АЛГОРИТМИ

УДК 519.65

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ З ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

П. С. Малачівський[1,2], Л. С. Мельничок[1], Я. В. Пізюр[3]

[1]Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна,

[2]Українська академія друкарства, вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна,

[3]Національний університет "Львівська політехніка" вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функції двох змінних з відтворенням її значення у заданій точці. Він ґрунтується на послідовній побудові середньостепеневих наближень з інтерполюванням у заданій точці. Для побудови середньостепеневого наближення використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Описано алгоритм для обчислення параметрів чебишовського наближення з інтерполюванням для абсолютної та відносної похибки. Подані тестові приклади чебишовського наближення з інтерполюванням підтверджують ефективність методу при наближенні функцій однієї та двох змінних.

Ключові слова: *чебишовське наближення з інтерполюванням, функція двох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів.*

Вступ. Нехай неперервна функція двох змінних $f(x, y)$ задана на множині різних точок $\Omega \in \left\{x_i, y_j\right\}_{i=0,\, j=0}^{n,\, s_i}$. Функцію $f(x, y)$ необхідно наблизити узагальненим поліномом

$$F_m(a; x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x, y) \tag{1}$$

за системою базисних функцій $\varphi_i(x, y)$, $i = \overline{0, m}$, де a_i, $i = \overline{0, m}$ – невідомі параметри: $\left\{a_i\right\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$, R^m – m-вимірний простір дійсних чисел. Поліном $F_m(a^*; x, y)$ називатимемо чебишовським наближенням функції $f(x, y)$ на множині точок Ω з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, якщо він задовольняє умову

$$\max_{\Omega}\left| f(x, y) - F_m(a^*; x, y)\right| = \min_{a \in A} \max_{\Omega}\left| f(x, y) - F_m(a; x, y)\right| \tag{2}$$

і в точці $(\bar{x}, \bar{y})$ відтворює значення функції $f(x, y)$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = F_m(a^*; \bar{x}, \bar{y}) = v\,. \tag{3}$$

Наближення, що задовольняє умови (2) і (3), називають чебишовським наближенням з інтерполюванням або з умовою [1, 2].

Задача знаходження чебишовського наближення з інтерполюванням виникає, під час проєктування вимірювальних приладів [1, 3 - 5], у яких певному значенню вихідного сигналу сенсора має відповідати конкретне значення вимірюваної величини.

Властивості чебишовської апроксимації з інтерполюванням для функцій однієї змінної описано в працях [1, 2, 6 - 8]. В цих працях подано відповідні характеристичні властивості й запропоновано алгоритми для визначення параметрів чебишовського наближення з інтерполюванням. Ми пропонуємо метод побудови чебишовського наближення функцій двох змінних з інтерполюванням як граничного наближення у нормі простору L^p при $p \to \infty$[9, 10]. Цей метод полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень з відтворенням значення функції в заданій точці.

1. Метод визначення параметрів чебишовського наближення функцій двох змінних з інтерполюванням

Побудова чебишовського наближення таблично-заданих функцій двох змінних з інтерполюванням ґрунтується на ідеї послідовного отримання середньостепеневого наближення в просторі E^p при $p = 2, 3, 4, \dots$ [11, 12]. Нехай для функції $f(x, y)$, таблично-заданої на множині точок Ω, існує чебишовське наближення поліномом $F_m(a; x, y)$ з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y})$. Для побудови такого чебишовського наближення можна використати метод послідовних середньостепеневих наближень виразом

$$\overline{F}_m(a; x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x, y) + \left(v - \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) \right) \frac{\varphi_0(x, y)}{\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})}. \qquad (4)$$

Вираз $\overline{F}_m(a; x, y)$ отримано з поліному (1) з врахуванням відтворення значення функції $f(x, y)$ в точці $(\bar{x}, \bar{y})$ – $f(\bar{x}, \bar{y}) = v$: на підставі інтерполяційної умови (3) з поліному (1) вилучили параметр a_0. При отриманні виразу (4) ми припустили, що $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ не дорівнює нулеві.

Побудова чебишовського наближення функції $f(x, y)$ полягає послідовному обчисленні середньостепеневих наближень $f(x, y)$ виразом $\overline{F}_m(a; x, y)$ для $p = 2, 3, 4, \dots$. Для обчислення значень параметрів середньостепеневих наближень використовуємо ітераційну схему на основі методу найменших квадратів [11 – 12]

$$\sum_{X \in \Omega_u} \rho_r(x, y) \left(f(x, y) - \overline{F}_m(a; x, y) \right)^2 \xrightarrow[a \in A]{} \min, \quad r = 1, \dots, p-2, \quad p = 2, 3,, \dots \qquad (5)$$

з послідовним уточненням значень вагової функції

$$\rho_0(x, y) \equiv 1, \quad \rho_r(x, y) = \prod_{i=1}^{r} \left| \Delta_i(x, y) \right|, \quad r = 1, \dots, p-2, \qquad (6)$$

де $\Delta_k(x,y)= f(x,y)-\overline{F}_{m,k-1}(a;x,y)$, $k=\overline{1,r}$, $\overline{F}_{m,k}(a;x,y)$ – наближення функції $f(x, y)$ виразом (4) за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(x,y)$ на множині точок $\Omega_u = \Omega \setminus (\overline{x},\overline{y})$.

Метод найменших квадратів (5) з ваговою функцією (6) забезпечує послідовне отримання середньостепеневих наближень $\overline{F}_{m,r}(a;x,y)$, $r = 0,1$,... функції $f(x, y)$ в просторі E^{r+2}. Відповідно до (6) значення вагової функції на кожній ітерації (5) змінюється пропорційно модулю похибки наближення функції $f(x, y)$ виразом $\overline{F}_{m,r}(a;x,y)$

$$\mu_r(x,y)=\left| f(x,y)-\overline{F}_{m,r}(a;x,y)\right|, \tag{7}$$

який отримано на попередній ітерації. Оскільки точці $(x,y)\in\Omega_u$ з найбільшим відхиленням (7) відповідає найбільше пропорційне збільшення вагової функції (6), то застосування такого уточнення значень вагової функції для ітерацій (5) зумовлює послідовне зменшення похибки наближення (7) функції $f(x, y)$ на множині точок Ω_u

$$\hat{\mu}_0 > \hat{\mu}_1 > \ldots > \hat{\mu}_r, \tag{8}$$

де

$$\hat{\mu}_r = \max_{(x,y)\in\Omega_u} \mu_r(x,y). \tag{9}$$

Отже, аналогічно до методу описаного в [11, 12], застосування вагової функції (6), значення якої на кожній ітерації (5) змінюються пропорційно до модуля похибки (7) відтворення значення функції $f(x, y)$, зумовлює послідовне зменшення похибки її відтворення (9) наближенням $\overline{F}_{m,r}(a;x,y)$. Послідовне зменшення похибки відтворення значень функції $f(x, y)$ наближенням $\overline{F}_{m,r}(a;x,y)$ в результаті кожної наступної ітерації (5) з ваговою функцією (6) обґрунтовує збіжність ітерацій (5)-(6).

Завершення ітерацій (5) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\left| \hat{\mu}_{r-1} - \hat{\mu}_r \right| \le \varepsilon \hat{\mu}_r. \tag{10}$$

Значення параметрів $a_i \left(i=\overline{1, m}\right)$ чебишовського наближення узагальненим поліномом (1) дорівнюють значенням відповідних параметрів $a_i \left(i=\overline{1, m}\right)$ в наближенні $\overline{F}_{m,r}(a;x,y)$, а значення параметра a_0 обчислюємо за формулою

$$a_0 = \left(v - \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x,y) \right) \Big/ \varphi_0(x,y). \tag{11}$$

Отже, послідовне уточнення значень вагової функції (6) з врахуванням похибок відтворення значень функції $f(x, y)$ за результатами всіх попередніх наближень за методом найменших квадратів (5), забезпечує збіжність ітераційної схеми (5)-(6) при обчисленні середньостепеневих наближень з інтерполюванням в точці $(\bar{x},\bar{y})$ і відповідно забезпечує збіжність методу обчислення чебишовського наближення з відтворенням значення функції $f(x, y)$ в точці $(\bar{x},\bar{y})$ – $f(\bar{x},\bar{y})=v$. Задаючи значення ε в (10), можна досягнути необхідної точності обчислення параметрів чебишовського наближення функції $f(x, y)$ з інтерполюванням.

2. Визначення параметрів чебишовського наближення функції двох змінних з інтерполюванням з відносною похибкою

Якщо неперервна функція $f(x, y)$ на множині точок Ω не набуває значень рівних нулеві, то за аналогічним методом можна обчислити чебишовське наближення $f(x, y)$ з відносною похибкою. Для побудови чебишовського наближення функції $f(x, y)$ з відносною похибкою й інтерполюванням у точці $(\bar{x},\bar{y})$ використовуємо метод найменших квадратів (5) з ваговою функцією

$$\rho_0(x,y)=\frac{1}{f^2(x,y)}, \quad \rho_r(x,y)=\prod_{i=1}^{r}\left|\Theta_i(x,y)\right|,$$
$$r=1,\dots,p-2, \quad p=3,4,\dots, \tag{12}$$

де

$$\Theta_k(x,y)=\frac{f(x,y)-\bar{F}_{m,k-1}(a;x,y)}{f(x,y)}, \quad k=\overline{1,r}, \tag{13}$$

а $\bar{F}_{m,k}(a;x,y)$ – наближення функції $f(x, y)$ виразом (4) за методом найменших квадратів з ваговою функцією $p_k(x, y)$.

Під час побудови наближення з відносною похибкою завершення ітерацій (5) з ваговою функцією (12) можна контролювати досягненням деякої необхідної точності ε відповідно до умови (10), в якій

$$\hat{\mu}_r(x,y)=\max_{X\in\Omega_u}\left|\Theta_{r+1}(x,y)\right|, \tag{14}$$

де $\Theta_{r+1}(x,y)$ – похибка відтворення функції $f(x, y)$ виразом $\bar{F}_{m,r}(a;x,y)$, отриманим за методом найменших квадратів (5) на r-ій ітерації.

Параметри a_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ чебишовського наближення неперервної функції $f(x, y)$ заданої на множині точок Ω з відносною похибкою і інтерполюванням у точці $(\bar{x},\bar{y})$ узагальненим поліномом (1) дорівнюють значенням відповідних параметрів наближення $\bar{F}_{m,r}(a;x,y)$, визначеного за результатом виконання умови (10), (14). Значення параметра a_0 обчислюємо за формулою (11).

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення з інтерполюванням для тестових прикладів підтверджують збіжність ітераційного процесу (5) з ваговими функціями (6) і (12) при наближенні функцій однієї і двох змінних. Зокрема, під час розв'язування тестових прикладів для функцій двох змінних, заданих на множині зі 121-ї точки, співпадання двох-трьох значущих цифр у похибці наближення досягалось при $\varepsilon = 0.003$ за сімнадцять-двадцять ітерацій (5) як з ваговою функцією (6) для абсолютної похибки, так і з ваговою функцією (12) для відносної похибки.

Приклад 1. Знайдемо чебишовське наближення функції $y(x) = \sqrt{0.1 + 2x + 3x^3}$ заданої в точках x_i, $i = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$, поліномом другого степеня з інтерполюванням у точці $\bar{x} = x_2 = 0.2$.

З використанням запропонованого методу при $\varepsilon = 0.003$ за одинадцять ітерацій (5) для функції $y(x)$ отримано поліном

$$P_2(a; x) = 0.4557847182x^2 + 1.488032218x + 0.4080406105, \qquad (15)$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення – 0.09482222. Чебишовське наближення функції y(x) поліномом другого степеня з інтерполюванням у точці $\bar{x} = x_2 = 0.2$, отримане за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле-Пуссена [13] забезпечує похибку апроксимації – 0.09289:

$$\overline{P}2(a; x) = 0.409117882583 + 1.482062202217x + 0.4587027393937x^2. \qquad (16)$$

Перевищення похибки наближення поліномом (15) в порівнянні з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза (16), дорівнює – 0.00193, що становить 1.96% від похибки чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза.

Криву похибки апроксимації функції y(x) поліномом (15) подано на рис. 1.

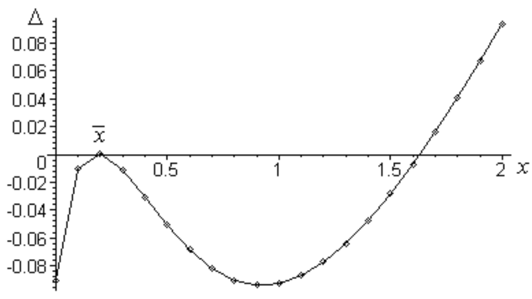

Рис. 1. Крива похибки апроксимації функції y(x) поліномом (15)

Подана на рисунку крива похибки наближення функції $y(x)$ поліномом (15) відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення з інтерполюванням [8, 13] – має три екстремальні точки, в яких досягає найбільшого за модулем відхилення, значення модулів цих відхилень збігаються (в межах заданої точності) і знак відхилень у цих точках чергується за винятком точок сусідніх з точкою інтерполювання $\bar{x} = x_2 = 0.2$:

$$(0,\ -0.0918128445),\ \ (0.9,\ -0.094822225),\ \ (2,\ 0.093699392). \qquad (17)$$

В екстремальних тачках сусідніх з точкою інтерполювання – в першій і другій екстремальній точці знак відхилень співпадає. Екстремальні точки (17) збігаються з точками альтернансу, отриманими при наближенні функції $y(x)$ за схемою Ремеза (16). У першій екстремальній точці (17) спостерігається дещо менше за модулем значення похибки наближення. Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках можна підвищити точність обчислення чебишовського наближення, зменшивши значення ε в умові (10).

Чебишовське наближення функції $y(x)$ з абсолютною похибкою 0.09312 було отримано за методом (5)-(6) при $\varepsilon = 0.00004$ за дев'яносто п'ять ітерацій

$$\widehat{P}_2(a;x) = 0.4584734726x^2 + 1.48264367x + 0.4090107699 \qquad (18)$$

Для наближення поліномом (18) в екстремальних точках спостерігались такі значення похибок:

$$(0,\ -0.0927830039),\ \ (0.9,\ -0.093120583),\ \ (2,\ 0.\,92751312).$$

З підвищенням точності ε обчислення наближення поліномом другого степеня екстремальні точки не змінилися, а значення модулів похибки чебишовського наближення в цих точках майже вирівнялися: значення відхилення в першій екстремальній точці менше за відхилення у двох інших точках на 0.0003376, розбіжність значень відхилень екстремальних точках становить 0.36%.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом другого степеня з інтерполюванням у точці $\overline{x} = x_2 = 0.2$ з відносною похибкою за методом (5), (12) для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за сім ітерацій. Поліном

$$\overline{P}_2(a;x) = 0.3442425392 + 1.861164063x + 0.1850772743x^2 \qquad (19)$$

забезпечує відносну похибку наближення – 9.447%.

Графік відносної похибки наближення (19) також відповідає характерним ознакам чебишовського наближення з інтерполюванням [8, 13] – в екстремальних точках відносна похибка набувала таких значень (у відсотках):

$$(0,\ -8.859049145),\ \ (0.6,\ -9.447614958),\ \ (2,\ 9.320294916).$$

Чебишовське наближення функції y(x) поліномом другого степеня з відносною похибкою й інтерполюванням у точці $\overline{x} = x_2 = 0.2$, отримане за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле-Пуссена [13]

$$\overline{P}_2(a;x) = 0.345662893101293 + 1.8533164802921x + 0.188806208325463x^2, \qquad (20)$$

забезпечує похибку апроксимації – 9.308%. Перевищення похибки наближення поліномом (19) в порівнянні з похибкою чебишовського наближення

(20), отриманого за схемою Ремеза, дорівнює – 0.14%.

Приклад 2. Знайдемо чебишовське наближення функції $z(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ заданої в точках (x_i, y_j), $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,10}$, де $x_i=0.1i$, $y_j=0.1j$, поліномом другого степеня за змінними x та y з інтерполюванням у точці (0.5, 0.5), тобто відтворенням значення $-z(0.5,0.5)=\sqrt{1.5}$.

З використанням запропонованого методу при $\varepsilon = 0.003$ за тридцять ітерацій (8)-(9) для функції $z\ (x, y)$ отримано поліном

$$P_{2,2}(a;x,y)=0.319921001\left(y^2+x^2\right)+0.09403285961(y+x)-\\-0.07493735704yx+0.9894858495. \tag{21}$$

Поліном (21) забезпечує абсолютну похибку наближення функції z (x, y) – 0.012079713. Поверхню похибки апроксимації функції z (x, y) поліном (21) подано на рис. 2.

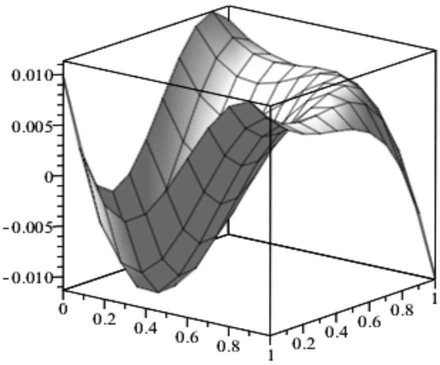

Рис. 2. Поверхня похибки апроксимації функції z (x, y) поліномом (21) з абсолютною похибкою.

Знайдемо чебишовське наближення функції $z\ (x,\ y)$ поліномом другого степеня за змінними x та y з відносною похибкою й інтерполюванням у точці (0.5, 0.5), тобто відтворенням значення – $z(0.5,0.5)=\sqrt{1.5}$.

З використанням запропонованого методу при $\varepsilon = 0.003$ за п'ять ітерацій (8)-(17) для функції $z\ (x, y)$ отримано поліном

$$\hat{P}_{2,2}(a;x,y)=0.32298462\left(y^2+x^2\right)+0.08916133302(y+x)-\\-0.06825466998yx+0.991154896. \tag{22}$$

Поліном (22) забезпечує відносну похибку наближення функції z (x, y) – 1.03%.

Висновок. Чебишовське наближення функцій двох змінних з інтерполюванням можна обчислити за ітераційною схемою (5)-(6) з найменшою абсолютною похибкою і за схемою (5), (12) – з відносною похибкою. Цей метод полягає у послідовній побудові середньостепеневих наближень з інтерполяційною умовою за ітераційною схемою на основі методу найменших квадратів. Він передбачає можливість обчислити чебишовське наближення функції двох змінних з інтерполюванням із необхідною точністю. Тестові приклади підтверджують достатньо швидку збіжність запропонованого методу як при побудові чебишовського наближення з абсолютною похибкою, так і відносною похибкою. За аналогічною схемою можна реалізувати обчислення чебишовського наближення з інтерполюванням в декількох точках, а також побудову чебишовського наближення з інтерполюванням для функцій багатьох змінних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наукова думка. 1980. – 352 с.
2. Dunham C., Zhu C. Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg/ Can. 1990, Congr. Numerantium 80. P 161-169 (1991).
3. Яцук В. О., Малачівський П. С. Методи підвищення точності вимірювань – Львів: Видавництво: «Бескид Біт», 2008. – 368 с.
4. Температурные измерения / Геращенко О.А., Гордов А.И., Еремина А.К. и др. – Киев: Наук. думка, 1989. – 704 с.
5. Верлань А. Ф., Адбусадаров Б. Б., Игнатенко А. А., Максимович Н. А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 208 с.
6. Кондратьев В. П. Равномерная аппроксимация с ограничениями интерполяционного типа // В кн.: Алгоритмы и программы приближения функций. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1981. – С. 40–69.
7. Skopetskii V. V., Malachivskii P. S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation // Cybernetics and Systems Analysis, – January 2009, Volume 45, Issue 1, pp 58–68.
8. Малачівський П. С., Скопецький В. В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення – К. : Наук. думка, 2013. – 270 с.
9. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
10. Malachivskyy P. S., Matviychuk Y. N., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. Uniform Approximation of Functions of Two Variables / Cybernetics and Systems Analysis, No. 3, May–June, 2017. – Pp. 426–431.
11. Малачівський П. С., Монцібович Б. Р., Пізюр Я. В., Малачівський Р. П. Чебишовське наближення раціональним виразом функцій двох змінних // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки, – 2019. – С. 75-81.
12. Малачівський П. С., Пізюр Я. В., Малачівський Р. П. Обчислення чебишовського наближення функції багатьох змінних // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць V наук.-техн. конф., Львів, 4-5 жовтня 2018 р. – Львів: ФМІ НАНУ, – 2018. – С. 35-38.
13. Малачівський П. С., Пізюр Я. В. Розв'язування задач в середовищі Maple – Львів: Видавництво: "РАСТР – 7". – 2016. – 282 с.

REFERENCES

1. Popov B. A., Tesler G. S. (1980). Priblizhenie funkczij dlya tekhnicheskikh prilozhenij. – Kiev: Naukova dumka.– 352 s. (in Russian)
2. Dunham C., Zhu C. (1990). Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg / Can. Congr. Numerantium 80. P 161-169 (1991). (in English)
3. Yatsuk V. O., Malachivskyy P. S. (2008). Metody pidvyshchennia tochnosti vymiriuvan – Lviv: Vydavnytstvo: "Beskyd Bit"– 368 s. (in Ukrainian)
4. Temperaturnye izmereniya (1989). / Gerashchenko O. A., Gordov A. I., Eremina A. K. i dr. – Kiev: Nauk. dumka– 704 s. (in Russian)
5. Verlan A. F., Adbusadarov B. B., Ignatenko A. A., Maksimovich N. A. (1993). Metody i ustrojstva interpretacii eksperimentalnykh zavisimostej pri issledovanii i kontrole energeticheskikh processov. – Kyiv: Naukova dumka– 208 s. (in Russian)
6. Kondrat`ev V. P. (1981). Ravnomernaya approksimaciya s ogranicheniyami interpolyacionnogo tipa // V kn.: Algoritmy i programmy priblizheniya funkcij. – Sverdlovsk: In-t matem. i mekh. UNCz AN SSSR. – S. 40–69. (in Russian)
7. Skopetskii V. V., Malachivskii P. S. (2009). Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation // Cybernetics and Systems Analysis, – January Volume 45, Issue 1-pp 58–68. (in English)
8. Malachivskyy P. S., Skopetskyi V. V. (2013). Neperervne i hladke minimaksne splain-nablyzhennia – Kyiv: Nauk. dumka– 270 s. (in Ukrainian)
9. Remez E. Ya. (1969). Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniya. – Kyiv: Nauk. dumka. – 623 s. (in Russian)
10. Malachivskyy P. S., Matviychuk Y. N., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. (2017). Uniform Approximation of Functions of Two Variables / Cybernetics and Systems Analysis, No. 3, May–June– Pp. 426–431. (in English)
11. Malachivskyy P. S., Montsibovych B. R., Pizyur Ya. V., Malachivskyi R. P. (2019). Chebyshovske nablyzhennia ratsionalnym vyrazom funktsii dvokh zminnykh // Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Tekhnichni nauky — S. 75-81. (in Ukrainian)
12. Malachivskyy P. S., Pizyur Ya. V., Malachivskyi R. P. (2018). Obchyslennia chebyshovskoho nablyzhennia funktsii bahatiokh zminnykh // Obchysliuvalni metody i systemy peretvorennia informatsii: zb. prats V nauk.-tekhn. konf., Lviv, 4-5 zhovtnia 2018 r. – Lviv: FMI NANU – C. 35-38. (in Ukrainian)
13. Malachivskyy P. S., Pizyur Ya. V. (2016). Rozviazuvannia zadach v seredovyshchi Maple – Lviv: Vydavnytstvo: "RASTR – 7". –282 s. (in Ukrainian)

DOI: 10.32403/2411-9210-2019-2-42-38-47

CHEBYSHEV APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES WITH INTERPOLATION

P. Malachivskyy[1], L. Melnychok[2], Ya. Pizyur[3]

[1]*Center of Mathematical Modeling, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*
National Academy of Sciences of Ukraine
15, Dudayev St. Lviv 79005, Ukraine
Ukrainian Academy of Printing
19, Pid Holoskom St.,Lviv, 79020, Ukraine,
Petro.Malachivskyy@gmail.com

[2]*Center of Mathematical Modeling, Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*
National Academy of Sciences of Ukraine
15, Dudayev St. Lviv 79005, Ukraine
levkom@gmail.com

[3]*Lviv Polytechnic National University, Lviv*
12, S.Bandery St., Lviv, 79013, Ukraine,
pizyur@yahoo.com

A method of constructing a Chebyshev approximation of the function of two variables with the reproduction of its value at a given point has been suggested. It is based on the consistent construction of power-average approximations with interpolation at a given point. An iterative scheme based on the least squares method with a variable weight function has been used to construct the power-average approximation. An algorithm for calculating the Chebyshev approximation parameters with interpolation for absolute and relative error has been described. The presented test examples of the Chebyshev approximation with interpolation confirm the effectiveness of the method of approximating functions of one and two variables.

Keywords: *Chebyshev approximation with interpolation, function of two variables, power-average approximation, least squares method.*

Стаття надійшла до редакції 25.04.2019.
Received 25.04.2019.