

Л. М. Васильев /д. т. н./

ИГТМ НАН Украины, г. Днепро, Украина

Д. Л. Васильев /к. т. н./,

Национальная металлургическая академия

А. А. Ангеловский /к. т. н./, Н. Г. Малич /к. т. н./

Украины, г. Днепро, Украина

## Аналитический метод расчета предела прочности образцов горных пород

L. M. Vasiliev /Dr. Sci. (Tech.)/

IGTM NAN of Ukraine, Dnipro, Ukraine

D. L. Vasiliev /Cand. Sci. (Tech.)/,

National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro,

A. A. Angelovsky /Cand. Sci. (Tech.)/,

Ukraine

N. G. Malich /Cand. Sci. (Tech.)/

## Analytical method of calculation of strength of strength of samples of mineral rocks at their diagonal form of destruction

**Цель.** Совершенствование методики расчета предела прочности образцов горных пород для управления напряженно-деформированным состоянием горного массива и эффективного разрушения горных пород при дезинтеграции.

**Методика.** Аналитически проведено моделирование процесса разрушения образцов горных пород при их диагональной форме разрушения с использованием экспериментальных значений четырех показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения, модуля упругости.

**Результаты.** Метод позволяет определить предел и остаточную прочность образцов горных пород с использованием четырех показателей свойств, которые простыми способами могут быть установлены экспериментально.

**Научная новизна.** Впервые проведено аналитическое моделирование процесса разрушения образцов горных пород при их диагональной форме разрушения с учетом внутреннего и внешнего трения.

**Практическая значимость.** Предложенный метод позволяет определить предел и остаточную прочность образцов горных пород с использованием четырех показателей свойств, которые простыми способами могут быть установлены экспериментально в условиях горных предприятий, где результаты расчета могут быть оперативно использованы для управления состоянием горного массива и эффективного разрушения при дезинтеграции. (Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 6 назв.)

**Ключевые слова:** горная порода, предел прочности, разрушение, трещина, диаграмма «напряжение – деформация».

**Постановка проблемы.** Управление напряженно-деформированным состоянием массива горных пород для поддержания стойкости шахтных выработок, а также эффективное разрушение и измельчение в дробилках и мельницах и сегодня актуально. Одной из важных информационных характеристик, необходимых для решения этих задач, является предел прочности и остаточная прочность образцов, определяемые по диаграммам *нормальное напряжение – продольная деформация* их запредельного разрушения. Эти характеристики могут сниматься на специальных прессах, которые имеются в отдельных НИИ Украины, например, в ИГТМ, ИФГП НАНУ, Криворожском национальном университете. При этом эти работы требуют высококвалифицированного персонала и сложного дорогостоящего

оборудования, которое не используется на горных предприятиях, где как раз и нужна оперативная информация о свойствах горных пород.

**Цель.** Разработка аналитического метода расчета пределов и остаточной прочности образцов при знании показателей свойств горных пород, определяемых более простыми способами.

**Основной материал.** Известно, что при одноосном сжатии образца правильной геометрии образуется диагональная форма его разрушения – одна из пяти общеизвестных [1; 2]. В работе [3] приведен аналитический метод расчета предела прочности образцов горных пород при их клиновидной форме разрушения. Диаграмма для диагональной формы рассчитывается по тому же методу, что и для клиновидной формы, но при определенных значениях углов внутреннего трения

и коэффициентов контактного трения. Вертикальные напряжения на запредельной кривой имеют значения, не превышающие соответствующие значения во второй симметричной точке, необходимые для развития в ней трещины при клиновой форме разрушения.

В статье [3] показано, что при возрастании предела прочности (так называемого упрочнения) после образования, например, правой грани клина возникает его левая грань. Эти две грани и образуют клин. Теперь опишем образование диагональной формы. Определение прочности образцов при этой форме разрушения представляется возможным производить по следующей методике. По мере развития трещины часть материала выходит из-под нагрузки. При знании в каждый момент значения координат вершины трещины можно определить несущую часть материала образца, которая равна первоначальной площади последнего за вычетом части, вышедшей из-под нагрузки по мере развития трещины. Вышедшая из-под нагрузки часть легко определяется по геометрии развития трещины по линиям скольжения (ЛС).

При знании напряжений в вершине трещины, ее координат и закономерности распределения контактных напряжений на несущей части образца можно построить диаграмму *нормальное напряжение – деформация* образца при наличии значений четырех показателей свойств породы:  $k_n$  – предел сопротивления материала сдвигу;  $f$  и  $\mu$  – коэффициенты контактного и внутреннего трения;  $E$  – модуль упругости.

На рис. 1 показан нагруженный вертикальной силой образец. Центр осей координат расположен в левом верхнем углу образца. На верхней левой четверти образца контактные касательные напряжения  $\tau_k$  имеют положительный знак, а на нижней – отрицательный. На правой вертикальной половине образца знаки имеют противоположные значения.

Математическая модель формирования диаграмм *нормальное напряжение – деформация* может быть представлена рядом формул. Запишем текущее значение суммы нормальных напряжений – силу, действующую на контактной поверхности несущей площадки, в виде:

$$P = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \cdot F(x) dx, \quad (1)$$

где  $\sigma_y$  – нормальное напряжение в вершине трещины;  $F(x)$  – функция приращения нормального напряжения на единичной ширине контактной поверхности части образца, не вышедшей из-под нагрузки.

Коэффициент, равный двум, означает две симметричные половины образца. Вышедшая из-под

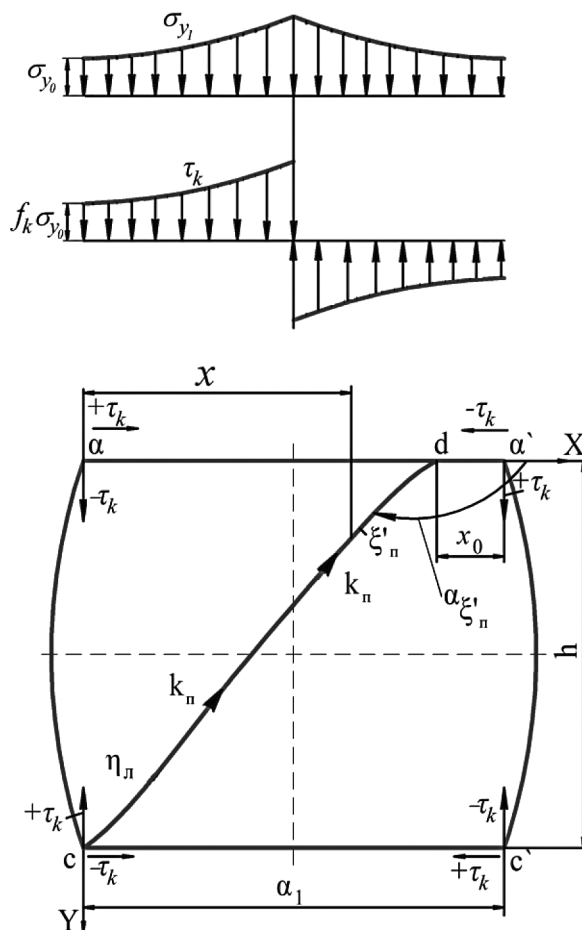


Рис. 1. Схема ЛС при диагональной форме разрушения образца

нагрузки часть образца определяется по значениям абсциссы вершины трещины как  $x = n \cdot \Delta h \cdot ctg\alpha$ , где  $n$  – число слоев по ординате  $y$ ,  $\alpha$  – угол наклона ЛС в вершине трещины относительно оси  $x$ ,  $\Delta h$  – высота слоя.

Теперь, используя значение силы, действующей на несущей (не вышедшей из-под нагрузки) части образца, следует перейти к напряжениям по его начальной площади горизонтального сечения единичной ширины и длины  $a_1$ . Тогда на основании (1) получим:

$$\sigma_c = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \frac{F(x) dx}{a_1}, \quad (2)$$

где  $x$  – абсцисса.

Распределение контактных нормальных напряжений принимаем экспоненциальным согласно [4]:

$$\sigma_{yi} = \sigma_y \cdot e^{-\frac{2f \cdot x}{h}}, \quad (3)$$

где  $h$  – высота образца.

ЛС пересекают среднюю линию вертикальной симметрии и выходят на противоположную половину контактной плоскости. В первую очередь

необходимо определиться, в каком направлении будет развиваться трещина – сверху вниз или снизу вверх, в данном случае по ЛС  $\xi'_n$  и  $\xi''_n$  или  $\eta'_n$  и  $\eta''_n$ . Трещина начинает развиваться в направлении меньшего значения необходимой нагрузки.

Сущность задачи не меняется, если будем рассматривать развитие трещины по схеме (рис. 1), начиная с верхней горизонтальной половины образца. Так более наглядно. Для этого случая нами разработана программа на ЭВМ на основе метода итераций. Отметим, что под действием вертикальной нагрузки образец приобретает выпуклую форму. Поэтому в углах образца применимо правило парности касательных напряжений.

Тогда распишем конечные формулы для всего цикла развития трещины (рис. 2) для построения диаграммы *нормальное напряжение – деформация*.

Для этого используем правую ЛС  $\xi'_n$  и левую ЛС  $\eta'_n$  (или левую ЛС  $\xi'_n$  и правую ЛС  $\eta'_n$ ). Как видно из рис. 2, имеем дело с разнородной парой линий скольжения (одна выпуклая, другая – вогнутая), в точке встречи которых напряжения должны иметь одинаковые значения. Такой точкой встречи является точка  $O'$  на вертикальной линии симметрии (рис. 1), на которой контактные касательные напряжения равны нулю. Представим себе, что сначала трещина образуется в точке  $d$ . Распишем формулы расчета предела давления (прочности) по всему циклу развития трещин по правой ЛС  $\xi'_n$  и левой ЛС  $\eta'_n$ , определяемые с учетом выхода части образца из-под нагрузки согласно выражению (2) с использованием уравнения (3) и схемы (рис. 2в).

Итак, при  $x \geq 0.5 a_1$ :

$$\sigma_c = \sigma_{y_{\xi}} \frac{h}{f} \left( \exp\left(\frac{f}{h}\right) - 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right) + \right. \\ \left. + 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot (x_0)}{h}\right) - 1 \right) / a_1, \quad (4)$$

при  $x \leq 0.5 a_1$ :

$$\sigma_c = \sigma_{y_{\eta}} \frac{h}{2f} \left( \exp\left(\frac{f}{h}\right) + \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left(\frac{2f \cdot x_0}{h}\right) - 2 \right) / a_1, \quad (5)$$

где  $\sigma_{y_{\xi}}$  и  $\sigma_{y_{\eta}}$  – вертикальные нормальные напряжения в вершине трещины на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta'_n$ ;  $x_{\xi'_n}$  и  $x_{\eta_n}$  – значения абсцисс вершин трещин на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta'_n$ .

Теперь необходимо определить напряжения  $\sigma_y$  по методу, изложенному в статье [3]. Тогда систему расчета напряжений для правой ЛС  $\xi'_n$  следует записать в виде:

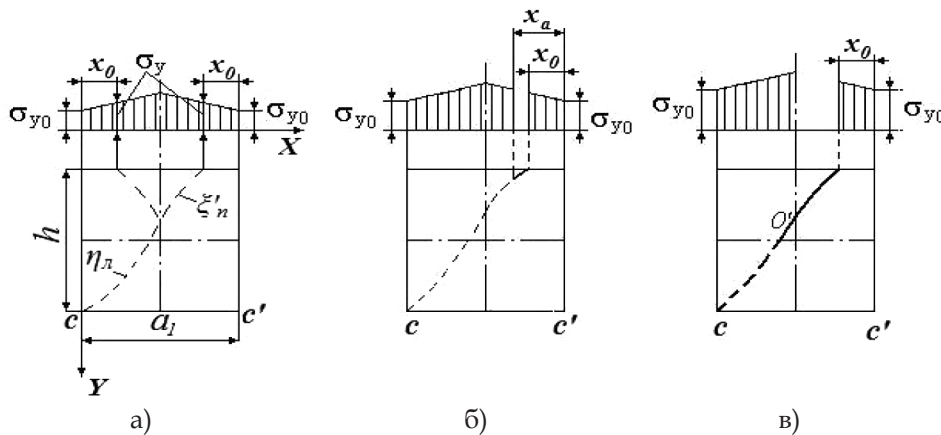
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{y_{\xi}} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n \left( 1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2} \right) \cdot \exp(-2\mu \cdot \beta_{\xi'_n})}{1 - \sin \rho} - k_0 \right); \\ k_0 &= \frac{(\mu \sigma_{y_{\xi}} + k_n) \left( 1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2} \right)}{(1 + \sin \rho)}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где  $\rho = \arctg \mu$  – коэффициент и угол внутреннего трения;  $\beta_{\xi'_n}$  – угол поворота ЛС  $\xi'_n$  от контактного трения в вершине трещины;  $k_0$  – эффективное касательное напряжение в точке  $O'$ ;

$$b_{\xi'_n} = \frac{f \cdot \sigma_y \left( 1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_y \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)}$$

$$\beta_{\xi'_n} = -\frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\xi'_n} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2}}$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x \geq 0,5 a_1$   $x_{\xi'_n} = a_1 - x$ .



а) – момент предразрушения; б) – момент образования диагонали; в) – момент формирования диагонали

Рис. 2. Схема образования диагональной трещины при сжатии образца горной породы

Угол наклона ЛС  $\xi'_n$  определяется по формуле:

$$\alpha_{\xi'_n} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 + \beta_{\xi'_n}. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим развитие трещины по ЛС  $\eta_n$  при  $x \leq 0,5a_1$ . Напряжения  $\sigma_{y_\eta}$  определяются по системе уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{y_\eta} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta_e}^2}) \cdot \exp(-2\mu(\beta_{\eta_e} + \beta_c))}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}} - k_c \right); \\ k_c = \frac{(\mu \sigma_{y_\eta} + k_n) (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta_e}^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}) \cdot \exp(-4\mu\beta_c)}, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$b_{\eta_n} = \frac{f \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_\eta} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_{y_\eta} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right)}; \quad b_c = -\frac{f \cdot \sigma_{y_\eta}}{k_c + \mu \sigma_{y_\eta}}.$$

где  $\beta_{\eta_n}$  и  $\beta_c$  – углы поворота ЛС  $\eta_n$  от контактного трения самой линии и на нижней контактной плоскости в точке  $c$ ;

$$\beta_{\eta_n} = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\eta_n} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\eta_n}^2}}; \quad \beta_c = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_c \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_c^2}}.$$

Угол наклона ЛС  $\eta_n$  описывается формулой:

$$\alpha_{\eta_n} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 - \beta_{\eta_n}. \quad (9)$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x_\eta \leq 0,5a_1$   $x_\eta = x$ .

Теперь по изложенным формулам (3)–(9) проведем построение запредельных кривых диаграмм *напряжение – деформация* кубического образца со сторонами  $a_1 = h = 1,0$  при  $k_n = 1,0$  МПа,  $f = 0,2$  и различных значениях угла внутреннего трения. Для этого еще нужно знать удельное усилие на площадке, не вышедшей из-под нагрузки, которое определяется по формулам с учетом абсциссы  $x$  вершины развивающейся трещины: при  $x \geq 0,5a_1$

$$p = \frac{\sigma_{y_\xi} \frac{h_1}{2f_k} \left( \exp\left(\frac{f_k a_1}{h_1}\right) - 0,5 \exp\left(\frac{2f_k(a_1 - x_{\xi'})}{h_1}\right) + 0,5 \exp\left(\frac{2f_k(x_0)}{h_1}\right) - 1 \right)}{(x_0 + x_{\xi'})} \quad (10)$$

при  $x \leq 0,5a_1$

$$p = \frac{\sigma_{y_{\eta_n}} \frac{h_1}{2f_k} \left( \exp\left(\frac{2f_k \cdot x_{\eta_n}}{h_1}\right) + \exp\left(\frac{2f_k \cdot x_0}{h_k}\right) - 2 \right)}{(x_0 + x_{\eta_n})} \quad (11)$$

где  $\sigma_{y_\xi}$  и  $\sigma_{y_\eta}$  – вертикальные нормальные напряжения в вершине трещины на ТМЭКН  $\xi'_n$  и  $\eta_n$ ;

$x_{\xi'_n}$  и  $x_{\eta_n}$  – значения абсцисс вершин трещин на ТМЭКН  $\xi'_n$  и  $\eta_n$ .

Величина деформации определяется по формуле согласно закону Гука:

$$\varepsilon = \frac{p}{E} \quad (12)$$

На основании связи значений вертикальных напряжений согласно формулам (4)–(9) и соответствующих им деформаций, подсчитанных по выражениям (10)–(12), производилось построение диаграмм *нормальное напряжение – деформация*. В качестве примера на рис. 3 приведены диаграммы *напряжение – деформация* при диагональной форме разрушения.

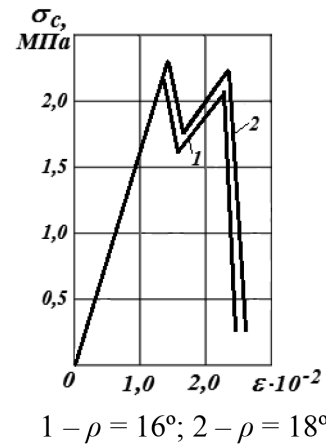


Рис. 3. Диаграмма «напряжение – деформация» диагональной формы разрушения образца при  $k_n = 1\text{МПа}$ ,  $f_k = 0,2$

Максимальное значение нормального напряжения на линии упрочнения меньше такового при образовании первой трещины. Из этого следует, что отсутствуют условия для возникновения второй трещины, образующей клиновую форму. Диагональная форма разрушения образуется при малых значениях коэффициентов внутреннего ( $\rho \leq 20^\circ$ ) и внешнего ( $f_k < 0,17$ ) трения. По внешнему виду запредельных кривых они хорошо согласуются с диаграммами, полученными на прессах при разрушении образцов из пород алевролита и аргиллита [5].

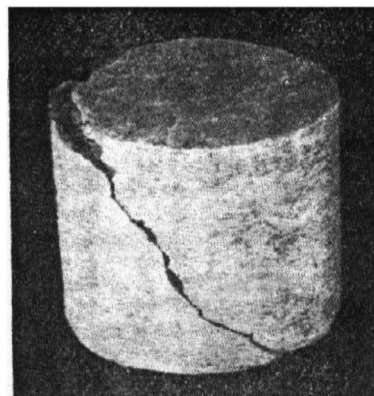
Анализ запредельных кривых разрушения свидетельствует, что имеет место сброс напряжения  $\sigma_c$  в момент перехода с ЛС  $\xi'_n$  на ЛС  $\eta_n$ . Сбросы формируют площадки, напоминающие площадки текучести при деформировании металлов. Мы эти площадки объясняем переходом разрушения с выпуклой ЛС  $\xi'_n$  на вогнутую ЛС  $\eta_n$ , имеющие разный характер запредельных кривых. Разви-



вается одна трещина ЛС  $\xi'_n$  до пересечения оси симметрии, далее она продолжает свое развитие по ЛС  $\eta_{n'}$ . Эта форма, по Л.И. Барону, (рис. 4) характерна для самых слабых горных пород [1; 2].

В табл. 1 приведены показатели сходимости пределов прочности при диагональной форме разрушения.

Сходимость расчетных значений пределов прочности с экспериментальными данными составляет около 80 %, что свидетельствует о хорошем совпадении теории с практикой согласно методике оценки уровня достоверности определения пределов прочности образцов горных пород [2].



**Рис. 4. Образец, разрушенный по диагональной форме**

Таблица 1

**Показатели сходимости пределов прочности при диагональной форме разрушения**

Тип породы	Экспериментальные			Расчетные		Кадастр [6, с.]
	$k_n$ , МПа	$\rho$ , град	$\sigma$ , МПа	$\sigma$ , МПа	Сходимость, %	
1	2	3	4	5	6	7
Распорит	100,0	7	172,0	225,0	76,4	131
Уртит	102,0	9	158,0	230,0	66,0	132
Малингит	102,0	10	220	246,0	89,4	131
Мрамор темный	23,0	11	63,5	53,2	83,7	85
Мрамор серый	23,0	13	64,0	53,0	82,8	85
Уртит	70,1	13	152,0	175,0	88,4	132
Руда гематитовая	15,0	14	45,0	36,0	80,0	85
Руда гематитовая	25,0	15	73	62	85,0	85
Ййолит	95	15	180	235	77,0	131
Расгорит	64	17	196	172	87,8	131
Алевролит	6,0	17	24	16,0	67,0	177
Руда гематитовая	23,0	19	75,5	60,0	80,0	85
Мрамор темный	21,0	20	70,5	54	77,0	85
Средняя сходимость					80,04	

**Выводы**

1. Разработан аналитический метод расчета диаграмм *напряжение – деформация* при диагональной форме разрушения горных пород с использованием четырех показателей их свойств ( $k_n$  – предела сопротивления материала сдвигу,  $f$  и  $\mu$  – коэффициентов контактного и внутреннего трения и  $E$  – модуля упругости), доступных для экспериментального определения в лабораториях производственных предприятий простыми техническими средствами. По максимальным и минимальным значениям нормальных напряжений запредельных кривых диаграмм могут быть определены значения пределов и остаточной прочности образцов, которые по значению равноценны диаграммам *нормальное напряжение – продольная деформация*, получаемым на прессах.

2. Запредельные кривые диаграмм имеют сбросы напряжений, подтверждающиеся экспериментальными наблюдениями. В момент сброса

возникают площадки в виде так называемого *зуба* текучести, образование которых мы объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой линии скольжения на вогнутую, формирующих разный характер запредельных кривых.

3. В процессе построения запредельных кривых представляется возможным определение прочности образцов при их одноосном сжатии. Сопоставление расчетных пределов прочности с экспериментальными данными подтвердило достоверность разработанного метода в пределах 80–81 %.

4. В перспективе планируется проверка метода при других, более сложных формах разрушения (продольной и взрывоподобной).

**Библиографический список / References**

1. Барон Л. И. Экспериментальное определение коэффициентов крепости горных пород по шкале М.М. Протоdjeяконова путем испытания

буровых кернов на раздавливание / Л.И. Барон [и др.] // Разрушение угля и горных пород. – М.: Углетехиздат, 1958. – С. 103–125.

Baron L. I. *Eksperimental'noe opredelenie koeffitsientov kreposti gornnykh porod po shkale M.M. Protod'yakonova putem ispytaniya burovyykh kernov na razdavliovanie*. Razrushenie uglya i gornnykh porod. Moscow, Ugletekhizdat, 1958, pp. 103-125.

2. Барон Л. И. Горно-техническое породоведение / Л. И. Барон. – М.: Наука, 1977. – 324 с.

Baron L. I. *Gorno-tekhnicheskoe porodovedenie*. Moscow, Nauka, 1977, 324 p.

3. Васильев Л. М. Аналитический метод расчета предела прочности образцов горных пород при их клиновом разрушении / Л. М. Васильев, Д. Л. Васильев, Н. Г. Малич // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2016. – № 6. – С. 65–70.

Vasil'ev L. M., Vasil'ev D. L., Malich N. G. *Analiticheskiy metod rascheta predela prochnosti obrastsov gornnykh porod pri ikh klinovoy forme razrusheniya*. Metallurg. i gornorudn. prom-st'. 2016, no. 6, pp. 65-70.

4. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1967. – 423 с.

Storozhev M. V., Popov E. A. *Teoriya obrabotki metallov davleniem*. Moscow, Mashinostroenie, 1967, 423 p.

5. Виноградов В. В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок / В. В. Виноградов. – К.: Наук. думка, 1989. – 190 с.

Vinogradov V. V. *Geomekhanika upravleniya sostoyaniem massiva vblizi gornnykh vyrabotok*. Kyiv, Nauk. dumka, 1989, 190 p.

6. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 277 с.

*Spravochnik (kadastr) fizicheskikh svoystv gornnykh porod*. Moscow, Nedra, 1975, 277 p.

**Purpose.** Improvement of the method for calculating the ultimate strength of rock samples for controlling the stress-strain state of a rock massif and effective destruction of rocks during disintegration.

**Methodology.** The modeling of the process of fracture of rock samples with their diagonal form of destruction was analytically carried out using the experimental values of four parameters of rock properties - the limit of shear resistance, the coefficients of internal and external friction, the modulus of elasticity

**Findings.** The method makes it possible to determine the limit and residual strength of rock samples using four property indicators, which can be established experimentally by simple methods

**Originality.** For the first time, an analytical modeling of the process of fracture of rock samples with their diagonal form of fracture taking into account internal and external friction

**Practical value.** The proposed method makes it possible to determine the limit and residual strength of rock samples using four property indicators that can be established experimentally by simple methods in mining enterprises, where the results of calculations can be used operatively to control the state of the rock massif and efficient destruction during disintegration

**Key words:** rock; strength limit; destruction; crack; stress-strain diagram.

**Рекомендована к публикации  
д. т. н. М. С. Четвериком**

**Поступила 28.09.2017**

