КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

Развивается равновесный подход к решению проблемы ценового регулирования загруженности сети связи.

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

УСТАНОВЛЕНИЕ ПЛАТЫ ЗА ТРАФИК ПО СЕТИ СВЯЗИ

Введение. Современный Интернет использу-ется очень неоднородной совокупностью пользователей: разные конечные пользовате-ли придают разную ценность своему воспри-ятию работы сети, пропускающей разные типы сообщений. Поэтому тяжело оценивать использование сети и определять размеще-ние ресурсов на передачу файлов и межличностную коммуникацию. Частично в ответ на данную неоднородность возникло разнообразие моделей для ценообразования перегрузки (congestion pricing) в будущем Интернете [1]. Данные модели предлагают традиционное экономическое решение задачи неоднородного спроса, рассматривая набор сетевых ресурсов как рынок и соответствующим образом определяя цену их использования.

Рассмотрим вопрос установления сборов, контроля интенсивности и маршрутизации для сети связи, передающей эластичный трафик (traffic), например, сети ATM, предлагающей услугу имеющейся битовой интенсивности. Можно предложить модель, для которой максмин как мера справедливой интенсивности является отдельным предель-ным случаем: в модели сбор, который готовы платить пользователи, влияет на выделенные им интенсивности. Если пользователь выби-рает сбор в единицу времени, который он будет платить, то интенсивность пользовате-ля определяется сетью по критерию пропорциональной справедливости, примененным к сбору в единицу времени. Системный оптимум достигается тогда, когда решения пользователей относительно сборов и сетевой выбор выделенных интенсивностей составляют равновесие.

Предположим, сеть имеет множество J ресурсов, а ресурс $j \in J$ характеризуется пропускной способностью C_j. Обозначим $C = (C_j, j \in J)$. Непустое подмножество J назовем маршрутом r. Обозначим R множество возможных маршрутов. Пусть

$$A_{jr} = \begin{cases} 1, j \in r \\ 0, j \notin r \end{cases}.$$

Если $j \in r,$ то будем говорить, что ресурс j лежит на маршруте $r.$ Матрица

$$A = (A_{jr}, j \in J, r \in R)$$

является булевой. Предположим, наборы маршрутов по сети могут заменять друг друга. Пусть s – подмножество R, составляющее путь из маршрутов от определенного источника до определенного пункта назначения (source-sink). Обозначим S множество возможных путей s. Пусть

$$H_{sr} = \begin{cases} 1, r \in s \\ 0, r \notin s \end{cases}.$$

Тогда матрица

$$H = (A_{sr}, s \in S, r \in R)$$

булева. Для каждого $r \in R$ определим такое значение $s(r)$, что $s(r) \in S$, $H_{sr} = 1$. Пусть значение $s(r)$ – единственное: $s(r)$ – это путь, обслуживающийся маршрутом r.

Если пути s выделяется интенсивность x_s, то пользователь пути имеет полезность $U_s(x_s)$, которую будем считать возрастающей, строго вогнутой и непрерывно дифференцируемой функцией x_s на области определения

$$x_s \geq 0. \tag{1}$$

Трафик, ведущий к такой функции полезности, называют эластичным [2]. Также предположим, что полезности – аддитивные, откуда агрегированная полезность от вектора интенсивностей $x = (x_s, s \in S)$ составляет

$$\sum_{s \in S} U_s(x_s). \tag{2}$$

Схема вектора потоков $y = (y_r, r \in R)$ поддерживает вектор интенсивностей $x = (x_s, s \in S)$, если

$$H\, y = x, \quad \sum_{r \in R} H_{sr} y_r = x_s, \ s \in S, \tag{3}$$

т. е. потоки y_r по маршрутам r, обслуживающим путь s, дают суммарную интенсивность x_s. Схему вектора $y = (y_r, r \in R)$ называют допустимой, если

$$y \geq 0, \tag{4}$$

$$Ay \leq C, \sum_{r\in R} A_{jr} y_r \leq C_j, \ j \in J. \tag{5}$$

Последнее означает, что потоки по маршрутам, где лежит ресурс j, дают суммарную пропускную способность не больше C_j. Обозначим $U = (U_s(\cdot), s \in S)$, $U' = (U_s'(x_s), s \in S)$.

Чтобы найти оптимальные векторы x и y интенсивностей и потоков соответственно, необходимо решить задачу максимизации функции (2) при ограничениях (1), (3)–(5).

Поскольку целевая функция (2) – дифференцируемая и строго вогнутая, а допустимая область (1), (3)–(5) – компактная, то указанная задача максимизации имеет решение (x^*, y^*). Данное решение можно найти методом Лагранжа. Поскольку функция (2) – строго вогнутая по x, то существует единственный оптимальный вектор интенсивностей; при этом может быть много векторов потоков, удовлетворяющих соотношениям (1), (3)–(5) при $x = x^*$. Будем говорить, что x решает задачу максимизации (2) при ограничениях (1), (3)–(5), когда существует такой вектор y, что (x, y) – решение данной задачи.

Функция Лагранжа задачи максимизации (2) при условиях (1), (3)–(5) равна

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = \sum_{s\in S} U_s(x_s) - \lambda^T (x - Hy) + \mu^T (C - Ay - z) =$$

$$= \sum_{s\in S} U_s(x_s) - \sum_{s\in S, r\in R} \lambda_s (x_s - H_{sr} y_r) + \sum_{j\in J, r\in R} \mu_j (C_j - A_{jr} y_r - z_j) =$$

$$= \sum_{s\in S} [U_s(x_s) - \lambda_s x_s] + \sum_{s\in S, r\in R} \lambda_s H_{sr} y_r - \sum_{j\in J, r\in R} \mu_j A_{jr} y_r + \sum_{j\in J} \mu_j (C_j - z_j) =$$

$$= \sum_{s\in S} [U_s(x_s) - \lambda_s x_s] + \sum_{r\in R} y_r [\lambda_{s(r)} - \sum_{j\in r} \mu_j] - \sum_{j\in J} \mu_j z_j + \sum_{j\in J} \mu_j C_j,$$

учитывая

$$\sum_{s\in S, r\in R} \lambda_s H_{sr} y_r = \sum_{r\in s\in S, r\in R} \lambda_s y_r = \sum_{r\in R} \lambda_{s(r)} y_r,$$

$$\sum_{j\in J, r\in R} \mu_j A_{jr} y_r = \sum_{j\in r\in R, r\in R} \mu_j y_r,$$

где $\lambda = (\lambda_s, s \in S)$, $\mu = (\mu_j, j \in J)$ – векторы множителей Лагранжа; $z = (z_j, j \in J) \geq 0$ – вектор переменных невязки. Максимизируя по x, y, z функцию Лагранжа, получаем

$$U_s'(x_s) - \lambda_s = \frac{\partial L}{\partial x_s} = \begin{cases} 0, x_s > 0 \\ \leq 0, x_s = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

$$\lambda_{s(r)} - \sum_{j\in r}\mu_j = \frac{\partial L}{\partial y_r} = \begin{cases} 0, y_r > 0 \\ \le 0, y_r = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

$$-\mu_j = \frac{\partial L}{\partial z_j} = \begin{cases} 0, z_j > 0 \\ \le 0, z_j = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Тогда, пользуясь общей теорией условной выпуклой оптимизации, существуют такие $\lambda,\ \mu,\ x,\ y,$ что выполняются условия (3)–(5), условие (6) в виде

$$\lambda \ge U'(x), \qquad [\lambda - U'(x)]^T x = 0,$$

условие (7) в форме

$$\lambda^T H \le \mu^T A, \qquad (\mu^T A - \lambda^T H)\, y = 0,$$

условие (8) в виде

$$\mu \ge 0, \qquad \mu^T (C - Ax) = 0.$$

При этом x решает задачу максимизации (2) при ограничениях (1), (3)–(5).

Множители Лагранжа $\lambda,\ \mu$ довольно просто интерпретируются: если маршрутом r идет поток $y_r > 0,$ то для любого маршрута $r^* \in R,$ обслуживающего те же самые источник и пункт назначения, выполняется

$$\sum_{j\in r}\mu_j \le \sum_{j\in r^*}\mu_j.$$

Можно считать μ_j неявной стоимостью единичного потока по звену j или теневой ценой дополнительной пропускной способности на звене j.

Если с пользователя s берут плату λ_s на единицу потока, то данный пользователь выбирает поток $x_s \ge 0,$ максимизирующий его выигрыш

$$U_s(x_s) - \lambda_s x_s. \tag{9}$$

При этом менеджер сети максимизирует свою выручку

$$\sum_s \lambda_s x_s \tag{10}$$

при ограничениях (1), (3)–(5). Говорят, что x решает задачу максимизации функции (10) при ограничениях (1), (3)–(5), если существует такой вектор $y,$ что пара (x, y) максимизирует функцию (10) при ограничениях (1), (3)–(5).

Теорема 1. Существует такой вектор цен $\lambda = (\lambda_s, s\in S),$ что вектор $x = (x_s, s\in S)$ решает задачу максимизации функции (10) при ограничениях (1), (3)–(5), где x_s – единственное решение задачи максимизации функции (9) при ограничении (1), $s \in S.$ Тогда x также решает задачу максимизации функции (2) при ограничениях (1), (3)–(5).

Прежде всего, задача максимизации функции (9) при ограничении (1) имеет единственное решение x_s в силу строгой вогнутости функции U_s:

$$0 \ge U_s'(x_s) - \lambda_s, \qquad [\lambda_s - U_s'(x_s)]\, x_s = 0,\ x_s \ge 0.$$

Аналогично функции $L(x,y,z;\lambda,\mu)$, функция Лагранжа задачи максимизации (10) при условиях (1), (3)–(5) равна

$$L(x,y,z;p,q)=\sum_s \lambda_s x_s - p^T(x-H\,y)+q^T(C-A\,y-z)=$$
$$=\sum_s x_s(\lambda_s-p_s)+\sum_r y_r[p_{s(r)}-\sum_{j\in r} q_j]-\sum_{j\in J} q_j z_j+\sum_{j\in J} q_j C_j.$$

Тогда, если λ, μ, x, y удовлетворяют условиям оптимальности (6)–(8), то при $p=\lambda$, $q=\mu$ пара (x,y) максимизирует (10) при ограничениях (1), (3)–(5), а также максимизирует (2) при ограничениях (1), (3)–(5).

С другой стороны, если x решает задачу максимизации функции (10) при ограничениях (1), (3)–(5), то существуют такие множители Лагранжа p, что

$$p_s=\lambda_s \text{ при } x_s>0, \quad p_s\geq\lambda_s \text{ при } x_s=0.$$

Тогда, если x_s максимизирует функцию (9) при ограничении (1), то также максимизирует при ограничении (1) функцию

$$U_s(x_s)-p_s x_s\,.$$

Следовательно, удовлетворяют условиям оптимальности (6)–(8) также p, q, x, y, а x решает задачу максимизации (2) при ограничениях (1), (3)–(5).

Перейдем к детальному анализу единственного звена связи. Предположим, R пользователей делят звено связи полной пропускной способности $C>0.$ Обозначим d_r объем, выделенный пользователю r и обозначим $U_r(d_r)$ соответствующую полезность пользователя r измеряемую в денежных единицах.

А1. Пусть для каждого $r=1,2,\ldots,R$ функция полезности $U_r(d_r)$ – вогнутая, строго возрастающая, непрерывная на области $d_r\geq 0,$ непрерывно дифференцируемая на области $d_r>0,$ а в точке $d_r=0$ правая производная по направлению $U_r^{'}(0)$ конечная. Предположение дифференцируемости функции $U_r(d_r)$ можно ослабить.

Вогнутость $U_r(d_r)$ отвечает эластичности трафика [2], что является довольно жестким предположением в постановке для сетей связи; эластичный трафик типичен для передачи файлов, а такой трафик, как телефонные звонки и видеопотоки (с минимальными требованиями к объему) можно моделировать, используя невогнутые функции полезности. Например, если телефонный звонок требует минимального дневного объема $D,$ то соответствующая функция полезности может равняться 0 для любого объема, меньшего чем D и некоторой положительной константе для любого объема, не меньшего чем $D.$

При полной информации и централизованном контроле системы, понятная задача менеджера (звеньев сети) – пытаться решить такую задачу оптимизации [3]: максимизировать по d_r, $r=1,2,\ldots,R$, суммарную (агрегированную) функцию полезности

$$\sum_{i=1}^{R} U_r(d_r) \tag{11}$$

при ограничении на пропускную способность звена

$$\sum_{r=1}^{R} d_r \le C, \tag{12}$$

а также при неотрицательности выделенных пользователю ресурсов

$$d_r \ge 0\,,\ r = 1, 2, \ldots, R\,. \tag{13}$$

Функция (11) – это агрегированный излишек при неэластичном предложении.

Поскольку, вообще говоря, функции полезности не являются известными менеджеру, то он может применить определенную схему ценообразования для назначения объемов d_r, $r = 1, 2, \ldots, R$ [3]. Пусть каждый пользователь (потребитель) $r = 1, 2, \ldots, R$ выбирает и подает менеджеру ценовую заявку (готовность платить) $w_r \ge 0.$ Предположим, менеджер относится ко всем пользователям одинаково, т. е. не применяет к ним ценовую дискриминацию и берет с них одинаковую цену $\mu > 0$ за единицу продукта. Поэтому пользователь r получает объем (спроса) $d_r = \dfrac{w_r}{\mu}.$ Если менеджер всегда стремится достигать равенства в ограничении (12), то агрегированное предложение (aggregate supply)

$$AS(\mu) = C$$

будет равняться агрегированному спросу (aggregate demand)

$$AD(\mu) = \sum_{r=1}^{R} d_r = \sum_{r=1}^{R} \frac{w_r}{\mu},$$

откуда

$$\mu C = \sum_{r=1}^{R} w_r,$$

$$\mu = \frac{\sum_{r=1}^{R} w_r}{C}. \tag{14}$$

Данный механизм ценообразования можно интерпретировать как процесс уравновешивания рынка (market-clearing process), когда цена устанавливается так, чтобы уравнять спрос и предложение. Выбирая общий платеж w_r, пользователь r может проявлять свою функцию спроса $D(p, w_r) = \dfrac{w_r}{p}$ от цены $p > 0$ (семейство таких функций можно параметризовать). Данная функция описывает объем услуги, за которую пользователь r готов заплатить для любой цены $p > 0.$ При цене (14) пользователь r получает объем

$$d_r = D(\mu, w_r) = \frac{w_r}{\mu} = \frac{C\, w_r}{\sum_{r=1}^{R} w_r}, \tag{15}$$

заплатив за это $\mu D(\mu, w_r) = w_r$.

Заметим, что такая интерпретация механизма ценообразования в терминах пользователей, подающих функции спроса, довольно похожа на модель аукциона делимых (divisible) товаров [4]. Данная модель позднее изучалась для аукционов казначейских векселей [5]. В данном механизме, в отличие от модели [4], функции спроса параметризованы единственным скаляром так, чтобы упростить пространство стратегий пользователей: пользователям достаточно подавать их общие готовности платить вместо того, чтобы передавать всю функцию спроса по сети. Подобно равновесиям функций предложения [6], модель [7] называют равновесием функций спроса.

Центральное предположение – это то, что каждый пользователь r не предвидит влияния своего платежа w_r на цену μ, т. е. действует как ценополучатель. Тогда при заданной цене μ пользователь r максимизирует по $w_r \geq 0$ функцию выигрыша (payoff)

$$P_r(w_r, \mu) = U_r(d_r) - w_r = U_r\left(\frac{w_r}{\mu}\right) - w_r = U_r\left(\frac{w_r}{\mu}\right) - \mu\left(\frac{w_r}{\mu}\right), \tag{16}$$

квазилинейную в денежных единицах [7].

Конкурентное равновесие – это пара $(\vec{w}^e, \mu^e)$, $\vec{w} = (w_1^e, w_2^e, \ldots, w_R^e) \geq \vec{0}$, где каждый пользователь r максимизирует свой выигрыш (6), а сеть уравновешивает рынок через установление такой цены $\mu^e = \mu(w_1^e, w_2^e, \ldots, w_R^e)$ по равенству (14), что

$$P_r(w_r^e, \mu^e) \geq P_r(w, \mu^e) \ \forall w \geq 0, \ r = 1, 2, \ldots, R. \tag{17}$$

Рассмотрим модель, где пользователи не предвидят влияния их заявок на цену, и докажем существование конкурентного равновесия для сети с единственным звеном. Покажем, что это равновесие ведет к размещению, являющемуся оптимальным решением задачи (11)–(13).

Теорема 2. В предположениях А1 существует конкурентное равновесие, т. е. вектор $\vec{w}^e = (w_1^e, w_2^e, \ldots, w_R^e) \geq \vec{0}$ и единственный скаляр $\mu^e > 0$, удовлетворяющие равенству (14) и неравенствам (17). Тогда вектор $\frac{\vec{w}^e}{\mu^e} =$ $= \vec{d}^o = (d_1^o, d_2^o, \ldots, d_R^o)$ – оптимальное решение задачи (11)–(13); такое решение единственно, когда функции $U_r(d_r)$ строго вогнуты.

С помощью метода Лагранжа покажем, что условия (14) и (17) – это условия оптимальности задачи (11)–(13).

Поскольку U_r – вогнутая по $\frac{w_r}{\mu}$, то в силу (16) P_r – также вогнутая. При $\mu > 0$ вектор $\vec{w}$ удовлетворяет неравенствам (7) тогда и только тогда, когда

$$0 = P_r' = U_r'\left(\frac{w_r}{\mu}\right) - \mu \text{ для } w_r > 0, \tag{18}$$

$$0 \ge P_r' = U_r'(0) - \mu \text{ для } w_r = 0, \;\; r = 1,2,\ldots,R. \tag{19}$$

Тогда, учитывая равенства (15), существуют вектор $\vec{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_R)$ и единственный скаляр $\mu > 0$ такие, что

$$U_r'(d_r) = \mu \text{ для } d_r > 0, \tag{20}$$

$$U_r'(0) \le \mu \text{ для } d_r = 0, \;\; r = 1,2,\ldots,R, \tag{21}$$

$$\sum_{r=1}^{R} d_r = C. \tag{22}$$

Отсюда $\vec{d}$ – оптимальное решение задачи (11)–(13). Он единственный, если функции U_r – строго вогнутые. В предположениях А1 функция (11) непрерывна, а ограничения (12) и (13) определяют допустимую область как выпуклый компакт. Поэтому в задаче (11)–(13) существует (оптимальное) решение. Для функции Лагранжа задачи (11)–(13)

$$L(\vec{d}, \mu) = \sum_{r=1}^{R} U_r(d_r) - \mu\left(\sum_{r=1}^{R} d_r - C\right)$$

в точке $\vec{d} = \vec{0}$ выполняется условие Слейтера [8] квалификации ограничения (12):

$$\sum_{r=1}^{R} d_r = 0 < C.$$

Это гарантирует существование множителя Лагранжа $\mu \ge 0,$ удовлетворяющего условиям (20)–(22). Поскольку существует оптимальное решение задачи (11)–(13), то существует пара $(\vec{d}, \mu),$ удовлетворяющая условиям (20)–(22).

В силу $C > 0$ и ограничения (22) $\max\{d_1, d_2, \ldots, d_R\} > 0$, откуда $\mu > 0$ в силу (20) и строгого возрастания U_r. Покажем, что значение μ определяется однозначно. Действительно, если существуют пары $(\vec{d}_1, \mu_1),$ $(\vec{d}_2, \mu_2),$ удовлетворяющие условиям (20)–(22), $\mu_1 < \mu_2,$ то при $d_{2r} > 0$ в силу (20), (21) имеем

$$U_r'(d_{2r}) = \mu_2 > \mu_1 \ge U_r'(d_{1r}),$$

откуда $d_{1r} > d_{2r} > 0$ в силу строгого возрастания U_r. Тогда

$$\sum_{r=1}^{R} d_{1r} > \sum_{r=1}^{R} d_{2r},$$

что противоречит условию (20).

Если пара $(\vec{d},\mu)$ удовлетворяет условиям (20)–(22), $\vec{w}=\mu\vec{d}$, то пара $(\vec{w},\mu)$ удовлетворяет условиям (14), (17). Поскольку $\mu>0$, то условия (22) и (15) равносильны, условия (21), (22) эквивалентны условиям (18), (19), что гарантирует выполнение неравенств (17). Таким образом, существуют вектор $\vec{w}$ и скаляр $\mu>0$, удовлетворяющие условиям (14), (17).

Наоборот, если пара $(\vec{w},\mu)$ удовлетворяет условиям (14), (17), $\mu>0$, то при $\vec{d}=\mu^{-1}\vec{w}$ пара $(\vec{d},\mu)$ удовлетворяет условиям (20)–(22), условия (18), (19) равносильны условиям (21), (22), а неравенства (17) эквивалентны условию (22). Итак, μ определяется однозначно, а вектор $\vec{d}=\mu^{-1}\vec{w}$ – оптимальное решение задачи (11)–(13). Если функции U_r – строго вогнутые, то преобразование $(\vec{w},\mu)\to(\vec{d},\mu)$ – взаимно однозначное, а $\vec{w}$ определяется однозначно.

По теореме 2, если пользователи звена – ценополучатели, то существует вектор заявки $\vec{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_R)$, по которому все пользователи оптимально выбирают свои заявки w_r, $r=1,2,\ldots,R$, относительно данной цены μ согласно (14). Данный равновесный вектор максимизирует агрегированную полезность.

Когда не все пользователи являются ценополучателями, то условия теоремы 2 нарушаются. Можно рассмотреть альтернативную модель, где все пользователи единственного звена предвидят влияние своих действий на цену. Данная модель имеет единственное равновесие Нэша [9]. Если в предыдущей модели функции выигрыша P_r согласно (16) цена μ – фиксированный параметр для пользователя, то в альтернативной модели пользователь r понимает, что цена μ устанавливается по правилу (14) и соответствующим образом принимает решение, $r=1,2,\ldots,R$.

Можно рассматривать разные модели, как пользователи могут взаимодействовать по данному механизму. Подытоживая ключевые результаты [3], точно определяем, кто является ценополучателем и что является конкурентным равновесием между пользователями и менеджером [10, 11]. Можно рассмотреть также игру, где пользователи являются ценопредсказателями, доказать существование и единственность равновесия Нэша через максимизацию суммы модифицированных полезностей [9]. Выручка менеджера в равновесии Нэша может сколь угодно мало отличаться от конкурентного равновесия. При этом, если все функции полезности линейны, то выручка менеджера в равновесии Нэша составляет не меньше половины выручки в аукционе Викри [12] (Викри – Нобелевский лауреат 1996 г.).

В.М. Горбачук

ВСТАНОВЛЕННЯ ПЛАТИ ЗА ТРАФІК ПО МЕРЕЖІ ЗВ’ЯЗКУ

Розвивається рівноважний підхід до розв’язання проблеми цінового регулювання завантаженості мережі зв’язку.

V.M. Gorbachuk

CHARGING TRAFFIC ON COMMUNICATION NETWORK

The equilibrium approach to solving the problem of price regulation for communication network is developed.

1. *Горбачук В.М.* Сучасні дослідження і розробки, вплив на довкілля та дифузія інформаційно-комунікаційних технологій // Postepy w nauce w ostatnich latach. Novych rozwiazan. Czesc 8. – Warszawa: Diamond trading tour, 2012. – P. 5–11.
2. *Shenker S.* Fundamental design issues for the future Internet // IEEE journal on selected areas in communications. – 1995. – Vol. 13. – P. 1176–1188.
3. *Kelly F.P.* Charging and rate control for elastic traffic // European transactions on telecommunications. – 1997. – Vol. 8. – P. 33–37.
4. *Wilson R.* Auctions of shares // Quarterly journal of economics. – 1979. – Vol. 93 (4). – P. 675–689.
5. *Wang J.J., Zender J.F.* Auctioning divisible goods // Economic theory. – 2002. – Vol. 19 (4). – P. 673–705.
6. *Klemperer P.D., Meyer M.A.* Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty // Econometrica. – 1989. – Vol. 57 (6). – P. 1243–1277.
7. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1995.
8. *Minoux M.* Mathematical programming: theory and algorithms. – Chichester: Wiley, 1986.
9. *Hajek B., Gopalakrishnan G.* Do greedy autonomous systems make for a sensible Internet? // Conference on Stochastic Networks. – Stanford, CA: Stanford University, 2002.
10. *Горбачук В.М.* Методи індустріальної організації. – К.: А. С. К., 2010. – 224 с.
11. *Горбачук В.М., Русанов И.А.* Макроекономічні наслідки ринкових недосконалостей сектору енергетики // Фінансове забезпечення діяльності суб’єктів господарювання. – Кременчук: Кременчуцький національний університет імені М. Остроградського, 2013. – С. 120 – 124.
12. *Vickrey W.* Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // Journal of finance. – 1961. – Vol. 16 (1). – P. 8–37.

Получено 20.02.2013

Об авторе:

Горбачук Василий Михайлович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.