УДК 519.876:622.673.8

©Фідровська Н.М., Литвин О.О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НАВАНТАЖЕННЯ НА БАРАБАНІ ПІД КАНАТОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛОКАЛЬНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СПЛАЙНІВ

1. Вступ

При накручуванні каната на барабан по кривій, яка є гвинтовою лінією виникає питання про прогин поверхні барабана, що залежить від розподілу навантаження. Як відомо [1], розподіл навантаження на поверхні барабана залежить від сил натягу каната T, від кроку h між сусідніми витками (крок гвинтової лінії) і від кута γ намотування.

2. Аналіз літературних джерел, пов'язаних з темою статті

В даній роботі пропонується для дослідження прогину стінки барабану використовувати параболічні сплайни, запропоновані Ю.М. Суботіним [2], оскільки ці сплайни мають наступні властивості [3]: кожний сплайн є згладжуючим сплайном і зберігає локальні властивості монотонності і опуклості вхідних даних (значення функції у вузлах сітки), для нього відома точна оцінка похибки наближення функцій з неперервною другою похідною. Обчислювальний експеримент показав, що ці сплайни можуть гарно наближувати прогин при переході від одного профілю до іншого. Але для їх побудови потрібно задавати дві сітки вузлів сплайна – вузли інтерполяції і допоміжні вузли, вибір яких може бути, взагалі кажучи, довільним. Тому, наряду зі сплайнами Суботіна Ю.М. нами також проаналізована можливість використання для опису прогину поверхні барабану також параболічних сплайнів, побудова яких проводиться за допомогою узагальнення алгоритму, описаного в монографії Литвина О.М. [4].

3. Постановка задачі

Вважаємо, що розподіл навантаження, не зменшуючи загальності, на інтервалі $0 \le x \le 2a$. Розіб'ємо цей інтервал на підінтервали наступними точками $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 2a; x_k = kh, h = \dfrac{2a}{M}$, де $M -$кількість витків канату, намотаного на барабані, h- крок намотки. Крім того, для порівняння математичної моделі прогину в даній роботі вважаємо, що нам відома формула

$$f(x) = \left[\cos(\rho \sin\psi x)\left(C_1 e^{\rho\cos\psi x} + C_2 e^{-\rho\cos\psi x}\right) + A e^{-\eta\mu\frac{l-x}{h}2\pi}\right]\cos n\varphi$$

для функції прогину $w = f(x)$ в точках $x = x_m = (m-0,5)h, m = \overline{1,M}$ (в середніх точках підінтервалів розбиття $[0, 2a]$. Задача полягає у наближеному представленні цієї функції прогину у вигляді відповідного параболічного сплайну.

4. Основний зміст роботи

Для побудови будемо використовувати базисні квадратичні сплайни, які є узагальненням квадратичних сплайнів, що досліджувались в [4, стор. 54-55] на випадок, коли для знаходження невідомих параметрів сплайна застосовується не мінімізація інтегралу від квадрату другої похідної сплайна, а сума квадратів відхилень односторонніх похідних другого порядку в кожній внутрішній точці.

Нижче викладемо метод побудови інтерполяційних параболічних сплайнів однієї змінної, точних на поліномах 2-го степеня.

Кожну з ліній на поверхні барабана можна наблизити з достатньою точністю сплайнами першого ступеню. Це твердження пов'язане з тим, що кожна така лінія на поверхні є неперервною лінією, а графік сплайна першого степеня, який інтерполює цю лінію є ломаною лінією з вузлами ломаної, розміщеними на вказаній наближуваній лінії. Але, якщо ця наближувана лінія є гладкою, то можна стверджувати, що більш ефективним апаратом для наближення таких ліній є апарат сплайнів другого та вищих степенів. Описаний в [4] метод побудови інтерполяційних сплайнів 2-го степеня використовував для знаходження параметрів сплайна критерій, який полягає в мінімізації інтегралу від квадрату другої похідної сплайна. Нижче опишемо метод побудови інтерполяційних параболічних сплайнів, який не вимагає побудови двох систем вузлів і полягає у виборі параметрів квадратичного сплайна з умови мінімуму суми квадратів різниць других односторонніх похідних у всіх середніх точках розбиття інтервалу $\left[-1,1\right]$ на підінтервали. Цей критерій, зокрема, забезпечує таку властивість квадратичного сплайна: цей сплайн є точним на поліномах 2-го степеня.

Загальна формула для такого сплайна як і в [4, стор. 54-55] має вигляд

$$S_N\left(x\right)=S_{N,i}\left(x\right)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\left[-\left(x-x_{i+1}\right)f\left(x_i\right)+\left(x-x_i\right)f\left(x_{i+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}M_i\left(x-x_i\right)\left(x-x_{i+1}\right),\ \ x\in\left[x_i,x_{i+1}\right],i=\overline{1,n-1}$$

Невідомі сталі $M_i, i=\overline{1,N-1}$ у цій формулі знаходяться з умов (інша умова замість $J\left(S_N\right)$ досліджувалась в [4]):

$$J\left(S_N\right)=\sum_{i=1}^{N-1}\left(M_i-M_{i+1}\right)^2\to\min_M,$$

$$S'_N\left(x_i-0\right)=S'_N\left(x_i+0\right),i=\overline{2,N-1}.$$

Як витікає з роботи [4, стор. 54-55], сталі $M_i, i=\overline{1,N-1}$, що дають розв'язок описаної вище мінімізаційної задачі, можна обчислити за формулами

$$M_1=\frac{2}{a_1h_1}\sum_{i=1}^{N-2}\left(-1\right)^{i-1}\left(\Delta_{1,i+1}-\Delta_{1,i}\right)a_{i+1},$$

$$M_i=\frac{2\left(\Delta_{1,i}-\Delta_{1,i-1}\right)-M_{i-1}h_{i-1}}{h_i},\qquad i=\overline{2,N-1},$$

або в явному вигляді

$$M_i=\frac{1}{h_i}\left[\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^{k+i}2\left(\Delta_{1,k}-\Delta_{1,k-1}\right)+\left(-1\right)^{i-1}h_1M_1\right],$$

При цьому отриманий сплайн є неперервним, має неперервну першу похідну і є точним на поліномах 2-го ступеня, тобто

$$S_N(x) = f(x) \forall f(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in R$$

Обчислювальний експеримент. Для розв’язання задачі наближення функції прогину автором складена програма в системі комп’ютерної математики MathCad.

На графіку (рис. 1) наводиться для порівняння графіки точної функції і її наближення за допомогою запропонованих квадратичних сплайнів. Максимальна похибка при наближенні точного значення прогину при цьому не перевищила 0,02.

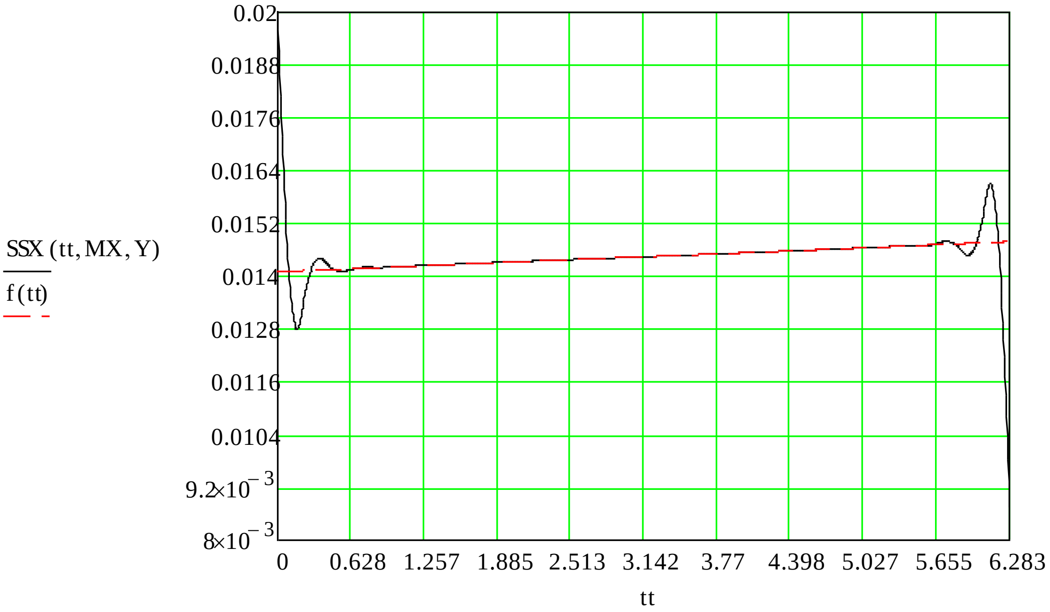

Рис. 1 – Графічне зображення прогину $f(tt)$ та наближуючого сплайну $SSX(tt, MX, Y)$

Висновки

Як бачимо, метод інтерлінації дозволяє досить точно визначити прогин обичайки в кожній точці.

Список використаних джерел:

1. Фидровская Н.Н. Влияние краевых шпангоутов на прогиб стенки цилиндрической оболочки / Н. Н. Фидровская // Вісник ХНТУСГ. – Х., 2009. – Вип. 76. – С. 169-172.

2. Суботин Ю.Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации / Ю. Н. Суботин // ЖВМиМФ. – 1993. – Т. 33, № 7.– С. 996-1003.

3. Шевалдин В.Т. Аппроксимация локальними параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов / В. Т. Шевалдин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 2. – С. 77–88.

4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. : монографія / О. М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.

Фідровська Н.М., Литвин О.О. «Математичне моделювання розподілу навантаження на барабані під канатом за допомогою локальних параболічних сплайнів».

В статті розглянуто застосування методу інтерлінації, а саме, параболічних сплайнів Суботіна для будування графіку прогину обичайки канатного барабана під дією каната.

Ключові слова: метод інтерлінації, канатний барабан, математичне моделювання.

Фидровская Н.Н., Литвин О.О. «Математическое моделирование распределения нагрузки на барабане под канатом при помощи локальных параболических сплайнов».

В статье рассмотрено применение метода интерлинации, а именно, параболических сплайнов Суботина для построения графика прогиба обечайки канатного барабана под действием каната.

Ключевые слова: метод интерлинации, канатный барабан, математическое моделирование.

Fidrovska N.M., Lytvyn O.O. “Mathematical modeling of load distribution on the drum under rope with local parabolic splines”.

In the article using of the interlineation method videlicet Subotin's parabolic splines for construction of graphs of rope drum shell ring deflection under rope.

Key words: interlineation method, rope drum, mathematical modeling.

Стаття надійшла до редакції 17 травня 2012 р.