

Д-р физ.-мат. наук А.А. Приходько

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ГОМОГЕННОЙ КОНДЕНСАЦИЕЙ В СОПЛАХ И РЕШЕТКАХ ТУРБОМАШИН

*Для расчета сжимаемых вязких трансзвуковых течений с фазовыми переходами применена модель гомогенной конденсации. Использована модель в рамках разработанного автором пакета прикладных программ. Приведены результаты расчета гомогенной конденсации в осесимметричном сопле и решетке профилей.*

*Для розрахунку стисливих в'язких трансзвукових течій з фазовими переходами застосовано модель гомогенної конденсації. Використано модель у рамках розробленого автором пакета прикладних програм. Наведено результати розрахунку гомогенної конденсації у вісесиметричному соплі та решітці профілів.*

*To calculate compressible viscous transonic flow with phase transition we used a homogeneous condensation model. The model is realized as part of the author-developed package of application programs. The paper contains the results of calculation of homogeneous condensation in axisymmetrical nozzle and profile grid.*

Многофазные течения наблюдаются во многих технологических процессах: при горении топлива в реактивных двигателях, кипящем слое, плазменном и детонационном напылении, получении порошкообразных материалов, проектировании распылительных сушилок, теплообменников, градирен и многих других промышленных установок. Неравновесная конденсация наблюдается при протекании потока через решетки профилей и сопла паровых турбин, истечении струй из сопел авиационных и реактивных двигателей. В настоящее время исследованию процесса гомогенной неравновесной конденсации уделяется повышенное внимание в связи с получением жидкого льда, разработкой технологий с использованием льдообразующих центров, получением ультрадисперсных порошков.

В холодильной технике после признания технических и экономических преимуществ бинарного льда возрос интерес к совершенствованию способов его получения. Бинарный лед является экологически чистым и безопасным теплоносителем. Использование бинарного льда позволяет достигнуть существенной экономии в системах аккумуляции холода.

Бинарным льдом называют суспензию мелких ледяных кристалликов размером 0,01-0,2 мм в воде или водном растворе другого подобного теплоносителя.

В испарителе создаются условия, близкие к тройной точке (например, 0°С, 5,6 мбар). В объеме на кристаллизационных ядрах возникают кристаллы льда. Здесь размещается испаритель водяного компрессионного холодильного контура. С помощью компрессора, сжимающего водяной пар, в испарителе поддерживается необходимое разрежение.

В конденсаторе путем распыления охлаждающей воды водяной пар конденсируется и превращается в воду, которая подпитывает испарительный объем.

Принципиальная схема генератора бинарного льда по принципу Vakuu Eis [1] приведена на рис. 1.

Генераторы бинарного льда имеют мощность от 185 кВт до 25 МВт.

Основным элементом генераторов бинарного льда есть компрессор. При проектировании компрессора основополагающими этапами являются определение характеристик и режимов течения парогазовой смеси, разработка проточной части, выбор конструктивной схемы, числа ступеней, задание формы лопаток. При выборе формы лопатки необходимо знать распределение параметров и структуру течения в межлопаточном пространстве.

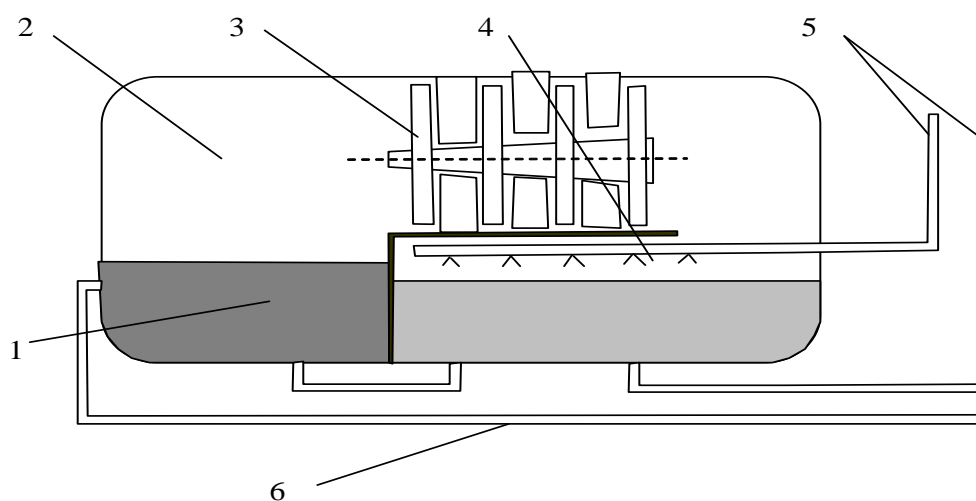


Рис. 1. Принципиальная схема генератора бинарного льда:  
1 – емкость с продуктом; 2 – пространство испарителя; 3 – компрессор, сжимающий водяной пар;  
4 – конденсатор; 5 – охлаждающая вода; 6 – отводящая магистраль

Для сокращения сроков разработки, оптимизации параметров компрессора и повышения качества проектирования в настоящее время все чаще используются методы математического моделирования.

Численные методы расчета внутренних однофазных течений достигли высокого уровня. Они позволяют получать решения двух- и трехмерных задач о расчете течения в компрессоре и газовом тракте, достаточно надежны и довольно точно отражают реальные процессы. В настоящее время разработаны несколько пакетов программ для численного расчета однофазных течений в решетках профилей.

Расчет парогазовых течений при наличии фазовых переходов – это одна из актуальных задач современной механики жидкости и газа. Наиболее существенными физическими особенностями процессов движения двухфазных систем следует считать тепловое и гидродинамическое взаимодействие фаз между собой и с твердыми границами, наличие фазовых переходов. Интенсивность этих процессов возрастает при больших скоростях движения парогазовых смесей.

Современное состояние механики многофазных сред характеризуется интенсивным развитием экспериментальных и теоретических исследований. Расширение возможностей чис-

ленных методов применительно к задачам расчета течений парогазовых смесей в компрессорных решетках является одной из сложнейших проблем.

В статье рассмотрена физическая и математическая постановка задачи расчета течений с фазовыми переходами в соплах и решетках профилей. Общая система уравнений включает в себя газодинамические и кинетические уравнения, а также термодинамические соотношения.

**Модели для расчета многофазных потоков.** В механике многофазных сред выделяются четыре основные группы моделей. Это чисто феноменологические модели, феноменологические модели с включением элементов статистики, стати-стические модели, содержащие элементы механики сплошной среды, чисто стати-стические модели, основанные на введении функций распределения как для частиц, так и для молекул газа, и получения соответствующих кинетических уравнений [2–4]. При решении прикладных задач чаще всего используются феноменологические модели многофазных сред, описываемые уравнениями в частных производных, реализация которых возможна с помощью известных численных методов на существующей вычислительной технике. Это модель взаимопроникающих континуумов, предложенная Х.А. Рахматулиным [2–4].

Траекторная модель в невязком потоке была применена в [4]. Гомогенная модель обтекания с учетом обмена массой, импульсом и энергией между фазами рассматривается в [4–8].

*Модель взаимопроникающих сред.* Большинство практических результатов по расчету многофазных течений получено с использованием модели взаимопроникающих континуумов. Она базируется на понятии многоскоростной, многотемпературной среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, сколько фаз содержит рассматриваемая среда. Каждая фаза заполняет пространство непрерывно. Основные допущения модели следующие [2–4]:

- среда является двухскоростной и двухтемпературной, состоящей из вязкого сжимаемого несущего газа и фракции несжимаемых сферических частиц одного диаметра, не взаимодействующих между собой;

- теплоемкости газа и частиц постоянны;
- размеры частиц во много раз больше молекулярно-кинетических и во много раз меньше расстояний, на которых осредненные макроскопические параметры течения меняются существенно;

- взаимодействие частиц с несущей средой происходит посредством вязкости газа;

- температура отдельной частицы постоянна по ее объему;

- несущий газ предполагается химически не реагирующим, с постоянным показателем адиабаты.

Уравнения, описывающие несущую и дисперсную фазы, связаны через источниковые члены, учитывающие межфазный обмен импульсом и энергией. Они отличаются от уравнений Навье–Стокса лишь наличием этих источников. Для определения слагаемых, описывающих межфазное взаимодействие, пользуются результатами исследования процессов, происходящих при обтекании частиц газом.

*Инерционная модель.* Анализ процессов взаимодействия многофазного потока с обтекаемой поверхностью показывает, что решающая роль на многих режимах принадлежит инерционному осаждению дискретной фазы. Численное моделирование осуществляется на основе решения уравнений Навье–Стокса совместно с уравнениями неразрывности и сохранения энергии. При найденных газодинамических параметрах поля скорости каплей находятся интегрированием двух скалярных уравнений, имеющих вид обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

*Гомогенная модель.* Нестационарное течение пара воды и водяных каплей с учетом неравновесного процесса протекания конденсации можно описывать уравнениями газовой динамики с учетом обмена массой, импульсом и энергией между фазами [4–8]. Уравнения для пара воды в произвольных неортогональных координатах могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) + \hat{H}, \quad (1)$$

где 
$$\hat{q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_g \\ \rho_g u \\ \rho_g v \\ e_g \end{bmatrix}; \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_g U \\ \rho_g U u + \xi_x p \\ U v + \xi_y p \\ \rho_g (e_g + p) U \end{bmatrix};$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_g V \\ \rho_g V u + \eta_x p \\ V v + \eta_y p \\ \rho_g (e_g + p) V \end{bmatrix}; \quad \hat{R} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \beta_x \end{bmatrix};$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \beta_y \end{bmatrix}; \quad \hat{H} = -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} -\rho \dot{m} \\ -\rho u \dot{m} \\ -\rho v \dot{m} \\ \rho \dot{m} (h_{fg} - h_t) \end{bmatrix}.$$

В уравнениях приняты следующие обозначения:  $u, v$  – компоненты вектора скорости в направлениях  $x, y$ ;  $\rho, p, e$  –

плотность, давление и полная энергия единицы объема;  $Re$  – число Рейнольдса;  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, J$  – метрические коэффициенты и якобиан преобразования координат  $\xi = \xi(x, y, t), \eta = \eta(x, y, t)$ ;  $U, V$  – контравариантные компоненты вектора скорости, нижний индекс  $g$  обозначает пар. Источниковый член  $N$  включает обмен массой, импульсом и энергией между фазами. Здесь  $\dot{m}$  – конденсированная масса в единицу времени;  $\rho$  – плотность пара;  $h_{fg}$  – скрытая теплота фазового перехода;  $\rho \dot{m}(h_{fg} - h_t)$  – количество тепла, переданного в процессе конденсации;  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$  – компоненты тензора напряжений;  $\beta_x, \beta_y$  – компоненты вектора теплового потока.

Исходные уравнения записаны в безразмерном виде. В качестве масштабов использованы радиус сопла и критические параметры потока.

Процесс гомогенной конденсации условно разбивается на два: образование центров конденсации (ядер критического размера) и рост этих ядер. Конденсированная масса в единицу времени определяется соотношением

$$\dot{m} = (1 - Y) J_c \rho_l \frac{4\pi r_c^3}{3} + 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rho_l N, \quad (2)$$

где  $J_c$  – скорость нуклеации;  $\frac{dr}{dt}$  – скорость роста капли;  $\rho_l$  – плотность воды;  $r_c$  – критический радиус;  $N$  – число водяных капелек, содержащихся в единице массы влажного пара с радиусом  $r$ . Соотношение (2) получено из условия равенства конденсированной массы массе каплей от конденсации с критическим радиусом за счет роста капель.

В уравнениях (1) предполагается, что жидкая и газообразная фазы движутся с одинаковыми скоростями. Это предположение оправдано тем, что размеры капель воды весьма маленькие. Известные оценки [4–8] показывают, что скорость капель воды

будет отличаться от скорости пара не более чем на 1 %.

Жидкая фаза может рассматриваться как континуум, состоящий из большого количества капелек воды, содержащихся во влажных паровых потоках. В связи с тем, что скорость пара и водяных капелек практически одинакова, уравнения импульса для этих капелек не нужны. Для описания жидкой фазы используют два дополнительных уравнения сохранения. Первое уравнение описывает распределение числа капелек воды, а второе – распределение влажности. В произвольных неортогональных координатах эти два уравнения могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{\partial \hat{q}_l}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}_l}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_l}{\partial \eta} = \hat{H}_l, \quad (3)$$

$$\text{где } \hat{q}_l = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho N \\ \rho Y \end{bmatrix}; \quad \hat{E}_l = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho UN \\ \rho UY \end{bmatrix};$$

$$\hat{F}_l = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho VN \\ \rho VY \end{bmatrix}; \quad \hat{H}_l = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_g J_c \\ \rho \dot{m} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $Y$  – влажность. Согласно определению влажности может быть получено соотношение для радиуса капли

$$r^3 = \frac{3Y}{4\pi \rho_l N}.$$

Это соотношение может использоваться для вычисления радиуса водяной капельки после того, как параметры  $N$  и  $Y$  определены на каждом шаге по времени.

Радиус критического ядра конденсации вычислялся с помощью соотношения [4–8]

$$r_c = \frac{2\sigma T_s}{\rho_l h_{fg} \Delta T}.$$

Скорости нуклеации и роста капли  $\frac{dr}{dt}$  определяются из классической теории нуклеации [6]. Соотношения для этих скоростей имеют следующий вид [4–8]:

$$J_c = \frac{1}{1+\phi} q_c \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi m_m^3} \frac{\rho_g}{\rho_l}} \exp\left(-\frac{4\pi r_c^2}{3kT_g}\right);$$

$$\phi = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \frac{h_{fg}}{R_g T_g} \left( \frac{h_{fg}}{R_g T_g} - \frac{1}{2} \right);$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\lambda_g \Delta T}{\rho_l r h_{fg} \left( \frac{1}{1+4K_n} + 3,78(1-\nu) \frac{K_n}{P_{rg}} \right)};$$

$$\nu = \frac{R_g T_s}{h_{fg}} \left[ \alpha - \frac{1}{2} - \frac{2-q_c}{2q_c} \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) c_p \frac{T_s}{h_{fg}} \right];$$

$$\Delta T = T_s - T_g.$$

Для нахождения температуры насыщения водяного пара по известному давлению можно использовать уравнение [9].

**Программно-методическое обеспечение расчета многофазных сред.** Модель взаимопроникающих сред, траекторная и гомогенная модели расчета многофазных сред были реализованы в рамках разработанного автором пакета программ [10, 11].

Численные методики и пакет программ тестировались на задачах о разрыве диафрагмы в канале (тест Сода), взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем, расчете обтекания дозвуковым, трансзвуковым и сверхзвуковым потоками цилиндра и профиля, расчетных и нерасчетных течениях в соплах [10–13].

**Результаты расчетов.** Разработанный пакет программ был применен к расчету процессов конденсации парогазовых потоков в сопле и решетке профилей.

Геометрия сопла, которое имело сходящийся участок с углом  $\alpha = 45^\circ$  и расходящийся участок с углом  $\beta = 15^\circ$ , приведена в работе [10].

На входе в сопло задавались давление и температура торможения, радиус и

концентрация капелек. Во входном и выходном сечениях сопла значения зависимых переменных определялись с помощью метода характеристик. На дозвуковой входной границе задаются две независимые переменные. Еще одна переменная рассчитывается с помощью инварианта Римана, который связан с характеристиками, выходящими из области, в предположении локальной одномерности течения в осевом направлении. В качестве независимых переменных использована энтальпия торможения и энтропия. Для дозвуковой выходной границы задавалось статическое давление за срезом сопла. Рассчитываемыми параметрами на этой границе являются экстраполируемые из области характеристические переменные в предположении локальной одномерности течения в осевом направлении. При сверхзвуковой скорости на выходной границе значения всех зависимых переменных экстраполировались по значениям выше по потоку.

Расчеты выполнены для следующих начальных параметров потока: полное давление  $p_0 = 0,0785 \cdot 10^{+06}$  Па, температура торможения потока  $T_0 = 380$  К, начальная концентрация капелек  $N = 1,0 \cdot 10^{+14}$  кг<sup>-1</sup>, начальный радиус капельки  $r = 1,0 \cdot 10^{-8}$  м.

На рис. 2–7 представлены сравнения рассчитанных для равновесных (●) и неравновесных (○) течений распределения давления, температуры пара, влажности, радиуса капелек и числа Маха вдоль оси сопла. Давление, температура и число Маха при наличии конденсации в потоке снижаются. Основной вклад в изменение параметров потока процессы конденсации вносят после критического сечения сопла.

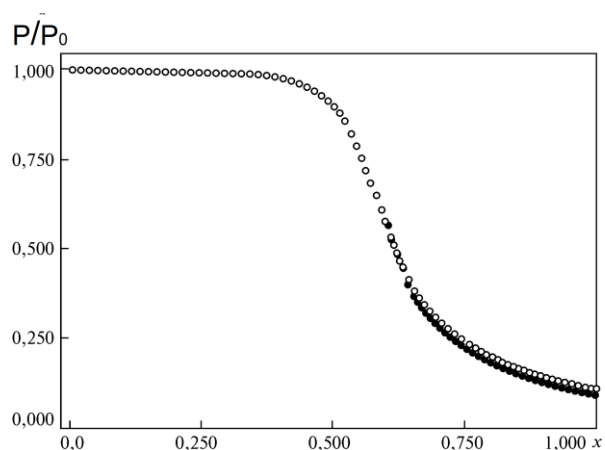


Рис. 2. Распределение давления по длине сопла

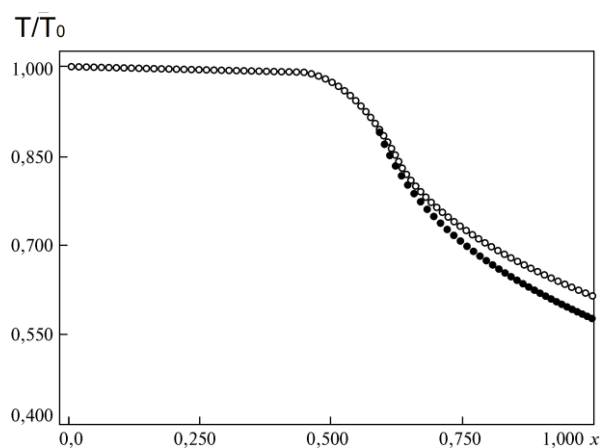


Рис. 3. Распределение температуры по длине сопла

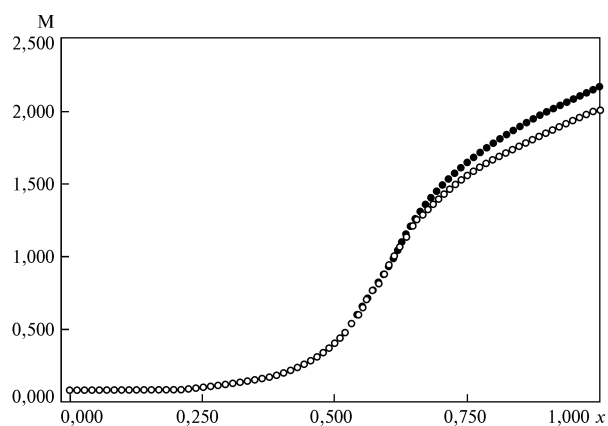


Рис. 4. Распределение числа Маха по длине сопла

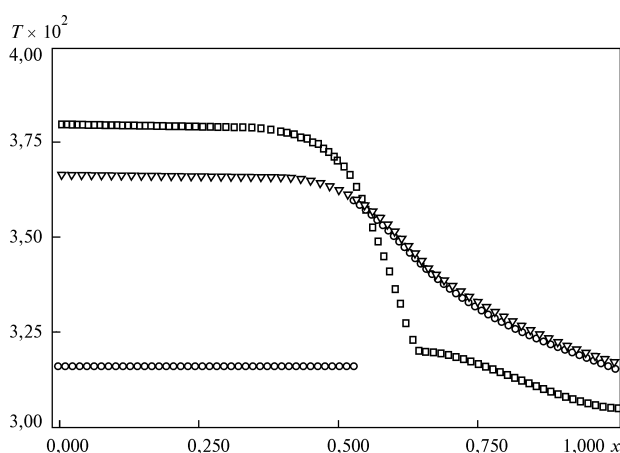


Рис. 5. Распределение температуры пара (□), капелек воды (Δ) и температуры насыщения (○) по длине сопла

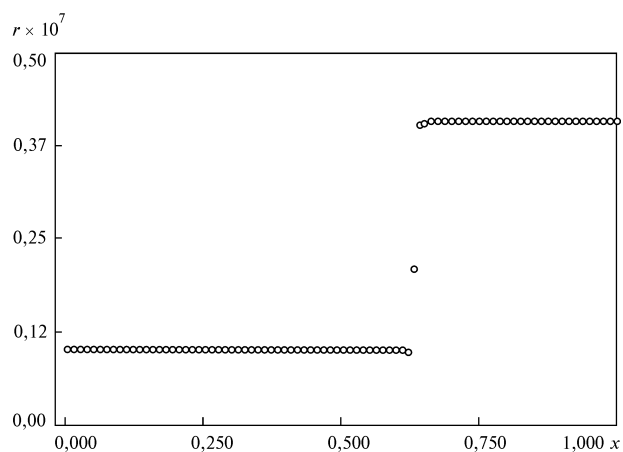


Рис. 6. Распределение радиуса капелек воды по длине сопла

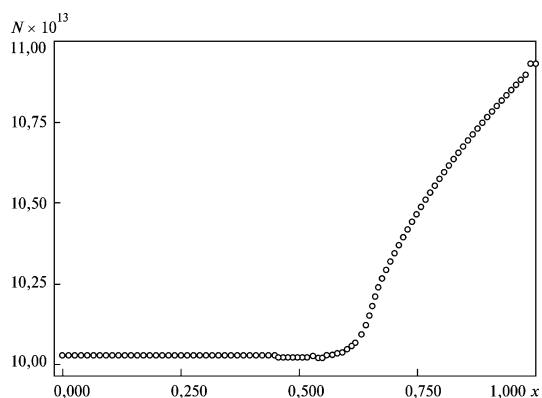


Рис. 7. Распределение числа капелек воды по длине сопла

Распределение температуры пара, капелек воды и температуры насыщения по длине сопла приведено на рис. 5. Температуры пара и капелек воды практически постоянны до критического сечения сопла. Расширение потока вблизи критического сечения сопла приводит к падению температуры пара. Конденсация начинается там, где температура пара становится ниже температуры насыщения. В результате конденсации температура капелек воды скачкообразно растет и становится практически равной температуре насыщения, которая снижается по длине сопла из-за падения давления при расширении потока. Радиус капельки при заданном наборе определяющих параметров увеличился в 4 раза по сравнению с начальным (рис. 6). После начала конденсации число капелек в потоке продолжает увеличиваться (рис. 7), и в результате этого влажность потока возрастает (рис. 8).

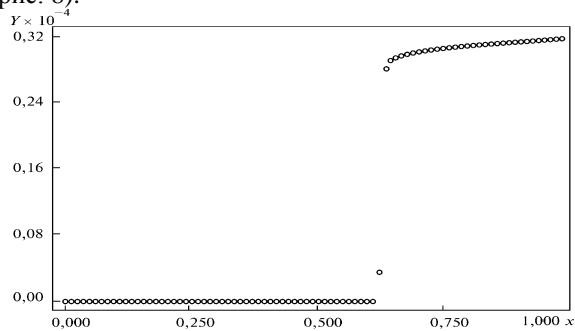


Рис. 8. Распределение влажности по длине сопла

Для исследования влияния фазовых превращений на течение пара в решетке профилей были проведены расчеты [14, 15], результаты которых показаны на рис. 9–13.

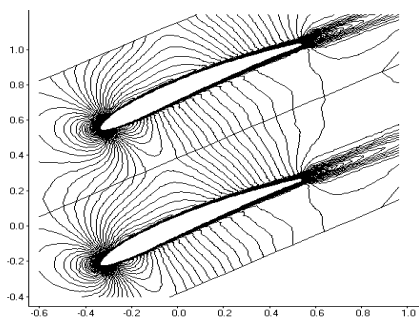
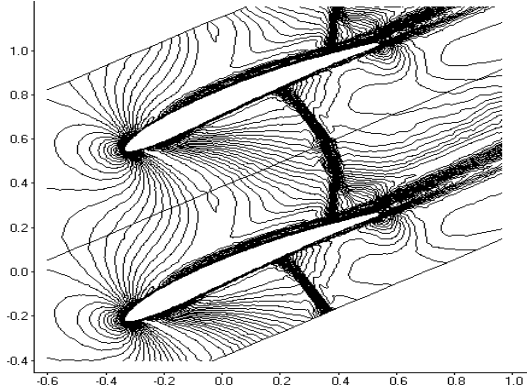


Рис. 9. Течение пара без фазовых переходов в решетке профилей. Изолинии числа Маха (на входе  $M_{in}=0,626$ , на выходе  $M_{out}=0,538$ )



Основным фактором, определяющим влияние фазовых переходов на течение, является нагрев газа при конденсации и охлаждение при испарении частиц жидкости. Сильное взаимное влияние параметров течения газовой и капельной фазы приводит к тому, что двухфазный дозвуковой поток при наличии конденсации и при прочих равных условиях имеет скорость на выходе значительно большую, чем однофазный. Этому способствует тепло, выделяемое в процессе конденсации. При ускорении потока его температура падает ниже температуры насыщения, и возникает скачок конденсации. За счет нагрева дозвукового потока от теплоты фазового перехода при конденсации пара поток ускоряется и достигает сверхзвуковой скорости, образуется скачок уплотнения, в котором температура пара становится выше температуры насыщения. Этот эффект отчетливо прослеживается при сравнении рис. 9–11.

При том же значении инварианта Римана, заданном на выходной границе, число Маха на входе увеличивается в двухфазном потоке до  $M_{in}=0,67$  по сравнению с  $M_{in}=0,626$  для однофазного течения, а число Маха на выходе возрастает от  $M_{out}=0,538$  до  $M_{out}=0,76$ . Существенно меняется и картина течения. Образовываются скачки уплотнения, уменьшается угол поворота потока с  $\Delta\beta=9,2^\circ$  при однофазном течении до  $\Delta\beta=5,88^\circ$  в течении пара с конденсацией, а сопротивление

увеличивается с  $\eta = (P_{01} - P_{02}) / P_{01} = 0,035$  до  $\eta = 0,0787$ ,

где  $P_{01}$ ,  $P_{02}$  – давления торможения на входе и выходе из решетки соответственно.

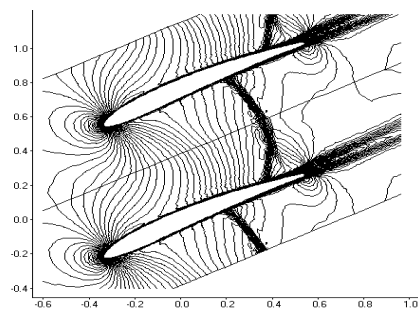


Рис. 10. Течение пара с фазовыми переходами в решетке профилей. Изолинии чисел Маха (на входе  $M_{in}=0,67$ , на выходе  $M_{out}=0,76$ )

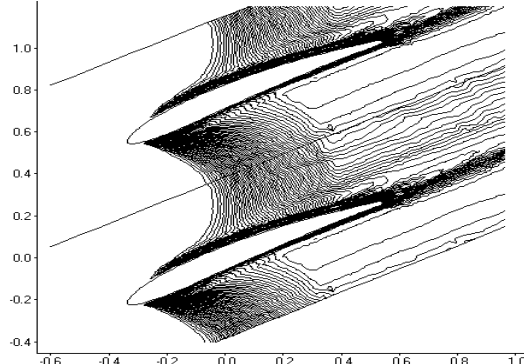


Рис. 11. Течение пара с фазовыми переходами в решетке профилей. Изолинии  $\Delta T = T_s - T_g$  (на входе  $M_{in}=0,67$ , на выходе  $M_{out}=0,76$ ,  $\Delta T_{max}=59^\circ$ ,  $\Delta T_{min}=-33^\circ$ )

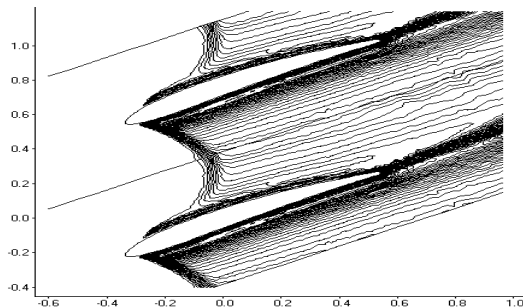


Рис. 12. Течение пара с фазовыми переходами в решетке профилей. Изолинии влажности ( $Y_{max}=4,2 \cdot 10^{-3}$ )

Рис. 13. Течение пара с фазовыми переходами в решетке профилей. Изолинии количества частиц ( $N_{max}=10^7$ )

### Выводы

Описаны математическая модель и численный метод расчета сжимаемых вязких турбулентных течений водяного пара с фазовыми переходами.

Рассмотрена задача о течении пара с фазовыми переходами в осесимметричном сопле Лавала. Проанализированы условия и закономерности возникновения скачка конденсации, приведены типичные распределения температур газа, насыщения и жидкой фазы.

Выполнены исследования однофазного и двухфазного течений в плоской решетке профилей. Показано, что параметры течения парогазовой смеси существенно зависят от наличия и интенсивности фазовых переходов.

### Список использованной литературы

1. Дворжак З. Бинарный лед // Холодильный бизнес. – 2000. – № 3. – С. 8–44.
2. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. – М.: Энергоиздат, 1981. – 470 с.
3. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. – 1956. – Вып. 20, № 3. – С. 184–195.
4. Нигматулин Р.И. Динамика много-фазных сред. – М.: Наука, 1987. – Т. 1, 2. – 464 с.
5. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. – М.: Энергия, 1974. – 592 с.
6. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975. – 592 с.
7. Dykas S. Numerical calculation of the stream condensing flow // CFD for Turbomachinery Applications. – Gdansk, 2001. – P. 11.
8. Liang L., Guojun L., Zhenping F. Numerical simulation of spontaneously condensing flows in a plane

turbine cascade // CFD Turbo for Turbomachinery Applications. – Gdansk, 2001. – P. 7.

9. Ривкин С.Л., Кременевская Е.А. Уравнение состояния воды и водяного пара для машинных расчетов процессов и оборудования электростанций // Теплоэнергетика. – 1977. – № 3. – С. 69–73.

10. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. – К.: Наук. думка, 2003. – 380 с.

11. Приходько А.А. Математическое моделирование течений в проточной части турбомашин авиационных и ракетных двигателей на основе уравнений Навье-Стокса // Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – 2012. – Вып. 1. – Днепропетровск: ГП "КБ "Южное". – С. 29–43.

12. Приходько А.А. Численное моделирование нестационарных нерасчетных течений в соплах // Вестн. ДНУ РКТ. – 2003. – Вып. 6. – С. 136–142.

13. Приходько А.А. К расчету гомогенной конденсации в соплах // Вестн. ДНУ РКТ. – 2003. – Вып. 6. – С. 130–136.

14. Приходько А.А. и др. Численное моделирование трансзвуковых парогазовых течений с конденсацией / А.А. Приходько, П.И. Кудинов, В.И. Письменный, А.В. Меняйлов // Тепломассообмен-2004. ММФ-V. Т. 5. Тепломассообмен в двухфазных (парожидкостных) системах. – Минск: АНК ИТМО им. А.В. Лыкова НАНБ, 2004. – 10 с.

15. Приходько А.А., Кудинов П.И. Численное моделирование нестационарного взаимодействия подвижных решеток профилей компрессора и трансзвуковых течений с фазовыми переходами // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. – Харьков: НАУ ХАИ, 2004. – С. 93–111.

Статья поступила 19.06.2013