УДК 517.54+517.57

М. Я. Кравець

ДО ПРОБЛЕМИ ОПИСУ АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ПОРЯДКІВ

M. Ya. Kravets. *To problem of description of analytic functions in the unit disk with prescribed orders*, Mat. Stud. **45** (2016), 27–33.

In two particular cases it is proved I. E. Chyzhykov's conjecture on the representation of analytic functions in the unit disk with prescribed values of orders.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Позначимо через $A(\mathbb{D})$ та $H(\mathbb{D})$ класи аналітичних та гармонійних функцій в $\mathbb{D}$ відповідно.

Для аналітичної функції $f \in A(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$, і $p \geq 1$ визначимо

$$m_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}},\ 0<r<1,\quad \rho_p[f] = \varlimsup_{r\nearrow 1}\frac{\log m_p(r,f)}{-\log(1-r)}.$$

Порядок $\rho_\infty[f]$ функції f визначимо рівністю

$$\rho_\infty[f] = \lim_{p\to+\infty}\rho_p[f].$$

Розглянемо канонічний добуток Джрбашяна-Нафталевича-Цудзі вигляду

$$\mathcal{P}(z,(a_n),q) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n z}, q\right), \tag{1}$$

де $E(w,0) = 1-w$, $E(w,q) = (1-w)\exp\{w + w^2/2 + \cdots + w^q/q\}, q \in \mathbb{N}$ — первинний множник Вейєрштрасса, (a_n) — послідовність в $\mathbb{D}$. Цей добуток є аналітичною функцією з послідовністю нулів (a_n), якщо

$$\sum_{a_n}(1-|a_n|)^{q+1} < \infty.$$

Для того щоб сформулювати результат, нам потрібні деякі відомості з інтегрування дробового порядку ([7], гл. IX; [5], гл. XII.8). Для $f \in L(a,b)$ (інтегрованої за Лебегом на (a,b)) дробовий інтеграл Рімана-Ліувілля F_α порядку $\alpha > 0$ визначається за

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D99, 30E15.
Keywords: Riemann-Liouville fractional integral operator; analytic function in the unit disc; order of growth; harmonic function.
doi:10.15330/ms.45.1.27-33

формулою ([7])

$$F_\alpha(r) = D^{-\alpha} f(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-x)^{\alpha-1} f(x)dx, \quad r \in (a,b),$$
$$D^0 f(r) \equiv f(r), \quad D^\alpha f(r) = \frac{d^p}{dr^p}(D^{-(p-\alpha)} f(r)), \quad \alpha \in (p-1,p],\ p \in \mathbb{Z},$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція. Функція F_α неперервна при $\alpha \ge 1$ і збігається з первісними відповідного порядку при $\alpha \in \mathbb{N}$ ([7], гл.IX; [5], гл.XII.8).

Для $u \in H(\mathbb{D})$ означимо максимум модуля

$$M_\infty(r,u) = \max\{|u(z)|\colon |z| = r\},\ 0 < r < 1.$$

Якщо u субгармонійна в $\mathbb{D}$, то означимо характеристику Неванлінни $T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi$, де $x^+ = \max\{x, 0\}$, $0 < r < 1$. Введемо порядки

$$\rho_\infty[u] = \limsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ M_\infty(r,u)}{-\ln(1-r)}, \quad \rho_T[u] = \limsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ T(r,u)}{-\ln(1-r)}.$$

У випадку $u = \ln|f|$, де $f \in H(\mathbb{D})$, писатимемо $T(r,f) = T(r, \ln|f|)$ та $\rho_T[f] = \rho_T[\ln|f|]$. Використовуватимемо такі позначення для узагальнених ядер Коші, Шварца та Пуассона ([7], гл.IX)

$$C_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} z^k, \quad \alpha > -1,$$
$$S_\alpha(z) = 2C_\alpha(z) - C_\alpha(0), \quad P_\alpha(r,\varphi) = \mathrm{Re}\{2C_\alpha(re^{i\varphi}) - C_\alpha(0)\}.$$

Зазначимо, що ([7], гл. IX) $P_0(r,\varphi) = r^{-\alpha} D^{-\alpha}(P_\alpha(r,\varphi))$, $P_\alpha(r,\varphi) = D^\alpha(r^\alpha P_0(r,\varphi))$, де оператор D діє за змінною r.

Нехай $\mathcal{U}_\alpha$ — підклас функцій u з $H(\mathbb{D})$ таких, що

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |u_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi < +\infty, \quad u_\alpha(re^{i\varphi}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} u(re^{i\varphi}),$$

і $\tilde{\mathcal{U}}_\sigma^\rho$ — підклас функцій u з $H(\mathbb{D})$ таких, що $\rho_T[u] = \sigma$, $\rho_\infty[u] = \rho$ для заданих $0 \le \sigma \le \rho \le \sigma + 1 < +\infty$.

Нехай $\psi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Через BV і AC позначимо класи функцій обмеженої зміни та абсолютно неперервних на $[0, 2\pi]$ відповідно. Якщо $\psi_{-\beta} \in \mathrm{AC}$, $\beta > 0$, писатимемо $\psi \in \mathrm{AC}^\beta$. Аналогічно $\psi \in \mathrm{BV}^\beta$, якщо $\psi_{-\beta} \in \mathrm{BV}$. Нехай

$$\omega(\delta, \psi) = \sup\{|\psi(x) - \psi(y)|\colon x, y \in [0, 2\pi], |x-y| < \delta\}$$

— модуль неперервності функції ψ. Нехай $\gamma \in (0,1]\colon \Lambda_\gamma = \{\psi\colon \omega(\delta,\psi) = O(\delta^\gamma)\ (\delta \downarrow 0)\}$. Позначимо

$$\tau[\psi] = \sup\{\gamma \ge 0\colon \psi \in \Lambda_\gamma\},$$
$$\gamma[\psi] = \sup\{\tau \ge 0\colon \psi \in \mathrm{AC}^\tau[0, 2\pi]\} = \sup\{\tau \ge 0\colon \psi \in \mathrm{BV}^\tau[0, 2\pi]\}.$$

Розглянемо функцію f, що зображається у вигляді

$$f(z) = K_q z^\lambda \mathcal{P}(z,(a_n),q)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_q(ze^{-i\theta})d\psi^*(\theta)\right\}, \tag{2}$$

де $\mathcal{P}(z,(a_n),q)$ має вигляд (1), $\psi^* \in \mathrm{BV}$, (a_n) — послідовність нулів $f(z)$ така, що $\sum_n (1-|a_n|)^{q+1} < +\infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, $K_q \in \mathbb{C}$. Нехай M — борелева підмножина $\overline{\mathbb{D}}$ така, що $M\cap\partial\mathbb{D}$ вимірна щодо лебегової міри на колі $\partial\mathbb{D}$. Повна міра λ_f роду q в сенсі Гришина визначається співвідношенням ([2, 6])

$$\lambda_f(M) = \int_{\mathbb{D}\cap M}(1-|\zeta|)^{q+1}d\mu_f(\zeta) + \psi(M\cap\partial\mathbb{D}),$$

де μ_f — міра Рісса $\ln|f|$, тобто $\mu_f(\zeta) = \sum_n \delta(\zeta - a_n)$, $\delta(\zeta)$ — одинична маса, зосереджена в точці ζ, ψ — міра Стільтьєса, породжена ψ^*. Міра $\lambda = \lambda_f$ має властивості такі ж, як і повна міра Гришина, зокрема $d\lambda|_{\mathbb{D}}(\zeta) = (1-|\zeta|)^{q+1}d\mu_f(\zeta) \equiv d\mu_*(\zeta)$.

Для міри μ зосередженої на $\overline{\mathbb{D}}$ і точки $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ означимо через $\hat\mu_\zeta$ звуження μ на множину $\mathcal{S}(\zeta,7)\cup\partial\mathbb{D}$, де

$$\mathcal{S}(\zeta,\sigma) = \{z\in\mathbb{D}\colon |1-z\bar\zeta| \le \sigma(1-|z|)\},\quad \sigma\ge 1$$

— кут Штольца з вершиною ζ. Означимо асимптотичний модуль неперервності $\omega(\delta,\hat\mu) = \sup_{\zeta\in\partial\mathbb{D}} |\hat\mu_\zeta|(\overline{D(\zeta,\delta)}\cap\overline{\mathbb{D}})$. Писатимемо $\hat\mu\in\Lambda_\gamma$, якщо $\omega(\delta,\hat\mu) = O(\delta^\gamma)(\delta\downarrow 0)$. Нехай також

$$\tau[\hat\mu] = \sup\{\tau\ge 0\colon \omega(\cdot,\hat\mu)\in\Lambda_\tau\}.$$

Позначимо

$$\gamma[\mu_*] = \sup\{\tau\ge 0\colon \mu^*\in \mathrm{BV}^\tau(\mathbb{D})\} = \sup\left\{\tau\colon \int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|)^{q+1-\tau}|d\mu(\zeta)| < +\infty\right\},$$
$$\gamma[\lambda] = \sup\{\tau\ge 0\colon \lambda\in \mathrm{BV}^\tau[\overline{\mathbb{D}}]\} = \min\{\gamma[\psi^*],\gamma[\mu_*]\}.$$

Для міри Стільтьєса ψ і міри μ_*, асоційованих з аналітичною функцією вигляду (2) (в сенсі міри асоційовані з субгармонійною функцією $\ln|f|$) означимо

$$\Delta(\psi) = \gamma[\psi^*] + \tau[\psi^{\gamma[\psi]}],\quad \Delta(\mu_*) = \gamma[\mu_*] + \tau[\hat\mu_*^{\gamma[\mu_*]}],\quad \Delta(\lambda_f) = \min\{\Delta(\psi),\Delta(\mu_*)\}.$$

Наступну гіпотезу вперше сформулював І. Е. Чижиков в [1].

Гіпотеза. Нехай $f\in A(\mathbb{D})$, і $0\le\sigma\le\rho\le\sigma+1<+\infty$. Для того, щоб $\rho_T[f]=\sigma$, $\rho_\infty[f]=\rho$ необхідно і досить, щоб f зображалась у вигляді (2) з $q=[\sigma]+1$, і повна міра λ_f роду q мала властивості $\sigma = (q-\gamma[\lambda_f])^+$, $\rho = q+1-\Delta(\lambda_f)$.

Зазначимо, що твердження подібне до гіпотези із заміною $\rho_\infty[f]$ на порядок $\rho_M[f]$, де

$$\rho_M[f] = \varlimsup_{r\uparrow 1}\frac{\ln^+\ln^+ M(r,f)}{-\ln(1-r)},\quad M(r,f) = \max\{|f(z)|\colon |z|=r\},$$

доведено в [1] за обмеження $\rho=\rho_M[f]>1$.

У статті ми доводимо гіпотезу у двох часткових випадках: коли f — канонічний добуток $\mathcal{P}(z,(a_k),q)$, і коли функція f має вигляд $f(z) = \exp\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_q(ze^{-i\theta})d\psi^*(\theta)\}$.

2. Допоміжні твердження. Вплив інтегрування та диференціювання на модуль неперервності описує теорема A.

Теорема A. *1. Нехай $0 \le \alpha < 1$, $\beta > 0$, $f \in \Lambda_\alpha$. Тоді:*

а) $f_\beta \in \Lambda_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta < 1$;

б) $f_\beta \in \Lambda_1$ при $\alpha + \beta > 1$.

2. Нехай $0 < \gamma < \alpha \le 1$. Тоді $f_{-\gamma} \in \Lambda_{\alpha-\gamma}$ при $f \in \Lambda_\alpha$.

Пункти 2, 1a) випливають з теорем (8.13), (8.14) [5, гл. XII, теорема 2], пункт 1б) доведено в [9].

З теорії, побудованої М. М. Джрбашяном ([7, гл. IX]), можна отримати наступне твердження, не сформульоване ним у явному вигляді.

Твердження A. *Нехай $u \in H(\mathbb{D})$. Тоді $\rho_T[u] = \inf\{\alpha \ge 0\colon u \in \mathcal{U}_\alpha\}$.*

Теорема B. ([8]) *Нехай $f \in A(\mathbb{D})$, $p = \infty$ та виконується умова $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha > \gamma - 1$, або $\alpha = 0$, $\gamma = 1$. Для того, щоб f зображалась у вигляді,*

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(re^{i(\varphi-t)})d\psi(t) + i\mathrm{Im}f(0) \tag{3}$$

де $\psi \in BV \cap \Lambda_\gamma$, необхідно і досить, щоб виконувалось

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |u_\alpha(re^{i\varphi})|d\varphi = M_\alpha < +\infty, \quad u_\alpha = \mathrm{Re}f_\alpha, \tag{4}$$
$$M_\infty(r, f) = O((1-r)^{\gamma-\alpha-1}), \quad r \uparrow 1.$$

Для гармонічних функцій є подібні теореми ([4]), які є узагальненнями результатів Г. Харді і Дж. Літтлвуда та М. Джрбашяна і описують зростання інтегралів Пуассона і Пуассона-Стільтьєса.

Лема A. ([9]) *Нехай $\alpha > 0$, $\beta > -\alpha$, $\psi \in \mathrm{AC}$ (при $\beta < 0$ нехай ще $\psi \in \mathrm{AC}^{-\beta}$), $u(z)$ має вигляд*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\alpha(r, \varphi - t)d\psi(t). \tag{5}$$

Тоді

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta}(r, \varphi - t)\, d\psi_\beta^*(t) + D_1' E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}), \tag{6}$$

де

$$E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi(t), & \chi(t) = \psi_\beta^*(t) + \tilde{\chi}(t), \tau[\tilde{\chi}] = 1, \alpha + \beta > 1, \\ \int_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\psi_\beta^*(t) + e_{\alpha\beta}(z), & 0 < \alpha + \beta < 1, \end{cases}$$

$e_{\alpha\beta}(z)$ — обмежена в $\overline{\mathbb{D}}$ гармонійна функція, D_1' — стала залежна лише від α і β.

Теорема C встановлює, що за величину порядку $\rho_T[u]$, де u має вигляд (5) відповідають властивості ψ, пов'язані з абсолютною неперервністю.

Теорема C. ([9]) *Нехай u має вигляд (5), $\alpha \ge 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. Тоді*

1) $\rho_T[u] = (\alpha - \gamma_1)^+$, *де* $\gamma_1 = \sup\{\tau \geq 0\colon \psi \in \mathrm{AC}^\tau\}$;

2) $\rho_T[u] = (\alpha - \gamma_2)^+$, *де* $\gamma_2 = \sup\{\tau \geq 0\colon \psi \in \mathrm{BV}^\tau\}$.

Нехай $\Box(re^{i\varphi}) = \left\{\zeta\colon r \leq |\zeta| \leq \frac{1+r}{2}, |\arg\zeta - \varphi| \leq \pi(1-r)\right\}$, $\nu(re^{i\varphi})$ — кількість нулів функції $\mathcal{P}(z,(a_n),q)$ в $\Box(re^{i\varphi})$. Позначимо

$$\nu_1(\varphi) = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\log^+ \nu(re^{i\varphi}, P)}{-\ln(1-r)}, \quad \nu[\mathcal{P}] = \sup_{\varphi} \nu_1(\varphi).$$

Лема B. ([1])

1) Існує $r_0 \in (0,1)$ *таке, що* $\Box(re^{i\varphi}) \subset \mathcal{S}(e^{i\varphi}, 7)$, $r \in (r_0, 1)$.

2) Існує $j_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що при* $j \geq j_0$

$$\mathcal{S}(\zeta,7) \cap \{|\zeta| \geq 1 - 2^{-j}\} \subset \bigcup_{k=j}^{\infty} \bigcup_{m=-1}^{1} \Box((1-2^{-k})\zeta e^{im\pi 2^{-k+1}}).$$

Лема C. ([1]) *Нехай* $q \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq |a_n| < 1$, $\sum_n (1-|a_n|)^{q+1} < +\infty$. *Якщо* $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z;(a_n),q)$ *— канонічний добуток, то*

$$\nu[\mathcal{P}] = \rho_T[\mathcal{P}] + 1 - \tau[\hat{\mu}].$$

Теорема D. ([2]) *Нехай* $A = (a_k)$ *— послідовність в* $\mathbb{D}$ *така, що* $\nu = \nu[A] < \infty$ *і ціле* $s \geq [\nu] + 1$, $\mathcal{P}_s(z) = \mathcal{P}(z, A, s)$ *— канонічний добуток. Тоді* $\rho_\infty[\mathcal{P}_s] = \nu$.

3. Основні результати. Теорема 1 розв'язує таку **проблему:** *для заданих* $0 \leq \sigma \leq \rho \leq \sigma + 1 < +\infty$ *описати клас* $\tilde{\mathcal{U}}^\rho_\sigma$.

Теорема 1. *Нехай* $0 \leq \sigma \leq \rho \leq \sigma + 1 < +\infty$, $u \in H(\mathbb{D})$. *Для того, щоб* $u \in \tilde{\mathcal{U}}^\rho_\sigma$ *необхідно і досить, щоб для довільного* $\alpha > \sigma$ *функція* u *мала вигляд (5), де* ψ *визначається за функцією* u *і задовольняє умови* $\sigma = (\alpha - \gamma[\psi])^+$ *і* $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1 - \rho + \sigma$.

При цьому $\psi \in \bigcup_{\beta < \alpha - \sigma} \mathrm{BV}^\beta$.

Доведення. Достатність. Нехай $\alpha > \sigma$. За теоремою C $\rho[u] = (\alpha - \gamma[\psi])^+ = \sigma$.

Припустимо спочатку, що $\sigma < \rho$. Виберемо $\alpha \in (\sigma, \rho)$. Оскільки $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1 - \rho - \sigma$, то $\psi_{\sigma-\alpha} \in \Lambda_\delta$ при $\delta < 1 - \rho + \sigma$. За теоремою A (1a), $\psi \in \Lambda_\gamma$ при

$$\gamma = \delta + \alpha - \sigma < 1 - \rho + \alpha.$$

З іншої сторони $\psi \notin \Lambda_\gamma$ при $\gamma > 1 - \rho + \alpha$, бо в протилежному випадку за теоремою A мали б $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] > 1 - \rho + \sigma$. Отже, $\tau[\psi] = 1 - \rho + \alpha$. За теоремою B $\rho_\infty[u] = \rho$.

Нехай тепер $\sigma = \rho$. Досить довести, що $\rho_\infty[u] \leq \sigma$. Нехай α довільне більше за σ. Оскільки $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1$, за теоремою A (1б) маємо $\psi \in \Lambda_1$. Звідси за теоремою B $M_\infty(r,u) = O((1-r)^{-\alpha})$, тобто $\rho_\infty[u] \leq \alpha$.

Необхідність. Нехай $\rho_\infty[u] = \rho$, $\rho_T[u] = \sigma$, $\sigma \leq \rho \leq \sigma + 1$. За твердженням A для довільного $\alpha > \sigma$ функція u може бути зображена у вигляді (5), при цьому за теоремою C маємо $(\alpha - \gamma[\psi])^+ = \sigma$.

Припустимо спочатку, що $\sigma < \rho < \sigma + 1$. Нехай $\alpha \in (\sigma, \rho)$. З означення $\rho_\infty[u]$ випливає, що $M_\infty(r,u) = O((1-r)^{-\rho-\varepsilon})$, $r \uparrow 1$ для довільного $\varepsilon > 0$. Нехай $0 < \varepsilon <$

$1-\rho+\sigma$. За теоремою B маємо $\psi \in \Lambda_{\alpha+1-\rho-\varepsilon}$. Тоді $\psi_{\sigma-\alpha} \in \Lambda_{\sigma+1-\rho-\varepsilon}$. Крім того, $\psi_{\sigma-\alpha} \notin \Lambda_{\sigma+1-\rho+\varepsilon}$ для додатного $\varepsilon < \rho-\alpha$, бо в протилежному випадку $\psi \in \Lambda_{\alpha+1-\rho+\varepsilon}$ і за теоремою B мали б $M_\infty(r,u) = O((1-r)^{-\rho+\varepsilon})$, $r \uparrow 1$, але $M_\infty(r_n,u) \neq O((1-r_n)^{-\rho+\varepsilon})$ на деякій послідовності $r_n \uparrow 1$. Отже, $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1-\rho+\sigma$.

Нехай тепер $\alpha \geq \rho > \sigma$, u зображається у вигляді (5). За лемою A з маємо для $\beta \in (\sigma,\rho)$, $\chi \in \mathrm{BV}$

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_\beta(r,\varphi-t)\,d\psi^*_{\beta-\alpha}(t) + \int_0^{2\pi} P_{\beta-1}(r,\varphi-t)\,d\chi(t) \equiv I_8 + I_9. \tag{7}$$

Оскільки $M_\infty(r,I_9) = O((1-r)^{-\beta})$, $r \uparrow 1$, а $\rho_\infty[u] = \rho$, то $\rho_\infty[I_8] = \rho$.

За теоремою B,

$$\tau[\psi^*_{\beta-\alpha}] = \tau[\psi_{\beta-\alpha}] = \beta+1-\rho.$$

Звідси за теоремою A (2a) $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \sigma+1-\rho$.

Далі розглянемо випадок $\rho = \sigma+1$. Досить довести, що $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] < \varepsilon$ для довільного додатного ε. Припустимо, що це не так. Тоді існує $\varepsilon_0 \in (0, 2(\sigma+1-\alpha))$ таке, що $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \varepsilon_0$. Звідси $\psi_{\sigma-\alpha} \in \Lambda_{\varepsilon_0/2}$. При $\alpha < \rho = \sigma+1$ це дає $\psi \in \Lambda_{\varepsilon_0/2+\alpha-\sigma}$. Звідси

$$M_\infty(r,u) = O\left((1-r)^{\alpha+1-(\epsilon_0/2+\alpha-\sigma)}\right) = O\left((1-r)^{\sigma+1-\varepsilon_0/2}\right), \quad r \uparrow 1.$$

Отримали суперечність.

Нехай тепер $\rho = \sigma+1$ і $\alpha \geq \rho$. Міркуємо як і у випадку $\rho < \sigma+1$, $\alpha \geq \rho$. Для довільного $\beta \in (\sigma,\rho)$ маємо $\tau[\psi_{\beta-\alpha}] = \beta+1-\rho$, звідки $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \sigma+1-\rho$.

Нарешті, нехай $\rho = \sigma < \alpha$, $\varepsilon > 0$, $\beta = \sigma+\varepsilon < \alpha$. За лемою A знову маємо (5). Співвідношення $\rho_\infty[u] = \rho$, та $\rho_\infty[I_9] \leq \beta$ дають $\rho_\infty[I_8] \leq \rho+\varepsilon$. Отже, $M_\infty(r,I_8) = O((1-r)^{-\rho-2\varepsilon})$, $r \uparrow 1$. За теоремою B

$$\tau[\psi_{\beta-\alpha}] \geq \beta-1-\rho-2\varepsilon = 1-\varepsilon.$$

Звідси за теоремою A (2a) $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] \geq 1-2\varepsilon$. З довільності $\varepsilon > 0$ випливає $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \sigma+1-\rho$. □

Наслідок 1. *Нехай u має вигляд (5), $\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. Тоді*

$$\rho_T[u] = (\alpha-\gamma[\psi])^+, \quad \rho_\infty[u] = \rho_T[u] + 1 - \tau[\psi_{\rho_T[u]-\alpha}].$$

З теорем C і теореми 1 та того факту, що для аналітичної функції g без нулів $\ln|g(z)|$ — гармонічна функція, випливає така теорема.

Теорема 2. *Нехай $g(z) = \exp\{h(z)\}$, де*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(ze^{-it})\,d\psi(t) + i\mathrm{Im}h(0),$$

$\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. Тоді

$$\rho_T[g] = (\alpha-\gamma[\psi])^+, \quad \rho_\infty[g] = \rho_T[g] + 1 - \tau[\psi_{\rho_T[g]-\alpha}].$$

Теорема 3. *Нехай $q \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $\mathcal{P}(z)$ — канонічний добуток вигляду (1) і*

$$\sum_n (1 - |a_n|)^{q+1} < +\infty.$$

Тоді

1) $\rho_T[\mathcal{P}] = (q - \gamma[\mu_*])^+$;

2а) $\rho_\infty[\mathcal{P}] = \rho_M[\mathcal{P}] = \rho_T[\mathcal{P}] + 1 - \tau[\hat{\mu_*}^{q-\rho_T[P]}] = q - 1 - \gamma[\mu_*] - \tau[\hat{\mu_*}^{\gamma[\mu_*]}]$ *при* $\rho_M[\mathcal{P}] \geq 1$;

2б) $\rho_\infty[\mathcal{P}] = \rho_T[\mathcal{P}] + 1 - \tau[\hat{\mu_*}^{q-\rho_T[P]}] \leq 1$ *при* $\rho_\infty[\mathcal{P}] < 1$.

Доведення. Пункти 1 і 2а доведені в [1]. Пункт 2б випливає з леми А, В і теореми Д. □

ЛІТЕРАТУРА

1. I.E. Chyzhykov, *Growth of analytic functions in the unit disc and complete measure in the sense of Grishin*, Mat. Stud., **29** (2008), 35–44.
2. I.E. Chyzhykov, *Zero distribution and factorization of analytic functions of slow growth in the unit disc*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **141**, №4, (2013), 1297–1311.
3. I. Chyzhykov, M. Kravets, *On the minimum modulus of analytic functions of moderate growth in the unit disc*, Comput. Methods Funct. Theory, **16** (2016), №1, 53–64.
4. I.E. Chyzhykov, *Growth and representation of analytic and harmonic functions in the unit disc*, Ukr. Mat. Bull., **29**, №1, (2006), 31–44.
5. A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warsaw, 1935.
6. A. Grishin, Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions, Math. Physics, Analysis, Geometry, ILPTE, V.1, 1994, №2, 193–215.
7. M.M. Djrbashian, Integral transformations and representation of functions in a complex domain, M: Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)
8. I.E. Chyzhykov, Approximation of subharmonic functions by analytic ones and asymptotic properties of meromorphic functions in a disc: Doctor of sciences thesis, Lviv, 2008.
9. I.E. Chyzhykov, *On a complete description of the class of functions without zeros analytic in a disk and having given orders*, Ukrainian Math. J., **59** (2007), №7, 1088–1109.

Ivan Franko National University of Lviv
marjana_s@ukr.net

Надійшло 28.12.2015
Після переробки 24.04.2016