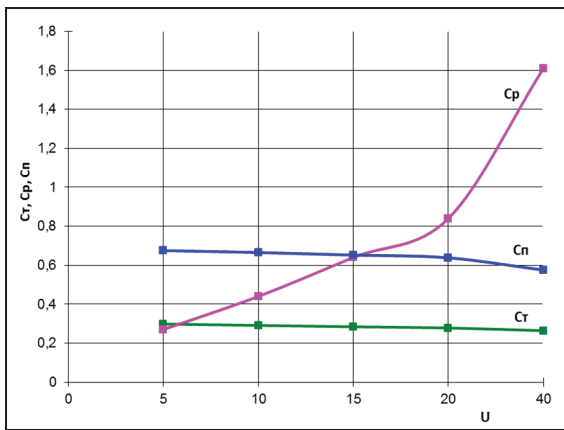


Рис.1. Розрахункові значення об'ємного вмісту фаз для деревини сосни

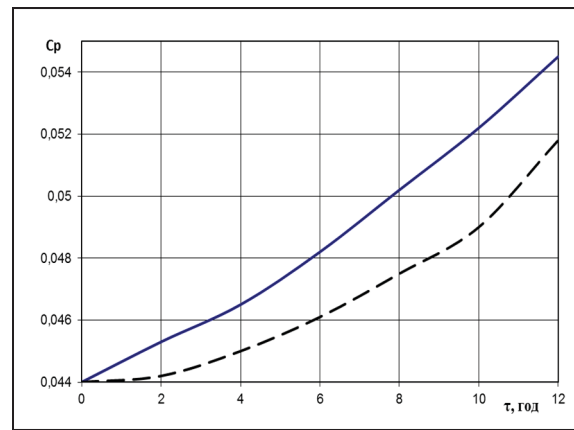


Рис.2. Зміна у часі об'ємного вмісту рідкої фази (1 – на поверхні, 2 – у деревині)

Аналіз графічних залежностей розподілу вологовмісту і температури у деревній пластині (рис. 3 та рис. 4) свідчить про те, що, незважаючи на більші значення температури у твердій фазі порівняно з рідинною, інтенсивність досягнення рівномірних значень у процесі сушіння у рідкій фазі є вищою, ніж у твердій. Такий взаємопротилежний розподіл значень вологовмісту і температури та швидкості їх зміни у різних фазах зумовлюється вищою температуропровідністю води порівняно із зовнішнім теплообміном твердої фази.

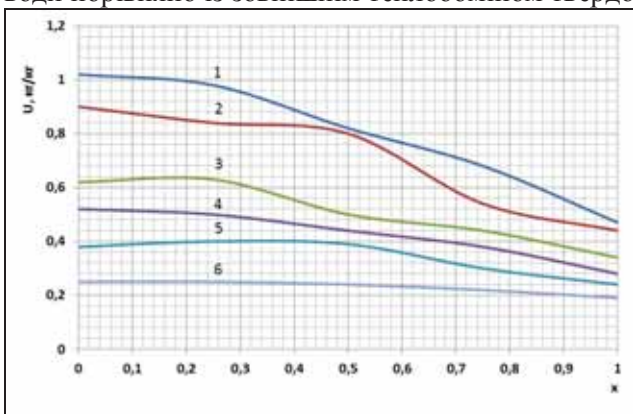


Рис.3. Розподіл вологовмісту твердої фази у деревній пластині для різних значень часу (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

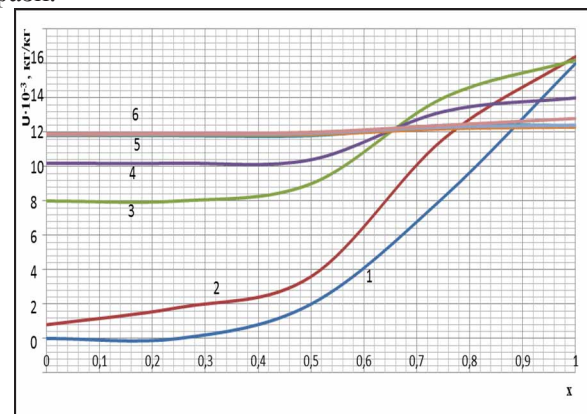


Рис.4. Розподіл вологовмісту парової фази у деревній пластині для різних значень часу (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

Температура у газовій фазі досягає значень, які на порядок вищі, ніж в інших фазах. Окрім цього, інтенсивність зміни парогазової та рідкої фаз суттєво змінюється у процесі зневоднення деревини. Спостерігається значний вплив структурної анізотропії деревини на ці процеси. На початковій стадії процесу для взірців пиломатеріалів радіального напрямку значення парогазової суміші збільшується від центральної частини до поверхні. Для тангенціальних взірців розподіл парогазової суміші є більш рівномірним. Інтенсивність фазових переходів навіть для початкових етапів зневоднення деревини неоднакова у різних точках деревини і суттєво залежить від тиску парогазової суміші.

Аналіз розподілу температури і перенесення вологи у рідкій, твердій і повітряній фазах свідчить про те, що математичні моделі дозволяють прогнозувати особливості взаємопов'язаних процесів перенесення у різних фазах і враховувати фізичну нелінійність цих процесів, зумовлену залежністю фізичних властивостей деревини від температури і вологості.

Висновки

Побудовано математичну модель реологічної поведінки деревини як трифазного середовища з врахуванням анізотропії тепломеханічних характеристик, яка дає змогу враховувати пружні і

в'язкопружні та залишкові деформації деревини залежно від зміни капілярно-пористої структури матеріалу.

Сформульовано математичну модель тепломасоперенесення для періодів сталої і спадаючої швидкості сушіння капілярно-пористих матеріалів у виді взаємозв'язаних крайових задач з граничними умовами першого і третього родів, яка дає змогу знаходити залежності перенесення тепла, вологи, пари, повітря і пароповітряної суміші та прогнозувати їхню зміну для періодів процесу сушіння деревини.

Розроблено прикладне програмне забезпечення для чисельної реалізації математичних моделей на основі адаптації методу скінченних елементів для в'язкопружної області деформування багатозв'язного середовища зі змінними вологісними полями. Об'єктно-орієнтоване програмне забезпечення базується на задокументованих класах, що уможливило їх повторне використання у рамках компонентного підходу для розроблення інших прикладних програмних засобів.

1. Білей П. В. Тепломасообмінні процеси деревообробки / П. В. Білей, І. В. Петришак. – Львів : ЗУКЦ, 2013. – 376 с.
2. Серговский П. С. Гидротермическая обработка и консервирование древесины / Серговский П. С. – М. : Лесн. пром-сть, 1981. – 304 с.
3. Шубин Г. С. Сушка и тепловая обработка древесины / Шубин Г. С. – М. : Лесная промышленность, 1990. – 336 с.
4. Соколовський Я. І. Математичне моделювання двовимірного в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння / Я. І. Соколовський, М. В. Дендюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 7. – С. 17-26.
5. Соколовський Я. І. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини / Я. І. Соколовський, А. В. Бакалець // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 629. – С. 105-111.
6. Гайвась Б. І. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл / Б. І. Гайвась, І. Б. Борецька // Комп'ютерні технології друкарства : зб. наук. праць УАД. – Львів, 2011. – №26. – С. 102-113.
7. Гринчик Н. Н. Процессы переноса в пористых средах, электролитах и мембранах / Гринчик Н. Н. Минск : Институт тепло- и массообмена АН Беларуси, 1991. – 251 с.
8. Богданов В. С. Справочник по сушке древесины / В. С. Богданов, В. А. Козлов, В. Б. Кунтуш. – М. : Лесн. пром-сть, 1990. – 304 с.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Нигматулин Р. И. – М. : Наука, 1987. – 462 с.
10. Чудинов Б. С. Вода в древесине / Чудинов Б. – Новосибирск : Наука, 1984. – 270 с.
11. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред / Николаевский В. Н. – М. : Недра, 1984. – 232 с.
12. Дорняк О. Р. Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем лесного комплекса / Дорняк О. Р. // Межв. сборн. назн. тр. ВГЛТА. – Воронеж, 2001. – С. 132-139.
13. John F. Sian. Wood: influence of moisture on physical properties / John F. Sian. – Virginia, 1995. – 227 p.
14. Bodic J. Mechanics of Wood and Composites / Bodic J., Jayne A. – New York : Van Nostrand Reinhold, 1982. – 712 p.
15. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості / Можаровський М. С. – К. : Вища школа. – 2002. – 312 с.
16. Соколовський Я. І. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини / Соколовський Я. І., Андрашек Й. В. // Науковий вісник УкрДЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 1999. – Вип. 9.13. – С. 15-26.
17. Уголев Б. Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения : учеб. для лесотехн. вузов / Б. Н. Уголев ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. гос. ун-т леса. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М. : МГУЛ, 2002. – 340 с.
18. Лыков А. В. Теория сушки / Лыков А. В. – М. : Энергия, 1968. – 472 с.
19. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Сегерлинд Л. – М. : Мир, 1979. – 378 с.
20. Соколовський Я. І. Об'єктно-орієнтована реалізація методу скінчених елементів для розрахунку в'язкопружного стану капілярно-пористих матеріалів / Соколовський Я. І., Мокрицька О. В. // Вісник національного університету "Львівська політехніка" : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2011. – Вип. 710. – С. 181-188.
21. Li X. Finite element method and constitutive modeling and computation for unsaturated soils / X. Li, H. R. Thomas // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1999. – V. 169. – No 1-2. – P. 135-169.
22. Гороховский А. Г. Повышение эффективности управления процессом сушки пиломатериалов / А. Г. Гороховский – Екатеринбург: УГЛТУ, 2008. – 128 с.