УДК 519.81, 519.8;004.94

В.И. ШИНКАРЕНКО*, Т.Н. ВАСЕЦКАЯ*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ СРЕДСТВАМИ КОНСТРУКЦИОННО-ПРОДУКЦИОННЫХ СТРУКТУР

*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепропетровск, Украина

Анотація. *Виконано формалізацію конструктивного процесу ранжування, прийняття рішень класичним методом аналізу ієрархій. Для формалізації застосовується апарат конструктивно-продукційних структур. У процесі формалізації виділено всі елементи процесу, зв'язки між ними і його конструктивні особливості. Запропонована формалізація дозволяє модифікувати і удосконалювати процес ранжування з незмінною основою методу аналізу ієрархій.*
Ключові слова: *метод аналізу ієрархій, ранжування, прийняття рішень, конструктивно-продукційні структури, узгодженість, матриця парних порівнянь.*

Аннотация. *Выполнена формализация конструктивного процесса ранжирования альтернатив для принятия решений классическим методом анализа иерархий. Для формализации применяется аппарат конструктивно-продукционных структур. В процессе формализации выделены все элементы процесса, связи между ними и его конструктивные особенности. Предложенная формализация позволяет модифицировать и совершенствовать процесс ранжирования с неизменной основой метода анализа иерархий.*
Ключевые слова: *метод анализа иерархий, ранжирование, принятие решений, конструктивно-продукционные структуры, моделирование, согласованность, матрица парных сравнений.*

Abstract. *The formalization of the constructive process of ranking of alternatives for decision making by the classical method of hierarchies analysis is made. The method of constructive and productive structures is used for formalization. All the elements of the process, the connections between them, and its constructive features are selected in the process of formalization. The proposed formalization allows modifying and improving the process of ranking with unchanged basis of the analytic hierarchy process.*
Keywords: *hierarchies analysis method, ranking, decision making, constructive and productive structures, consistency, pairwise comparison matrix.*

1. Введение

Метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т. Саати [1], применяется для решения широкого круга задач принятия решений: выбора, планирования, распределения ресурсов [2–4]. Несмотря на определенные ограничения в применении, этот метод получил мировое распространение. Многие исследователи занимаются совершенствованием МАИ и разработкой программного обеспечения для облегчения его использования [5, 6].

МАИ заключается в последовательном представлении иерархической структуры задачи (проблемы), сравнении альтернатив и критериев, расчете вектора глобальных приоритетов и определении уровня согласованности суждений, ранжировании альтернатив в соответствии с рассчитанными весами [7].

В ряде случаев процесс принятия решений сводится к решению одной из задач: выбор лучшей альтернативы, ранжирование альтернатив, выбор нескольких лучших альтернатив. Все они сводятся к ранжированию альтернатив по определенным критериям.

Существует множество модификаций метода анализа иерархий [6, 8], которые позволяют решать более широкий круг задач, чем классический МАИ, предложенный Саати. Обобщением МАИ является метод аналитических сетей (МАС) [2, 6], который позволяет учитывать взаимосвязи между различными уровнями иерархии. МАС позволяет работать с системами с обратными связями, что, в свою очередь, позволяет успешно решать задачи прогнозирования.

В данной работе предлагается формализация процесса принятия решений на основе классического метода анализа иерархий средствами конструкционно–продукционных структур (КПС) [9]. Механизм КПС основан на выполнении уточняющих преобразований обобщенной конструктивно-продукционной структуры (ОКПС): специализации, интерпретации, конкретизации и реализации [9]. Особенностями ОКПС являются расширяемый носитель, наличие атрибутов у элементов носителя и операций, наличие исполнителя, который может быть как внутренним, так и внешним по отношению к КПС. Исполнитель представлен его базовыми алгоритмами [10]. В результате выполнения уточняющих преобразований ОКПС формируются модели конкретных конструкций и процессов. Способы применения КПС для моделирования задач различных предметных областей представлены в [11].

В [12] на основе КПС формализован процесс адаптации алгоритмов сжатия. Показаны возможности применения нескольких связанных между собой КПС.

Различным образом выполняя уточняющие преобразования ОКПС, возможно решение задач как отдельно каждого этапа классического МАИ, так и в целом задачи принятия решений.

Предложенная методика дает возможность моделировать принятие решений с использованием модификаций МАИ, применять различные инструменты для наглядного представления структуры задачи и матриц парных сравнений, в том числе графовую [13], сетевую [7, 2, 6, 14], матричную модели [1].

2. Коструктионно-продукционная структура МАИ

Определим специализацию обобщенной конструкционно-продукционной (ОКПС) [9] структуры для представления метода анализа иерархий:

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle_S \mapsto C_{MAI} \langle M_{MAI}, \Sigma_{MAI}, \Lambda_{MAI} \rangle,$$

где C – ОКПС, M – неоднородный носитель, Σ – сигнатура, Λ – аксиоматика, $_S\mapsto$ – операция специализации, $\Lambda_{MAI} = \Lambda \cup \Lambda_1$, $\Lambda_1 = \{M_{MAI} \supset T \cup N,\ T = T_1,\ N = N_1,$ $\Sigma_{MAI} = \{\Xi,\ \Theta,\ \Phi\}$, $\Theta = \{\Rightarrow, |\Rightarrow, ||\Rightarrow\}$, $\Xi = \{\cdot, \circ\}$, $\Phi = \{\div, *, +, :=, =, \leq, >, \rhd, \sqrt[n]{\ }, /, \nabla\}\}$, Ξ – операции связывания, Θ – операции вывода, Φ – операции над атрибутами.

Частичная аксиоматика Λ_1 содержит следующие определения, дополнения и ограничения, которые уточняют алфавит, атрибуты носителя, отношения подстановки, задают особенности выполнения операций подстановки и вывода.

Терминальный алфавит содержит множество альтернатив и критериев с их атрибутами:

$\{_{name, v_p, r}x_i\}$ – множество альтернатив, x_i – идентификатор альтернативы, $name$ – семантика альтернативы, v_p – вес альтернативы по критерию p, r – глобальный приоритет (вес) альтернативы;

$\{_{name, v}k_p\}$ – множество критериев, k_p – идентификатор критерия, $name$ – семантика критерия, v – вес критерия.

Значения v_p, r и v для альтернатив и критериев могут быть не определены.

Отношения из Ξ определяют порядок следования терминалов и нетерминалов $\{\cdot\}$ и связывания альтернатив и критериев $\{\circ\}$.

Вводятся следующие операции над атрибутами:

операция $\div(c;n;L)$ заключается в выполнении n операций из списка L, если $c = true$, L – список из n операций: $L = (j_1, j_2,..., j_n)$, операции представлены в префиксной форме;

операция $\triangleright(x_i, x_j, k_p)$ позволяет задать значение веса связи i и j альтернативами (критериями) по k_p критерию. Эта операция выполняется внешним исполнителем (экспертом);

∇ – операция вычисления собственного числа матрицы парных сравнений;

$*$ – операция умножения матриц;

$\sqrt[n]{\ }$ – извлечение корня степени n;

/ – деление двух чисел;

= , >, $\le$ – сравнение на равенство, на больше и на меньше или равно соответственно.

Веса связей альтернатив по критериям могут быть заданы на этапе конкретизации, а могут задаваться в процессе выполнения ранжирования альтернатив.

Альтернативы и критерии, допустимые значения оценок, а также вектор средних значений случайного индекса согласованности $\overline{H}$ содержатся в неоднородном носителе M_{MAI}.

Согласно аксиоматике ОКПС, формой $_w l$ с атрибутом w называется набор терминалов и нетерминалов, объединяемых операциями связывания. Конструкцией называется форма, содержащая только терминалы [9].

Правила подстановки имеют вид $\psi_{r_{r,l,i,j}} : \langle s_{r,l,i,j}, g_{r,l,i,j} \rangle \in \Psi$, где $s_{r,l,i,j}$ – отношение подстановки, $g_{r,l,i,j}$ – набор операций над атрибутами, r – номер правила, l – номер критерия, i – номер первой альтернативы пары, j – номер второй альтернативы пары. Четырехуровневая индексация применяется для упорядочения правил подстановки. Отношение подстановки – двухместное отношение с атрибутами $_{w_i}l_i \ {}_w\!\!\rightarrow {}_{w_j}l_j$ [9]. Для формы $_{w_l}l_l = {}_{w_0}\oplus({}_{w_1}l_1, {}_{w_2}l_2, ..., {}_{w_h}l_h, ..., {}_{w_k}l_k)$ и доступного отношения подстановки $_{w_h}l_h \ {}_{w_p}\!\!\rightarrow {}_{w_q}l_q$ такого, что $_{w_h}l_h \prec {}_{w_l}l_l$ ($_{w_h}l_h$ является частью $_{w_l}l_l$), результатом трехместной операции подстановки $_{w_p}\Rightarrow({}_{w_h}l_h, {}_{w_q}l_q, {}_{w_l}l_l)$ будет форма $_{w_l^*}l_l^* = {}_{w_0}\oplus({}_{w_1}l_1, {}_{w_2}l_2, ..., {}_{w_q}l_q, ..., {}_{w_k}l_k)$ [9].

Двухместная операция частичного вывода $l^* = (|\Rightarrow(\Psi, l))$ (здесь l, l^* – формы до и после выполнения операции подстановки), заключается в:

– выборе одного из правил подстановки $\psi_r : \langle s_{r,l,i,j}, g_{r,l,i,j} \rangle \in \Psi$ с отношениями подстановки $s_{r,l,i,j}$ и выполнении на его основе операций подстановки, где $d_{r,l,i,j} \lrcorner s_{r,l,i,j}$ – атрибут доступности подстановки. Доступность отношения подстановки $s_{r,l,i,j}$ определяется значением переменной доступности: если $d_{r,l,i,j} \lrcorner s_{r,l,i,j} = 1$, отношение доступно, $d_{r,l,i,j} \lrcorner s_{r,l,i,j} = 0$ – не доступно; доступность правил регулируется операциями над атрибутами или задается аксиоматикой;

– выполнении операций над атрибутами $g_{r,l,i,j}$.

Порядок применения операции над атрибутами в процессе выполнения операции частичного вывода задается атрибутом τ_j, где $\tau_j \in I$, $I = \{\tau_0, \tau_1\}$, $I \subset M_{MAI}$, τ_0 – операция над атрибутом выполняется перед операцией подстановки, τ_1 – после операции подстановки.

Операция полного вывода (или просто вывода) заключается в последовательном выполнении операции частичного вывода, начиная с начального нетерминала и заканчивая конструкцией, удовлетворяющей условию окончания вывода. Результатом операции полного вывода является конструкция, содержащая упорядоченную последовательность альтернатив.

Условием окончания вывода является отсутствие нетерминалов в форме.

Пусть имеется следующая базовая алгоритмическая структура (БАС) [10, 15], которая содержит операции для заполнения значений весов, расчета индекса и отношения согласованности для матриц парных сравнений, весов альтернатив и критериев, сортировки альтернатив:

$$C_{A,MAI} = \langle M_{A,MAI}, V_{A,MAI}, \Sigma_{A,MAI}, \Lambda_{A,MAI} \rangle,$$

где $M_{A,MAI}$ – неоднородный носитель, $\Sigma_{A,MAI}$ – сигнатура и $\Lambda_{A,MAI}$ – аксиоматика, $V_{A,MAI} \supset \{A_1^0 |_{A_i,A_j}^{A_i \cdot A_j}, A_{16}^0 |_{a,b}^{a \circ b}\}$ – множество образующих алгоритмов [10] для некоторого исполнителя и $\{A_2 |_{l_h,l_q,f_i}^{f_j}, A_3 |_{f_i,\Psi}^{f_j}, A_4 |_{f_i,\Psi}^{f_j}\} \cup V_w$ – множество сконструированных алгоритмов, $\{A_5^0 |_{a,b}^{P}, A_6^0 |_{a,b}^{a}, A_7^0 |_{a,b}^{c}, A_8^0 |_{a,b}^{c}, A_9^0 |_{a,b}^{c}, A_{10}^0 |_{a,b}^{c}, A_{11}^0 |_{n,K}^{R}, A_{12}^0 |_{x_i,x_j,k_p}^{a,h}, A_{13} |_{c,n,L}^{L}, A_{14}^0 |_{K,R}^{S}, A_{15}^0 |_{M}^{lambda}\} \in V_w$ – алгоритмы, реализующие операции Φ над атрибутами.

Указанные выше алгоритмы реализуют следующие операции:

$A_1^0 |_{A_i,A_j}^{A_i \cdot A_j}$ – конкатенации алгоритмов (предполагает последовательное выполнение алгоритма A_i после A_j);

$A_2 |_{l_h,l_q,f_i}^{f_j}$ – подстановки;

$A_3 |_{f_i,\Psi}^{f_j}, A_4 |_{\sigma,\Psi}^{\overline{\Omega}}$ – частичного и полного вывода. Здесь f_i, f_j – формы, σ – начальный нетерминал, $\overline{\Omega}$ – множество сформированных конструкций;

$A_5^0 |_{a,b}^{c}$ – вычисления произведения $a * b$;

$A_6^0 |_{a,b}^{a}$ – присваивания значения переменной $a = b$;

$A_7^0 |_{a,b}^{c}$, $A_8^0 |_{a,b}^{c}$, $A_9^0 |_{a,b}^{c}$ – сравнения чисел a и b, если условие выполняется ($a = b$, $a > b$, $a \le b$ соответственно), то $c = true$, в противном случае $c = false$;

$A_{10}^0 |_{a,b}^{c}$ – вычисления суммы чисел a и b;

$A_{11}^0 |_{n,K}^{R}$ – извлечения корня степени n из числа K;

$A_{12}^0 |_{x_i,x_j,k_p}^{a,h}$ – определения значения веса связи i и j альтернатив по критерию k_p внешним исполнителем $(h = 1)$;

$A_{13} |_{c,n,L}^{L}$ – выполнения n алгоритмов из списка L, если $c = true$;

$A_{14}^0 |_{K,R}^{S}$ – определения частного S от деления числа K на число R;

$A_{15}^0 |_{M}^{lambda}$ – вычисления собственного числа матрицы парных сравнений;

$A_{16}^0 |_{a,b}^{a \circ b}$ – связывания альтернатив и критериев, где a, b – идентификаторы альтернатив или критериев или связь между ними.

Интерпретация КПС для метода анализа иерархий (конструктор МАИ):

$$\left\langle C_{MAI} = \left\langle M_{MAI}, \Sigma_{MAI}, \Lambda_{MAI} \right\rangle, C_{A,MAI} = \left\langle M_{A,MAI}, V_{A,MAI}, \Sigma_{A,MAI}, \Lambda_{A,MAI} \right\rangle \right\rangle_I \mapsto_{I,C_{A,MAI}}$$

$$_I \mapsto_{I,C_{A,MAI}} C_{MAI} = \left\langle M_{MAI}, \Sigma_{MAI}, \Lambda_{I,MAI} \right\rangle,$$

где ${}_{I}\mapsto$ – операция интерпретации, $\Lambda_{I,MAI} = \Lambda_{MAI} \bigcup \Lambda_3$, $\Lambda_3 = \{(A_1^0 |_{A_i,A_j}^{A_i \cdot A_j} \lrcorner \cdot)$, $(A_2 |_{l_h,l_q,f_i}^{f_j} \lrcorner \Rightarrow)$, $(A_3 \big|_{f_i,\Psi}^{f_j} \lrcorner |\Rightarrow)$, $(A_4 |_{\sigma,\Psi}^{\overline{\Omega}} \lrcorner \|\Rightarrow)$, $(A_5^0 |_{a,b}^{c} \lrcorner *)$, $(A_6^0 |_{a,b}^{a} \lrcorner :=)$, $(A_7^0 |_{a,b}^{c} \lrcorner =)$, $(A_8^0 |_{a,b}^{c} \lrcorner >)$, $(A_9^0 |_{a,b}^{c} \lrcorner \le)$, $(A_{10}^0 |_{a,b}^{c} \lrcorner +)$, $(A_{11}^0 |_{n,K}^{R} \lrcorner \sqrt{\ })$, $(A_{12}^0 |_{x_i,x_j,k_p}^{a} \lrcorner \rhd)$, $(A_{13}^0 |_{c,n,L}^{L} \lrcorner \div)$, $(A_{14}^0 |_{K,R}^{S} \lrcorner /)$, $(A_{15}^0 |_{M}^{lambda} \lrcorner \nabla)$, $(A_{16}^0 |_{a,b}^{a \circ b} \lrcorner \circ)\}$.

Представим конкретизацию КПС для метода анализа иерархий:

$$_{I,C_{A,MAI}}C_{MAI} = \left\langle M_{MAI}, \Sigma_{MAI}, \Lambda_{I,MAI} \right\rangle \ {}_{K}\mapsto \ C_{K,MAI} = \left\langle M_{MAI}, \Sigma_{K,MAI}, \Lambda_{I,MAI} \bigcup \Lambda_4 \bigcup \Lambda_5 \right\rangle,$$

где $\Lambda_4 = \{T_1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}, k_1, k_2,\}, N_1 = \{{}_N\xi, {}_P\rho, \delta, \mu, {}_{P,N}\sigma, {}_Q\overline{\lambda}, {}_G\overline{\phi_1}, {}_G\overline{\phi_2}, \beta_{1,1,1}\beta_{1,1,2,} ..., \beta_{1,10,9}, \beta_{1,10,10,}, \beta_{2,1,1}, \beta_{2,1,2,} ..., \beta_{2,10,9}, \beta_{2,10,10}, \kappa_{1,1}, \kappa_{1,2}, \kappa_{2,1}, \kappa_{2,2}\}$, $U = \{{}_{P,N}\sigma\}$, $\Psi_K = \{\psi_r : \left\langle s_{r,l,i,j}, g_{r,l,i,j} \right\rangle\}$, $r = \overline{1,13}\}$, r – номер правила, l – номер критерия, i – номер первой альтернативы пары, j – номер второй альтернативы пары, x_i – терминал для обозначения идентификатора i-ой альтернативы, k_l – терминал для обозначения идентификатора l-ого критерия, U – множество начальных нетерминалов, ${}_N\xi$ – нетерминал для обозначения связей альтернатив, ${}_N\rho$ – нетерминал для обозначения связей между критериями, $\beta_{l,i,j}$ – нетерминалы для обозначения связей между альтернативами i, j по l-ому критерию, κ_{l_1,l_2} – связь между критериями l_1 и l_2, ${}_Q\overline{\lambda}$ – матрица парных сравнений для критериев (где $Q = \{\overline{S}\lrcorner\overline{\lambda}, \overline{Sum}\lrcorner\overline{\lambda}, z\lrcorner\overline{\lambda}, \overline{v}\lrcorner\overline{\lambda}, is\lrcorner\overline{\lambda}, os\lrcorner\overline{\lambda}, P\lrcorner\overline{\lambda}\}$ – множество атрибутов), ${}_G\overline{\phi_l}$ – матрица парных сравнений альтернатив по l-ому критерию (где $G = \{\overline{S}\lrcorner\overline{\phi_l}, \overline{Sum}\lrcorner\overline{\phi_l}, z\lrcorner\overline{\phi_l}, \overline{v}\lrcorner\overline{\phi_l}, is\lrcorner\overline{\phi_l}, os\lrcorner\overline{\phi_l}, N\lrcorner\overline{\phi_l}\}$ – множество атрибутов). Приведем пояснения атрибутов: $z\lrcorner\overline{\lambda}$ – максимальное собственное число матрицы парных сравнений критериев, $\overline{v}\lrcorner\overline{\lambda}$ – вектор приоритетов матрицы сравнений критериев, $\overline{S}\lrcorner\overline{\lambda}$ – вектор произведений элементов строк матрицы, $\overline{Sum}\lrcorner\overline{\lambda}$ – вектор сумм элементов столбцов матрицы, $is\lrcorner\overline{\lambda}$ – отношение согласованности матрицы, $os\lrcorner\overline{\lambda}$ – индекс согласованности матрицы, $P\lrcorner\overline{\lambda}$ – количество критериев (размерность матрицы), $z\lrcorner\overline{\phi_l}$ – максимальное собственное число матрицы парных сравнений альтернатив по l-ому критерию, $\overline{v}\lrcorner\overline{\phi_l}$ – вектор приоритетов матрицы сравнений альтернатив по l-ому критерию, $\overline{S}\lrcorner\overline{\phi_l}$ – вектор произведений элементов строк матрицы, $\overline{Sum}\lrcorner\overline{\phi_l}$ – вектор сумм элементов столбцов матрицы, $is\lrcorner\overline{\phi_l}$ – отношение согласованности матрицы, $os\lrcorner\overline{\phi_l}$ – индекс согласованности матрицы, $N\lrcorner\overline{\phi_l}$ – количество альтернатив (размерность матрицы).

Частичная аксиоматика Λ_5 заключается в следующем.

Вектор средних значений случайного индекса согласованности принимается [7]: $\overline{H} = [0\ \ 0\ \ 0{,}52\ \ 0{,}89\ \ 1{,}11\ \ 1{,}25\ \ 1{,}35\ \ 1{,}40\ \ 1{,}45\ \ 1{,}49\ \ 1{,}52\ \ 1{,}54\ \ 1{,}56\ \ 1{,}58\ \ 1{,}59]$.

Количество критериев принимается $P = 2$, количество альтернатив принимается $N = 10$.

Запись последовательной конкатенации нескольких терминалов, нетерминалов и последовательное выполнение операций над атрибутами будем обозначать следующим образом: $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

В процессе вывода формируется конструкция, которая будет содержать следующие формы: ${}_{a,h}(x_i \circ x_j \circ k_p)$ – связь i и j альтернатив по критерию k_p, a – вес связи, h – атрибут, отвечающий за способ получения значения веса ($h=1$ – заполнено согласно оценке внешним исполнителем-экспертом, $h=0$ – без участия внешнего эксперта на основе правил подстановки), ${}_{a,h}(k_i \circ k_j \circ \varepsilon)$ – связь i и j критерия, ${}_Q\overline{\lambda}$ – матрица парных сравнений для критериев и ${}_G\overline{\phi_l}$ – матрица парных сравнений по l-ому критерию ($l=\overline{1,2}$), отсортированная последовательность альтернатив $\prod_{i=1}^{N}({}_r x_i)$.

Приведем правила подстановки аксиоматики Λ_5.

Первое правило содержит отношение для определения последовательности формирования матриц парных сравнений для критериев и альтернатив:

$$s_{1,0,0,0} = \left\langle {}_{P,N}\sigma \ \to {}_P\rho \cdot {}_N\xi \cdot \delta \right\rangle.$$

Формирование матрицы связей между критериями:

$$s_{2,0,0,0} = \left\langle {}_P\rho \to \prod_{i=1}^{P}\prod_{j=1}^{P}\kappa_{i,j} \right\rangle.$$

Формирование элементов матриц связей между альтернативами по l-ому критерию задается $l=\overline{1,P}$ правилами:

$$s_{3,l,0,0} = \left\langle {}_N\xi \to \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}\beta_{l,i,j} \right\rangle.$$

Для установки связи между критериями используются правила вида

$$s_{4,0,i,j} = \left\langle \kappa_{i,j} \to (k_i \circ k_j \circ \varepsilon),\ \kappa_{j,i} \to (k_j \circ k_i \circ \varepsilon) \right\rangle,$$

$${}_{\tau_1}g_{4,0,i,j} = \Big\langle a\lrcorner(k_i \circ k_j \circ \varepsilon) := 0,\ a\lrcorner(k_j \circ k_i \circ \varepsilon) := 0\ \ h\lrcorner(k_j \circ k_i \circ \varepsilon) := 0,$$

$$h\lrcorner(k_i \circ k_j \circ \varepsilon) := 0, \text{ где } \ i=\overline{1,P},\ j=\overline{i+1,P} \Big\rangle.$$

Набор из $i=\overline{1,P}$ правил необходим для заполнения диагонали матрицы парных сравнений критериев:

$$s_{5,i,0,0} = \left\langle \kappa_{i,i} \to (k_i \circ k_i \circ \varepsilon) \right\rangle,\ {}_{\tau_1}g_{5,0,i,i} = \left\langle a\lrcorner(k_i \circ k_i \circ \varepsilon) := 1,\ h\lrcorner(k_i \circ k_i \circ \varepsilon) := 0,\ \forall i=\overline{1,P} \right\rangle.$$

Для установления связи между критериями предназначены правила $i=\overline{1,P}$, $j=\overline{1+i,P}$:

$$s_{6,0,i,j} = \langle\ \rangle,$$

$${}_{\tau_1}g_{6,0,i,j} = \Big\langle a\lrcorner(k_i \circ k_j \circ \varepsilon) := \rhd(k_i, k_j, \varepsilon),\ a\lrcorner(k_j \circ k_i \circ \varepsilon) := 1/(a\lrcorner(k_i \circ k_j)), h\lrcorner(k_i \circ k_j \circ \varepsilon) := 1,$$

$$h\lrcorner(k_j \circ k_i \circ \varepsilon) := 1 \Big\rangle.$$

Следующие отношения подстановки набора правил $(l=\overline{1,P})$ позволяют заполнить диагональ матрицы парных сравнений альтернатив следующими единицами:

$$s_{7,l,i,i} = \left\langle \beta_{i,i} \to (x_i \circ x_i \circ k_l) \right\rangle, \ {}_{\tau_1} g_{7,l,i,i} = \left\langle a \lrcorner (x_i \circ x_i \circ k_l) := 1,\ h \lrcorner (x_i \circ x_i \circ k_l) := 0,\ i = \overline{1,N} \right\rangle.$$

Для установления связи между альтернативами по p-тому критерию предназначены правила, где $l = \overline{1,P}$ и $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1+i,N}$:

$$s_{8,l,i,j} = \left\langle \beta_{i,j} \to (x_i \circ x_j \circ k_l), \beta_{j,i} \to (x_j \circ x_i \circ k_l) \right\rangle,$$

$${}_{\tau_1} g_{8,l,i,j} = \left\langle a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l) := 0,\ a \lrcorner (x_j \circ x_i \circ k_l) := 0,\ h \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l) := 0, \right.$$

$$\left. h \lrcorner (x_j \circ x_i \circ k_l) := 0 \right\rangle.$$

Правила для задания экспертом значения парных сравнений альтернатив по l-ому критерию, где $l = \overline{1,P}$ и $i = \overline{1,N}$, и $j = \overline{1+i,N}$:

$$s_{9,l,i,j} = \langle\ \rangle,\ {}_{\tau_1} g_{9,l,i,j} = \left\langle a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l) := \rhd(x_i, x_j, k_l),\ a \lrcorner (x_j \circ x_i \circ k_l) := 1 / a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l), \right.$$

$$\left. h \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l) := 1, \quad h \lrcorner (x_j \circ x_i \circ k_l) := 1 \right\rangle.$$

Следующее правило содержит отношение для проверки факта связи между критериями и заполнения значения весов. Если все веса заполнены, то на основании операций над атрибутами рассчитывается отношение согласованности и заполняется вектор приоритетов для критериев:

$$s_{10,0,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^{P} \prod_{j=1}^{P} (k_i \circ k_j \circ \varepsilon) \quad {}_{d_{10,0,0,0}}\!\!\to \prod_{i=1}^{P} \prod_{j=1}^{P} (k_i \circ k_j \circ \varepsilon) \cdot_Q \overline{\lambda}) \right\rangle,$$

$${}_{\tau_0} g_{10,0,0,0} = \left\langle d_{10,0,0,0} := 1,\ \ full := 1,\ \prod_{i=1}^{P} \prod_{j=i+1}^{P} (\div (a \lrcorner (k_i \circ k_j \circ \varepsilon) \le 0; 1;\ full := 0)), \right.$$

$$\left. \div (full = 0; 1; d_{10,0,0,0} := 0) \right\rangle,$$

$${}_{\tau_1} g_{10,0,0,0} = \left\langle S_i \lrcorner \overline{\lambda} := \prod_{j=1}^{P} (a \lrcorner (k_i \circ k_j \circ \varepsilon)), i = \overline{1,P};\ \prod_{j=1}^{P} \prod_{i=1}^{P} (Sum_j \lrcorner \overline{\lambda} := Sum_j \lrcorner \overline{\lambda} + (a \lrcorner (k_i \circ k_j \circ \varepsilon))), \right.$$

$$\left. \prod_{i=1}^{P} (v_i \lrcorner \overline{\lambda} := \frac{\sqrt[P]{S_i \lrcorner \overline{\lambda}}}{Sum_i \lrcorner \overline{\lambda}});\ z \lrcorner \overline{\lambda} := \nabla(_{\bar{S}, \overline{Sum}, \bar{v}, P}\, \overline{\lambda}),\ os \lrcorner \overline{\lambda} := (z \lrcorner \overline{\lambda} - P)/(P-1),\ is \lrcorner \overline{\lambda} := \frac{os \lrcorner \overline{\lambda}}{H_P} \right\rangle.$$

Далее операции над атрибутами правил подстановки позволяют установить факт наличия связей между альтернативами и заполнения значения весов по заданному l-ому критерию, где $l = \overline{1,P}$. Если все значения весов заполнены, то последовательностью операций над атрибутами заданы расчет коэффициента согласованности и заполнение векторов приоритетов для альтернатив по каждому критерию, в противном случае правило не применяется.

$$s_{11,l,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} (x_i \circ x_j \circ k_l) \quad {}_{d_{11,l,0,0}}\!\!\to \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} (x_i \circ x_j \circ k_l) \cdot_G \overline{\phi_l} \right\rangle,$$

$${}_{\tau_0} g_{11,l,0,0} = \left\langle full := 1, d_{11,l,0,0} := 1,\ \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} (\div (a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l) \le 0; 1;\ full := 0)), \right.$$

$$\div (full = 0; 1; d_{11,l,0,0} := 0),$$

$$
{}_{\tau_1}g_{11,l,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}(S_i \lrcorner \overline{\phi_l} := S_i \lrcorner \overline{\phi_l} * (a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l))); \prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{N}(Sum_j \lrcorner \overline{\phi_l} := Sum_j \lrcorner \overline{\phi_l} + (a \lrcorner (x_i \circ x_j \circ k_l))), \right.
$$

$$
\prod_{i=1}^{N}(v_i \lrcorner \overline{\phi_l} := (\sqrt[N]{S_i \lrcorner \overline{\phi_l}}) \big/ (Sum_i \lrcorner \overline{\phi_l}); \; z \lrcorner \overline{\phi_l} := \nabla(_{\bar{S},\overline{Sum},\bar{v},N}\, \overline{\phi_l}), \; os_l \lrcorner \overline{\phi_l} := (z \lrcorner \overline{\phi_l} - N)/(N-1),
$$

$$
\left. is \lrcorner \overline{\phi_l} := \frac{os_l \lrcorner \overline{\phi_l}}{H_N} \right\rangle .
$$

Следующее правило задает отношение для формирования конструкции, не содержащей нетерминальные символы, если все заполненные матрицы парных сравнений альтернатив имеют допустимый уровень согласованности. После подстановки на основании операций над атрибутами вычисляется вектор глобальных приоритетов альтернатив $\bar{r} \lrcorner \bar{\bar{\phi}}$, где $\bar{\bar{\phi}} = \left[\bar{\phi}_1 \quad \bar{\phi}_2\right]$:

$$
s_{12,0,0,0} = \left\langle (\prod_{i=1}^{P}\prod_{j=1}^{P}(k_i \circ k_j \circ \varepsilon) \cdot \bar{\lambda}) \cdot \prod_{l=1}^{P}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}(x_i \circ x_j \circ k_l) \cdot \overline{\phi_l} \cdot \mu \;\; {}_{d_{12,0,0,0}}\!\!\rightarrow (\prod_{i=1}^{N}({}_r x_i)) \right\rangle ,
$$

$$
{}_{\tau_0}g_{12,0,0,0} = \left\langle full := 1; \prod_{l=1}^{P}(\div((is \lrcorner \overline{\phi_l}) \le 0{,}01 1; \, 1; \; full := 0); \; \div(full = 1;1; d_{12,0,0,0} := 1) \right\rangle ,
$$

$$
{}_{\tau_1}g_{12,0,0,0} = \left\langle \bar{r} \lrcorner \bar{\bar{\phi}} := \bar{v} \lrcorner \bar{\bar{\phi}} * \bar{v} \lrcorner \bar{\lambda}, \quad \right\rangle .
$$

Следующее множество правил ($i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{i+1, N}$) задает отношения для упорядочивания последовательности альтернатив в соответствии с их весами по убыванию:

$$
s_{13,0,i,j} = \left\langle ({}_r x_i \cdot {}_r x_j) \;\; {}_{d_{13,0,i,j}}\!\!\rightarrow ({}_r x_j \cdot {}_r x_i) \right\rangle , \quad {}_{\tau_0}g_{13,0,i,j} = \left\langle \div(r \lrcorner x_j > r \lrcorner x_i ;1; d_{13,0,i,j} := 1) \right\rangle .
$$

Реализацией КПС для метода анализа иерархий являются ранжированный список альтернатив и вычисленные значения отношения согласованности для сформированной конструкции.

3. Выводы

В данной работе представлена модель конструктивного процесса принятия решений на основе МАИ средствами конструктивно-продукционных структур.

Представление метода с использованием КПС дает возможность изменять некоторые детали конструкций, представляя таким образом различные модификации МАИ. Методология КПС раскрывает возможности для гибридизации методов многокритериального анализа, которая может производиться автоматически.

Данный подход позволяет формально представить решения некоторых задач, в которых используются МАИ, или его модификации как единую модель и автоматизировать процесс их решения.

Если рассматривать программные реализации МАИ, то представленная в статье модель оторвана от интерфейса пользователя. Разработка нескольких КПС интерфейса заполнения (представления) матриц парных сравнений позволит получить гибридный интерфейс представления информации в зависимости от потребностей и предпочтений пользователя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Саати Т.Л. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.
2. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Саати Т.Л. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
3. Саати Т.Л. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Саати Т.Л. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
4. Саати Т.Л. Аналитическое планирование. Организация систем / Т.Л. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
5. Абакаров А.Ш. Программная система поддержки принятия рациональных решений "MPRIORITY 1.0" / А.Ш. Абакаров, Ю.А. Сушков // Электронный научный журнал "Исследовано в России". – 2005. – С. 2130 – 2146.
6. Saaty T.L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process / T.L. Saaty // Royal Academy of Sciences, Spain, Series A. Mathematics. – 2008. – November. – P. 251 – 318.
7. Саати Т.Л. Об измерении неосязаемого. Подход к относительным измерениям на основе главного собственного вектора матрицы парных сравнений / Т.Л. Саати // Cloud Of Science. – 2015. – Т. 2, № 1. – С. 5 – 40.
8. Колесникова С.И. Модификация метода анализа иерархий для динамических наборов альтернатив / С.И. Колесникова // Математические основы интеллектуальных систем. – 2009. – № 4 (6). – С. 102 – 109.
9. Шинкаренко В.И. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. I: Обобщенная формальная конструктивно-продукционная структура / В.И. Шинкаренко, В.М. Ильман // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 5. – С. 8 – 16.
10. Шинкаренко В.И. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования Ч. I: Формальные алгоритмические структуры / В.И. Шинкаренко, В.М. Ильман, В.В. Скалозуб // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 3 – 14.
11. Шинкаренко В.И. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. II: Уточняющие преобразования / В.И. Шинкаренко, В.М. Ильман // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 6. – С. 15 – 28.
12. Шинкаренко В.И. Моделирование процесса адаптации алгоритмов сжатия средствами конструктивно-продукционных структур / В.И. Шинкаренко, Т.Н. Васецкая // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 19 – 34.
13. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
14. Басакер Р.Г. Конечные графы и сети / Р.Г. Басакер, Т.Л. Саати. – М.: Наука, 1974. – 366 с.
15. Ільман В.М. Структурний підхід до проблеми відтворення граматик / В.М. Ільман, В.І. Шинкаренко // Проблемы программирования. – 2007. – № 1. – С. 5 – 16.

Стаття надійшла до редакції 16.11.2015