УДК 517.51

В. В. Нестеренко

СУКУПНІ ВЛАСТИВОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЯКІ ПОВ'ЯЗАНІ ІЗ ЗАМКНЕНІСТЮ ГРАФІКА

V. V. Nesterenko. *Aggregate properties of mappings that are associated with the closedness of a graph*, Mat. Stud. **43** (2015), 27–35.

We study aggregate properties of mappings of two variables that are closed graph relative one of variables. In particular we prove that if X is a topological space, a space Y is a first (second) countable space, Z is a locally compact Hausdorff second countable space, a mapping $f\colon X\times Y\to Z$ such that f^x is continuous for every x with some residual subsets of X and f_y has closed graph for each $y\in Y$, then $C_y(f)=\{x\in X\colon (x,y)\in C(f)\}$ is residual in X for each $y\in Y$ ($C_Y(f)=\{x\in X\colon \{x\}\times Y\subseteq C(f)\}$ is residual in X).

В. В. Нестеренко. *Совокупные свойства отображений, ассоциированные с замкнутостью графика* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №1. – С.27–35.

Исследуются совокупные свойства отображений двух переменных, имеющие замкнутый график относительно одной из переменных. В частности установлено, что если X — топологическое пространство, пространство Y удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности, Z — хаусдорфово локально компактное пространство, удовлетворяющее вторую аксиому счетности, а у отображения $f\colon X\times Y\to Z$ сечение f^x непрерывно для каждого x принадлежащего некоторому остаточному в X множеству и сечение f_y имеет замкнутый график для каждого $y\in Y$, то для каждого $y\in Y$ множество $C_y(f)=\{x\in X\colon (x,y)\in C(f)\}$ остаточное в X (множество $C_Y(f)=\{x\in X\colon \{x\}\times Y\subseteq C(f)\}$ остаточное в X).

1. Вступ. Властивості функцій із замкненим графіком вивчалися у цілому ряді статей ([1–5]). В [6] Z. Grande досліджував властивості функцій $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$, вертикальні розрізи $f^x=f(x,\cdot)$ яких мають замкнений графік. Зокрема, там доведено, що за відповідних умов на простори X,Y, якщо у функції $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ всі вертикальні x-розрізи мають замкнений графік, а всі y-розрізи $f_y=f(\cdot,y)$ одностайно неперервні (мають властивість Бера, клікові чи вимірні за Лебеґом), то функція f має замкнений графік (має властивість Бера, клікова чи вимірна за Лебеґом) як функція від двох змінних.

У цій статті ми продовжимо дослідження розпочате Z. Grande в [6]. Зокрема доведемо, що за певних умов на топологічні простори X, Y і Z, якщо для відображення $f\colon X\times Y\to Z$ всі його y-розрізи f_y мають замкнений графік, а всі x-розрізи неперервні (квазінеперервні) для всіх x з деякої залишкової в X множини, то існує залишкова в X множина A, така, що відображення f неперервне (квазінеперервне) за сукупністю змінних в кожній точці множини $A\times Y$. Також доведемо, що коли функція $f\colon X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A15.
Keywords: continuity; quasi-continuity; cliquishness; horizontally quasi-continuity; transitional function; closed graph.
doi:10.15330/ms.43.1.27-35

де X — берів простір, горизонтально і вертикально квазінеперервна та f^x має замкнений графік для всіх x з деякої залишкової в X множини, то f є квазінеперервною за сукупністю змінних.

2. Основні означення. Нехай X, Y та Z — топологічні простори. Для підмножини A топологічного простору через $\overline{A}$ чи $\operatorname{int} A$ будемо позначати відповідно замикання чи внутрішність множини A. Для відображення $f\colon X \to Z$ через $Grf = \{(x, f(x))\colon x \in X\}$ позначимо графік відображення f в $X \times Z$. Якщо відображення f діє з $X \times Y$ в Z, то через $f^x(y) = f(x,y)$ і $f_y(x) = f(x,y)$ ми позначаємо відповідно x- та y-розрізи відображення f.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *квазінеперервним в точці* $x \in X$ ([7]), якщо для довільних околів U і V відповідно точок $x \in X$ і $y = f(x) \in Y$ існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Відображення називається *квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним* (*вертикально квазінеперервним*) *в точці* $p = (x,y) \in X \times Y$ ([8]), якщо для довільних околів U, V і W точок x, y і $z = f(x,y)$ в просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита непорожня множина G в X (H в Y) і точка $b \in V$ ($a \in U$) такі, що $G \subseteq U$ ($H \subseteq V$) і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$ ($f(\{a\} \times H) \subseteq W$). Відображення називається *горизонтально квазінеперервним* (*вертикально квазінеперервним*), якщо воно є таким в кожній точці.

Відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називається *симетрично квазінеперервним відносно* x *в точці* $p = (x,y) \in X \times Y$ ([9]), якщо для довільного околу W точки $z = f(x,y)$ у просторі Z і довільних околів U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $f(G \times H) \subseteq W$, і просто *симетрично квазінеперервним відносно* x, якщо воно є таким в кожній точці з $X \times Y$.

Нехай X і Y — топологічні простори, а Z — метричний простір з метрикою d. Для функції $f\colon X \to Z$ позначимо через $\omega_f(A) = \sup\{d(f(u), f(v))\colon u, v \in A\}$ *коливання* функції f на непорожній множині A. Через $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in Z\colon d(z, z_0) < \varepsilon\}$ і $B_\varepsilon[z_0] = \{z \in Z\colon d(z, z_0) \leq \varepsilon\}$ позначимо відповідно відкриту і замкнену кулі з центром в точці z_0 і радіуса ε. Для метричного простору Z функція $f\colon X \to Z$ називається *кліковою в точці* $x \in X$ ([10]), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G) < \varepsilon$. Якщо функція f клікова в кожній точці з X, то вона називається *кліковою*. Функція $f\colon X \times Y \to Z$ називається *симетрично кліковою відносно* x *в точці* $p = (x,y)$ ([11]), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільних околів U і V відповідно точок $x \in X$ і $y \in Y$ існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі що $G \times H \subseteq U \times V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$, і просто *симетрично кліковою відносно* x, якщо вона є такою в кожній точці.

Нагадаємо, що множина A топологічного простору X називається *множиною першої категорії*, якщо A подається у вигляді не більш ніж зліченного об'єднання ніде не щільних множин в X. Якщо множина A не є множиною першої категорії, то її називають *множиною другої категорії*. Множина A топологічного простору X називається *залишковою*, якщо множина $X \setminus A$ першої категорії. Топологічний простір X називається *беровим*, якщо кожна відкрита непорожня підмножина простору X є множиною другої категорії. Залишкова множина в беровому просторі є скрізь щільною.

3. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, K — компактна підмножина простору*

Y, U — відкрита непорожня множина в X, A — підмножина простору X, яка щільна в U, $f\colon X \to Y$ — відображення, яке має замкнений графік і $f(A) \subseteq K$. Тоді $f(U) \subseteq K$.

Доведення. Добре відомо ([12]), що якщо відображення має замкнений графік, то прообраз компактної множини є замкненою множиною. Тому, множина $f^{-1}(K)$ є замкненою. Тоді,

$$U \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(K)} = f^{-1}(K).$$

Отже, $f(U) \subseteq K$. □

Леми 2 і 3 для деяких типів просторів X і Y є в [1–3].

Лема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — локально компактний простір і відображення $f\colon X \to Y$ має замкнений графік. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції f є замкненою.*

Доведення. Досить переконатися, що множина $C(f)$ точок неперервності відображення f є відкритою. Візьмемо довільну точку $x_0 \in C(f)$ і компактний окіл V точки $f(x_0)$. З неперервності відображення f в точці x_0 випливає, що існує відкритий окіл U точки x_0 такий, що $f(U) \subseteq V$. Розглянемо звуження $g = f|_U$ відображення f на множину U. Тоді відображення g діє з U в компактну множину V і має замкнений графік. Тому, відображення g неперервне ([16, с. 228]). Оскільки множина U відкрита, то відображення f неперервне на множині U. Отже, $U \subseteq C(f)$ і тому точка x_0 є внутрішньою точкою множини $C(f)$, а це й означає, що множина $C(f)$ є відкритою. □

Лема 3. *Нехай X — берів простір, Y — сепарабельний метризовний локально компактний простір і відображення $f\colon X \to Y$ має замкнений графік. Тоді $D(f)$ є замкненою ніде не щільною множиною.*

Доведення. За лемою 2 множина $D(f)$ є замкненою. Припустимо, що множина $D(f)$ десь щільна. Оскільки множина $D(f)$ замкнена і за припущенням десь щільна, то $\operatorname{int} D(f) \neq \varnothing$. З беровості простору X випливає, що множина $D(f)$ другої категорії.

Оскільки простір Y локально компактний, то для кожної точки $x \in X$ існує компактний окіл $V(x)$ точки $f(x)$ в Y такий, що для довільного околу U точки x маємо, що $f(U) \nsubseteq V(x)$. Сепарабельний метризовний простір має зліченну базу. Нехай $\{V_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ — база простору Y. Розглянемо множини

$$E_m = \{x \in D(f)\colon f(x) \in V_m \subseteq V(x)\}.$$

Зрозуміло, що $D(f) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$. Оскільки множина $D(f)$ другої категорії, то існує номер m_0, такий, що множина E_{m_0} десь щільна. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \operatorname{int} \overline{E_{m_0}} \cap E_{m_0}$. Зауважимо, що $f(E_{m_0}) \subseteq V(x_0)$ і множина $V(x_0)$ компактна. За лемою 1 маємо, що $f(\operatorname{int} \overline{E_{m_0}}) \subseteq V(x_0)$. Оскільки $x_0 \in \operatorname{int} \overline{E_{m_0}}$, то множина $U = \operatorname{int} \overline{E_{m_0}}$ є околом точки x_0 і $f(U) \subseteq V(x_0)$. Отримали суперечність. □

Нам потрібна така, доведена, наприклад, в [13], проста лема.

Лема 4. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, U — відкрита непорожня множина в X, V — відкрита непорожня множина в Y, множина A міститься в X і така, що $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Добре відомими є наступні твердження.

Лема 5. *Якщо U — відкрита непорожня підмножина в $\mathbb{R}$, функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік і обмежена на U, то f неперервна на U.*

Лема 6. *Якщо функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік, то для довільної точки $x \in \mathbb{R}$ виконується одна з наступних альтернатив:*
1) *функція f неперервна справа чи зліва в точці x (отже, квазінеперервна в точці x);*
2) $\lim\limits_{t\to x+0} f(t) = \infty$ *і* $\lim\limits_{t\to x-0} f(t) = \infty$.

Лема 7. *Нехай X — топологічний простір, функція $f\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вертикально і горизонтально квазінеперервна, а f^x має замкнений графік для всіх x з деякої залишкової множини M. Тоді множина*

$$K_y(f) = \{x \in X\colon f^x\text{— квазінеперервна в точці } y\}$$

залишкова в X для кожної точки $y \in \mathbb{R}$.

Доведення. Будем міркувати від супротивного. Нехай існує точка $y \in \mathbb{R}$, така, що $E = X \setminus K_y(f)$ — множина другої категорії в X. Зрозуміло, що множина $E_0 = E \cap M$ теж другої категорії в X. Тоді для кожної точки $x \in E_0$ функція f^x має замкнений графік і не є квазінеперервною в точці y. З леми 6 випливає, що для кожної точки $x \in E_0$ маємо, що $\lim\limits_{t\to y+0} f^x(t) = \infty$ і $\lim\limits_{t\to y-0} f^x(t) = \infty$. Таким чином, для кожної точки $x \in E_0$ існують окіл $W(x)$ точки $f(x, y)$ і окіл $V(x)$ точки y, такі, що $f(x, v) \in \mathbb{R} \setminus W(x)$ для $v \in V(x) \setminus \{y\}$. Нехай $\{W_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — база простору $\mathbb{R}$ і $\{V_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ — база околів точки y. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_0\colon f(x, y) \in W_n \subseteq W(x), y \in V_m \subseteq V(x)\}.$$

За означенням околів $V(x)$ і $W(x)$ випливає, що $f(A_{m,n} \times (V_m \setminus \{y\})) \subseteq \mathbb{R} \setminus W_n$ для довільних номерів m і n. Легко бачити, що $\bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки множина E_0 другої категорії, то існують номери m_0 і n_0, такі, що множина A_{m_0,n_0} десь щільна. Нехай множина A_{m_0,n_0} щільна у відкритій непорожній множині U_0, тобто $U_0 \subseteq \overline{A_{m_0,n_0}}$. Зауважимо, що множина $V_{m_0} \setminus \{y\}$ відкрита в $\mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою 4 маємо, що

$$f(U_0 \times (V_{m_0} \setminus \{y\})) \subseteq \overline{f(A_{m_0,n_0} \times (V_{m_0} \setminus \{y\}))} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus W_{n_0}} = \mathbb{R} \setminus W_{n_0}.$$

Тепер візьмемо довільну точку $x_0 \in U_0$. З вертикальної квазінеперервності випливає, що існують точка $a \in U_0$ і відкрита непорожня множина H в $\mathbb{R}$, такі, що $H \subseteq V_{m_0}$ і $f(\{a\} \times H) \subseteq W_{n_0}$. Зрозуміло, що існує точка $b \in H \cap (V_{m_0} \setminus \{y\})$. Тоді з одного боку $f(a, b) \in W_{n_0}$, бо $(a, b) \in \{a\} \times H$, а з іншого боку $f(a, b) \in \mathbb{R} \setminus W_{n_0}$, бо $(a, b) \in U_0 \times (V_{m_0} \setminus \{y\})$. Одержали суперечність. □

4. Неперервність. Як і в [14], підмножину B топологічного простору Y ми називаємо *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш ніж зліченна система $\mathcal{V} = \{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин V_n в Y, що для кожної точки $y \in B$ система $\mathcal{V}(y) = \{V_n\colon y \in V_n\}$ є базою околів точки y в просторі Y. Така система $\mathcal{V}$ називається *базою для B*. Увесь простір Y є множиною зліченного типу тоді і тільки тоді, коли він має не більш ніж зліченну базу, тобто задовольняє другу аксіому зліченності, а виконання першої аксіоми зліченності в Y означає, що всі одноточкові множини $\{y\}$ в Y є множинами зліченного типу.

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, B — множина зліченного типу в Y, Z — гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f\colon X\times Y\to Z$ таке, що f_y має замкнений графік для всіх $y\in Y$. Тоді множина*
$$R=\{x\in X\colon \{x\}\times(C(f^x)\cap B)\subseteq C(f)\}$$
є залишкова в X.

Доведення. Припустимо, що доповнення
$$E=X\setminus R=\{x\in X\colon \exists y_x\in(C(f^x)\cap B)\,|\,p_x=(x,y_x)\in D(f)\}$$
є множиною другої категорії в X. Для кожної точки $x\in E$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x=f(p_x)$ такий, що для довільних околів U точки x в X та V точки y_x в Y маємо $f(U\times V)\nsubseteq W(x)$.

Нехай $\mathcal{V}=\{V_m\colon m\in\mathbb{N}\}$ — зліченна база для B, а $\mathcal{W}=\{W_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ — база простору Z. Оскільки кожний гаусдорфовий локально компактний простір є регулярним (навіть простором Тихонова, [17, с. 231]) і $\mathcal{W}$ — база простору Z, то для кожної точки $x\in E$ існує номер n такий, що $z_x\in\overline{W_n}\subseteq W(x)$, при цьому множина $\overline{W_n}$ компактна. Розглянемо множини
$$E_{m,n}=\{x\in E\colon z_x\in\overline{W_n}\subseteq W(x), y_x\in V_m \text{ і } f^x(V_m)\subseteq\overline{W_n}\}.$$
З неперервності функції f^x в точці y_x для всіх $x\in E$ і того, що $\mathcal{V}$ — база для B маємо, що $E=\bigcup_{n,m=1}^{\infty}E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують номери n_0 і m_0 такі, що множина $E_1=E_{n_0,m_0}\subseteq E$ десь щільна в X. Нехай U_0 — відкрита непорожня множина в X така, що $U_0\subseteq\overline{E_1}$. Оскільки $f(E_1\times V_{m_0})\subseteq\overline{W_{n_0}}$, тобто $f_y(E_1)\subseteq\overline{W_{n_0}}$ для кожного $y\in V_{m_0}$, то за лемою 1 $f_y(U_0)\subseteq\overline{W_{n_0}}$ для кожного $y\in V_{m_0}$. Тому, $f(U_0\times V_{m_0})\subseteq\overline{W_{n_0}}$. Оскільки $U_0\subseteq\overline{E_1}$, то існує точка $x_0\in U_0\cap E_1$. Множина $U_0\times V_{m_0}$ є околом точки p_{x_0} і $f(U_0\times V_{m_0})\subseteq\overline{W_{n_0}}\subseteq W(x_0)$. З іншого боку, $x_0\in E$, U_0 — окіл x_0, а V_{m_0} — окіл y_{x_0}, отже, $f(U_0\times V_{m_0})\nsubseteq W(x_0)$. Одержана суперечність показує, що зроблене на початку нашого доведення припущення не правильне. □

Теорема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f\colon X\times Y\to Z$ таке, що розріз f^x неперервний для кожного x з деякої залишкової множини M в X і розріз f_y має замкнений графік для кожного $y\in Y$. Тоді:*
(1) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y\in Y$ множина $C_y(f)=\{x\in X\colon (x,y)\in C(f)\}$ залишкова в X;
(2) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f)=\{x\in X\colon \{x\}\times Y\subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Доведення. За теоремою 1 для множини зліченного типу B множина $R=\{x\in X\colon \{x\}\times(C(f^x)\cap B)\subseteq C(f)\}$ є залишковою в X. Оскільки за умовою множина $M=\{x\in X\colon C(f^x)=Y\}$ залишкова в X, то $E=M\cap R$ теж залишкова множина в X.

У випадку (1) простір Y задовольняє першу аксіому зліченності. Тоді, для довільної точки $y\in Y$ множина $B=\{y\}$ є зліченного типу. Тому, для довільної точки $y\in Y$ маємо, що
$$E=M\cap\{x\in X\colon \{x\}\times(C(f^x)\cap B)\subseteq C(f)\}=$$
$$=\{x\in X\colon \{x\}\times(Y\cap\{y\})\subseteq C(f)\}=C_y(f).$$

Отже, множина $C_y(f)$ залишкова для кожного $y \in Y$.

У випадку (2) простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і, тому, множина $B = Y$ є зліченного типу. Оскільки

$$E = M \cap \{x \in X \colon \{x\} \times (C(f^x) \cap B) \subseteq C(f)\} =$$
$$= \{x \in X \colon \{x\} \times (Y \cap Y) \subseteq C(f)\} = C_Y(f),$$

то множина $C_Y(f)$ залишкова в X. □

5. Квазінеперервність. Через $K(f)$ позначатимемо множину точок квазінеперервності відображення $f \colon X \to Y$, а через $K^s(f)$ — множину точок симетричної квазінеперервності відносно x відображення $f \colon X \times Y \to Z$.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має злічену псевдобазу, Z — гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f \colon X \times Y \to Z$ таке, що f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина $R = \{x \in X \colon \{x\} \times K(f^x) \subseteq K^s(f)\}$ залишкова в X.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Тоді множина

$$E = X \setminus R = \{x \in X \colon \exists y_x \in K(f^x) \,|\, p_x = (x, y_x) \notin K^s(f)\}$$

другої категорії в X. З означенням множини E випливає, що для кожної точки $x \in E$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ і $W(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і $z_x = f(p_x)$ в Z такі, що для кожного околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{V_m \colon m \in \mathbb{N}\}$ — зліченна псевдобаза простору Y така, що $V_m \neq \varnothing$ для кожного m, а $\{W_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z. Для кожної точки $x \in E$ існує номер n такий, що $z_x \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x)$, при цьому множина $\overline{W_n}$ компактна. Розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E \colon z_x \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x), V_m \subseteq V(x) \text{ і } f^x(V_m) \subseteq W_n\}.$$

З квазінеперервності функції f^x у точці y_x для всіх $x \in E$ нескладно отримати, що $E = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують такі номери n_0 і m_0, що множина $E_1 = E_{n_0,m_0} \subseteq E$ десь щільна в X. Нехай U_0 — відкрита непорожня множина в X така, що $U_0 \subseteq \overline{E_1}$. Оскільки $f_y(E_1) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$, то за лемою 1 $f_y(U_0) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$. Тому, $f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}}$. Оскільки $U_0 \subseteq \overline{E_1}$, то існує точка $x_0 \in U_0 \cap E_1$. Множина U_0 є околом точки x_0, $V_{m_0} \subseteq V(x_0)$ і

$$f((U_0 \cap U(x_0)) \times V_{m_0}) \subseteq f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}} \subseteq W(x_0).$$

З іншого боку, $x_0 \in E$. З одержаної суперечності випливає, що зроблене на початку доведення припущення не правильне. □

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f \colon X \times Y \to Z$ таке, що f^x квазінеперервне для всіх з деякої залишкової в X множини M і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді існує така залишкова в X множина A, що $A \times Y \subseteq K^s(f)$.*

Доведення. За теоремою 3 множина $R = \{x \in X \colon \{x\} \times K(f^x) \subseteq K^s(f)\}$ залишкова в X. Тоді множина $A = R \cap M$ теж залишкова в X і $A \times Y \subseteq K^s(f)$. □

Теорема 5. *Нехай X — берів простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір, відображення $f \colon X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і для кожного $y \in Y$ множина*

$$K_y(f) = \{x \in X \colon f^x \text{— квазінеперервна в точці } y\}$$

залишкова в X. Тоді функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.

Доведення. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, замкнений окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z, окіл U точки x_0 в X і окіл V точки y_0 в Y. З горизонтальної квазінеперервності відображення f в точці p_0 випливає, що існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in V$ такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq \operatorname{int} W$. Оскільки простір X берів, то множина G другої категорії. Тому, множина $A = G \cap K_b(f)$ теж другої категорії в X. Нехай $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору Y. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини $A_n = \{x \in A \colon V_n \subseteq V, f^x(V_n) \subseteq W\}$. Оскільки множина A другої категорії в X, $f(A \times \{b\}) \subseteq \operatorname{int} W$ і для кожної точки $x \in A$ відображення f^x квазінеперервне в точці b, то існує номер n_0 такий, що множина A_{n_0} десь щільна. Нехай множина A_{n_0} щільна у відкритій непорожній множині G_0 в X, тобто, $G_0 \subseteq \overline{A_{n_0}}$. З леми 4 випливає, що

$$f(G_0 \times V_{n_0}) \subseteq \overline{f(A_{n_0} \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W} = W.$$

Оскільки $G_0 \times V_{n_0} \subseteq U \times V$, то відображення f квазінеперервне в точці p_0. □

Теорема 6. *Нехай X — берів простір, функція $f \colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ горизонтально і вертикально квазінеперервна та f^x має замкнений графік для всіх x з деякої залишкової множини в X. Тоді функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.*

Доведення теореми 6. Це безпосередній наслідок з теореми 5 і леми 7. □

6. Кліковість. В [6] одержано такий результат: *якщо простори X і Y задовольняють другу аксіому зліченності, X — берів простір, для функції $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ всі x-розрізи f^x клікові, а всі y-розрізи f_y мають замкнений графік, то функція f клікова за сукупністю змінних.* Тут, використавши інший метод, перенесемо цей результат на випадок функцій зі значеннями в метричних просторах, при цьому його уточнимо.

Позначимо через $A(f)$ множину точок кліковості функції $f \colon X \to Y$, а через $A^s(f)$ — множину точок симетричної кліковості відносно x функції $f \colon X \times Y \to Z$.

Теорема 7. *Нехай X і Y — топологічні простори і Y має зліченну псевдобазу, Z — сепарабельний метричний простір з метрикою d, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f \colon X \times Y \to Z$ така, що f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина $R = \{x \in X \colon \{x\} \times A(f^x) \subseteq A^s(f)\}$ залишкова в X.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай доповнення

$$E = X \setminus R = \{x \in X \colon \exists y_x \in A(f^x) \,|\, p_x = (x, y_x) \notin A^s(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Тоді, для кожної точки $x \in E$ існують околи $U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок x в X і y_x в Y та число $\varepsilon_x > 0$, такі, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon_x$

для кожного околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$.

Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ — зліченна псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$E_{m,n} = \Big\{x \in E : V_m \subseteq V(x), \varepsilon_x > \frac{1}{n}, \omega_{f^x}(V_m) < \frac{1}{8n}\Big\}.$$

З кліковості функції f^x в точці y_x для всіх $x \in E$ маємо, що $E = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина $E_1 = E_{n_0,m_0} \subseteq E$ другої категорії в X.

Розглянемо довільну точку $b \in V = V_{m_0}$. Оскільки простір Z сепарабельний, то існує не більш ніж зліченна скрізь щільна множина $\{z_1, z_2, ..., z_k, ...\}$ в Z. Зрозуміло, що $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{16n_0}}(z_k)$. Оскільки $f(E_1 \times \{b\}) \subseteq Z$ і множина E_1 другої категорії в X, то існують десь щільна підмножина $E_2 \subseteq E_1$ та номер k_0, такі, що $f(E_2 \times \{b\}) \subseteq B_{\frac{1}{16n_0}}(z_{k_0})$. Тоді, $d(f(u_1, b), f(u_2, b)) < \frac{1}{8n_0}$ для всіх $u_1, u_2 \in E_2$.

Переконаємось, що $\omega_f(E_2 \times V) \leq \frac{3}{8n_0}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (u_i, v_i) \in E_2 \times V$ для $i = 1, 2$. Тоді,

$$\begin{gathered} d(f(p_1), f(p_2)) \leq d(f(p_1), f(u_1, b)) + d(f(u_1, b), f(u_2, b)) + \\ + d(f(u_2, b), f(p_2)) < \frac{1}{8n_0} + \frac{1}{8n_0} + \frac{1}{8n_0} = \frac{3}{8n_0}. \end{gathered}$$

Отже, $\omega_f(E_2 \times V) \leq \frac{3}{8n_0} < \frac{1}{2n_0}$. Тоді множина $f(E_2 \times V)$ міститься в деякій кулі $B = B_{\frac{1}{2n_0}}(z_0)$. Нехай U — відкрита непорожня множина в X така, що $U \subseteq \overline{E_2}$.

За умовою замикання $\overline{B}$ є компактною множиною. Візьмемо $y \in V$. Оскільки f_y має замкнений графік, $U \subseteq \overline{E_2}$, множина $\overline{B}$ компактна і $f_y(E_2) \subseteq B \subseteq \overline{B}$, то за лемою 1 $f_y(U) \subseteq \overline{B}$. Тому $f(U \times V) \subseteq \overline{B}$. Але $\overline{B} \subseteq B_{\frac{1}{2n_0}}[z_0]$, отже, $\omega_f(U \times V) \leq \frac{1}{n_0}$.

З умови $U \subseteq \overline{E_2}$ випливає, що існує точка $a \in U \cap E_2$, причому множина U є околом точки a. Оскільки $a \in E_1 = E_{m_0,n_0}$ і $V = V_{m_0}$, то $V \subseteq V(a)$ і $\varepsilon_a > \frac{1}{n_0}$. В такому разі $\omega_f(U \times V) \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon_a$. Але за побудовою для $\widetilde{U} = U \cap U(a)$

$$\omega_f(U \times V) \geq \omega_f(\widetilde{U} \times V) \geq \varepsilon_a,$$

адже $\widetilde{U}$ — це окіл точки a, V — відкрита непорожня множина і $\widetilde{U} \times V \subseteq U(a) \times V(a)$. Суперечність, яка вказує на те, що наше припущення не правильне. □

У вигляді наслідків одержуємо наступні два твердження.

Теорема 8. *Нехай X — топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f : X \times Y \to Z$ така, що f^x клікова для всіх x з деякої залишкової множини M в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді, існує залишкова в X множина A така, що $A \times Y \subseteq A^s(f)$.*

Теорема 9. *Нехай X — берів простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f : X \times Y \to Z$ така, що f^x клікова для всіх x з деякої залишкової множини в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді, функція f клікова.*

Доведення. З теореми 8 випливає, що існує залишкова в X множина A така, що функція f симетрично клікова відносно x (а отже, клікова) в кожній точці множини $A \times Y$. Оскільки простір X берів, то множина A скрізь щільна в X, а, тому, множина $A \times Y$ скрізь щільна в $X \times Y$. Множина точок кліковості функції є замкненою ([15]). Тоді, функція f клікова в кожній точці з $X \times Y$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Kostyrko P. *A note on the functions with closed graphs*, Čas. Pést. Mat., **94** (1969), № 2, 202–205.
2. Baggs I. *Functions with a closed graph*, Proc. Am. Math. Soc., **43** (1974), 439–442.
3. Alas O.T. *A note on functions with a closed graph*, Port. Math., **42** (1983), 351–354.
4. Berner A.J. *Almost continuous functions with closed graphs*, Can. Math. Bull., **25** (1982), 428–434.
5. Doboś J. *On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs*, Čas. Pést. Mat., **110** (1985), 60–68.
6. Grande Z. *On functions of two variables whose vertical sections have closed graphs*, Real Anal. Exch., **27** (2002), 661–668.
7. Marcus S. *Sur les fonctions quasicontinues an sens de S. Kempisty*, Col-loq. Math., **8** (1961), 47–53.
8. Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Joint continuity and quasicontinuity of horizontally quasicontinuous mappings*, Ukr. Math. J., **52** (2000), № 12, 1711–1714.
9. Maslyuchenko V.K., Mykhajlyuk V.V., Nesterenko, V.V. *Symmetrical quasicontinuity of joint quasicontinuous functions*, Mat. Stud. **11** (1999), № 2, 204–208. (in Ukrainian)
10. Thielman H.P. *Types of functions*, Amer. Math. Monthly., **60**, (1953), 156–161.
11. Nesterenko V.V. *Sufficient conditions for the existence of points of symmetrically quasi-continuity and of symmetrically cliquishness of functions of two variables*, Carpat. Math. Publ., **3** (2011), № 2, 114–119. (in Ukrainian)
12. Fuller R.V. *Relations among continuous and various non-continuous functions*, Pac. J. Math., **25** (1968), 495–509.
13. Maslyuchenko V.K. *On separate and joint modifications of continuity*, Mat. Stud. **25** (2006), № 2, 213–218. (in Ukrainian)
14. Calbrix J., Troallic J.P. *Applications séparément continues*, C.R. Acad. Sc. Paris. Sér. A., **288** (1979), 647–648.
15. Lipiński J.S., Šalát T. *On the points of quasicontinuity and cliquishness of functions*, Czech. Math. J., **21** (1971), № 3, 484–489.
16. Dugundji J. Topology, Boston. – Mass: Allyn and Bacon, (1996), 447 p.
17. Engelking R. General topology, Mir, Moskva, (1986), 752 p.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 12.11.2014
Після переробки 15.03.2015