УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник

РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

V. K. Maslyuchenko, O. D. Myronyk. *Discontinuity points of separately continuous mappings with values in the Sorgenfrey line*, Mat. Stud. **45** (2016), 67–75.

We prove the following results. Let X and Y be topological spaces with Y first countable. If $f\colon X\times Y\to\mathbb{L}$ is a separately continuous mapping with values in the Sorgenfrey line $\mathbb{L}$ then for every $y\in Y$ the set $D_y(f)=\{x\in X\colon (x,y)$ is a discontinuity point of $f\}$ is meager in X. Conversely, for every meager F_σ-set A in $\mathbb{L}$ and for arbitrary point b of the rational line $\mathbb{Q}$ we construct the separately continuous mapping $f\colon\mathbb{L}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{L}$, such that the set of all discontinuity points is equal to $A\times\{b\}$.

1. Вступ. В останні роки з'явилося багато праць, в яких досліджується множина $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень $f\colon X\times Y\to Z$ зі значеннями в просторах, близьких до метризовних. Зокрема, ці питання розглядалися в дисертаціях [1, 2]. З іншого боку, вивчалися ([3, 4]) нарізно неперервні відображення зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$, топологічному просторі, який далекий своїми властивостями від класу метризовних просторів, бо хоча $\mathbb{L}$ — це спадково сепарабельний берівський і досконало нормальний простір з першою аксіомою зліченності, $\mathbb{L}$ має континуальну вагу, отже, не є метризовним, більше того $\mathbb{L}$ — це не σ-метризовний і не напіввичерпний простір, який також не має розвинення, отже, не є простором Мура. Зокрема, в [4] було поставлено питання про опис множини $D(f)$ у нарізно неперервних відображень $f\colon\mathbb{L}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{L}$, де $\mathbb{Q}$ — раціональна пряма, і з'ясовано, що для кожної підмножини B в $\mathbb{Q}$ і довільної точки $a\in\mathbb{L}$ існує така нарізно неперервна функція $f\colon\mathbb{L}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{L}$, що $D(f)=\{a\}\times B$.

В цій праці ми продовжуємо дослідження, розпочаті в [4]. По перше, ми доводимо загальну теорему, з якої випливає, що для кожної точки $y\in\mathbb{Q}$ множина $D_y(f)=\{x\in\mathbb{L}\colon (x,y)\in D(f)\}$ є першої категорії в $\mathbb{L}$. Далі розв'язуємо обернену задачу, будуючи для кожної F_σ-множини першої категорії A в $\mathbb{L}$ і довільної точки $b\in\mathbb{Q}$ таку нарізно неперервну функцію $f\colon\mathbb{L}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{L}$, що $D(f)=A\times\{b\}$.

2. Лема Бреккенріджа-Нішіури. Нагадаємо, що множина A в топологічному просторі X називається *ніде не щільною*, якщо вона не є щільною в жодній відкритій непорожній частині U простору X, тобто для U завжди існує така непорожня відкрита в X множина V, що $V\subseteq U$ і $V\cap A=\varnothing$. Ніде не щільність множини A в X рівносильна тому, що $\mathrm{int}\overline{A}=\varnothing$, тобто замикання $\overline{A}$ множини A не має внутрішніх точок. Кажуть, що A — це *множина першої категорії* в X, якщо $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, де множини A_n ніде не

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08.
Keywords: Sorgenfrey line; separately continuous mapping.
doi:10.15330/ms.45.1.67-75

щільні в X. Якщо $X \setminus B$ — це множина першої категорії в X, то множина B називається *залишковою* в X.

Добре відомо, що межа кожної відкритої чи замкненої множини є ніде не щільною. Звідси можна вивести наступний корисний факт ([5]), який ми називаємо лемою Бреккенріджа-Нішіури.

Лема 1. *Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених множин у топологічному просторі X, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ і $G_n = \mathrm{int} F_n$ для кожного n. Тоді відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ буде залишковою в X.*

3. Пряма теорема. В теорії нарізно неперервних відображень добре відомий такий результат, який випливає з теореми Калбрі-Троалліка ([6]): для топологічних просторів X, Y і Z, таких, що Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z метризовний, у кожного нарізно неперервного відображення $f\colon X \times Y \to Z$ для кожного $y \in Y$ множина $D_y(f) = \{x \in X\colon (x,y) \in D(f)\}$ є першої категорії в X. Тут ми доведемо, що аналогічне твердження має місце і для нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to \mathbb{L}$ зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ — це множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел, наділена топологічною структурою, для якої окіл точки $z \in \mathbb{L}$ — це множина $W \subseteq \mathbb{L}$, яка містить проміжок $[z, z+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$.

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $(x,y) \in X \times Y$ ми позначаємо як завжди $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Для топологічних просторів X, Y і Z символом $C(f)$ ми позначаємо множину всіх точок сукупної неперервності функції $f\colon X \times Y \to Z$.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності і $f\colon X \times Y \to \mathbb{L}$ — нарізно неперервне відображення. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $D_y(f) = \{x \in X\colon (x,y) \in D(f)\}$ є першої категорії в X.*

Доведення. Зафіксуємо точку $y_0 \in Y$ і покажемо, що множина $C_{y_0}(f) = \{x \in X\colon (x, y_0) \in C(f)\}$ залишкова в X, тобто, що множина $D_{y_0}(f) = X \setminus C_{y_0}(f)$ є першої категорії в X.

Для $\varepsilon > 0$ і довільної точки $z \in \mathbb{L}$ покладемо $W_\varepsilon[z] = [z, z+\varepsilon]$. Зауважимо, що $W_\varepsilon[z]$ — це замкнена підмножина в числовій прямій $\mathbb{R}$. Оскільки простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то існує така спадна послідовність околів V_n точки y_0 в Y, що система $\mathcal{V} = \{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — це база околів точки y_0 в Y.

Введемо в розгляд множини $F_n(\varepsilon) = \{x \in X\colon f^x(V_n) \subseteq W_\varepsilon[f^x(y_0)]\}$. Доведемо, що вони замкнені в X. Нехай $(x_s)_{s \in S}$ — це напрямленість, що складається з точок $x_s \in F_n(\varepsilon)$ і $x_s \to x$ в X. Зафіксуємо якесь $y \in V_n$. Тоді $f^{x_s}(y_0) \le f^{x_s}(y) \le f^{x_s}(y_0) + \varepsilon$ або інакше

$$f_{y_0}(x_s) \le f_y(x_s) \le f_{y_0}(x_s) + \varepsilon \tag{1}$$

для кожного $s \in S$. З неперервності функцій f_y і f_{y_0} випливає, що $f_y(x_s) \to f_y(x)$ і $f_{y_0}(x_s) \to f_{y_0}(x)$ в $\mathbb{L}$, а значить і в $\mathbb{R}$. Тому перейшовши в нерівності (1) до границі, ми отримаємо, що $f_{y_0}(x) \le f_y(x) \le f_{y_0}(x) + \varepsilon$, тобто $f^x(y_0) \le f^x(y) \le f^x(y_0) + \varepsilon$, а значить, $f^x(y) \in W_\varepsilon[f^x(y_0)]$. Тому $f^x(V_n) \subseteq W_\varepsilon[f^x(y_0)]$, тобто $x \in F_n(\varepsilon)$.

Крім того, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon) = X$. Справді, нехай $x \in X$. Функція $f^x\colon Y \to \mathbb{L}$ неперервна в точці y_0. Отже, існує такий окіл V точки y_0 в Y, що $f^x(V) \subseteq W_\varepsilon[f^x(y_0)]$. Оскільки $\mathcal{V}$ — це локальна база в точці y_0, то $V_n \subseteq V$ для деякого номера n. Тому

$f^x(V_n) \subseteq W_\varepsilon[f^x(y_0)]$, отже, $x \in F_n(\varepsilon)$. Покладемо $G_n(\varepsilon) = \mathrm{int}F_n(\varepsilon)$. За лемою 1 відкрита множина $G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^\infty G_n(\varepsilon)$ буде залишковою у просторі X. Розглянемо множину $E = \bigcap_{n=1}^\infty G(\frac{1}{m})$. Множина E буде залишковою в просторі X як перетин послідовності залишкових в X множин. Для доведення теореми досить показати, що $E \subseteq C_{y_0}(f)$.

Нехай $x_0 \in E$. Доведемо, що $p_0 = (x_0, y_0) \in C(f)$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Існує такий номер m, що $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Зрозуміло, що $x_0 \in G(\frac{1}{m})$. Тому існує такий номер n, що $x_0 \in G_n(\frac{1}{m})$. З неперервності функції $f_{y_0}\colon X \to \mathbb{L}$ у точці x_0 і відкритості множини $G_n(\frac{1}{m})$ в X випливає, що існує такий окіл U точки x_0 в X, що $U \subseteq G_n(\frac{1}{m})$ і

$$f_{y_0}(x_0) \le f_{y_0}(x) < f_{y_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

як тільки $x \in U$. Покладемо $V = V_n$. Ясно, що $U \times V$ — це окіл точки p_0 в добутку $X \times Y$. Нехай $p = (x, y) \in U \times V$. Тоді $x \in U$ і $y \in V$. В такому разі

$$f(x, y) = f^x(y) \in f^x(V) \subseteq W_{\frac{1}{m}}[f^x(y_0)],$$

бо $x \in U \subseteq G_n(\frac{1}{m}) \subseteq F_n(\frac{1}{m})$ і $V = V_n$. Отже,

$$f^x(y_0) \le f(x, y) \le f^x(y_0) + \frac{1}{m} < f^x(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Але з нерівності (2), яка виконується, бо $x \in U$, випливає, що

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) = f_{y_0}(x_0) \le f_{y_0}(x) = f^x(y_0) < f(x, y) < f^x(y_0) + \frac{\varepsilon}{2} = \\ = f_{y_0}(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f_{y_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = f(x_0, y_0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

отже, $f(p_0) \le f(p) < f(p_0) + \varepsilon$, що і дає нам неперервність функції f у точці p_0.

Таким чином, $E \subseteq C_{y_0}(f)$ і залишковість множини $C_{y_0}(f)$ випливає із залишковості множини E. □

4. Опис відкритих підмножин прямої Зорґенфрея. Тепер ми беремо курс на розв'язання оберненої задачі для нарізно неперервних відображень $f\colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$, де $\mathbb{L}$ — пряма Зорґенфрея, а $\mathbb{Q}$ — раціональна пряма. А саме для даної підмножини E добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$ ми будемо будувати нарізно неперервну функцію $f\colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$, у якої $D(f) = E$. Для цього нам буде потрібний результат про опис відкритих множин прямої Зорґенфрея, який ми дамо у цьому пункті.

Ми кажемо, що проміжок $I = (a, b)$ *прилягає* до проміжку $J = [c, d)$, якщо $b = c$. Так само проміжок $I = [a, b)$ *прилягає* до проміжку $J = [c, d)$, якщо $b = c$ або $a = d$.

Теорема 2. *Нехай G — відкрита підмножина прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Тоді існує така не більш, ніж зліченна, диз'юнктна система $\mathcal{I}$ непорожніх проміжків $I = (a, b)$ або $[a, b)$, кожний з яких не прилягає до іншого, що*

$$G = \bigsqcup \mathcal{I} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Якщо $\mathcal{I}$ та $\mathcal{J}$ — такі диз'юнктні системи непорожніх проміжків виду (a, b) чи $[a, b)$, кожний з яких не прилягає до іншого і $G = \bigsqcup \mathcal{I} = \bigsqcup \mathcal{J}$, то $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

Доведення. Існування. Вважатимемо, що $G \neq \varnothing$. Для кожної точки $x \in G$ визначимо систему проміжків $\mathcal{I}_x = \{[x, y)\colon x < y \text{ і } [x, y) \subseteq G\}$. Ясно, що $\mathcal{I}_x \neq \varnothing$, бо множина G відкрита в $\mathbb{L}$. Покладемо $Y_x = \{y \in \mathbb{L}\colon [x, y) \in \mathcal{I}_x\}$, так само $Y_x \neq \varnothing$. Тоді існує $v_x = \sup Y_x \in [x, +\infty]$. Зрозуміло, що $[x, v_x) \subseteq G$. Справді, нехай $u \in [x, v_x)$. Тоді $x \leq u < v_x$. Оскільки $y_x = \sup Y_x$ і $u < v_x$, то існує $y \in Y_x$, таке, що $u < y \leq v_x$. Оскільки $y \in Y_x$, то $[x, y) \subseteq G$. Але $u \in [x, y)$ отже, $u \in G$. Крім того, $v_x \notin G$. Справді, припустимо, що $v_x \in G$. Тоді існує таке $y \in \mathbb{L}$, що $v_x < y$ і $[v_x, y) \subseteq G$. Оскільки $[x, v_x) \subseteq G$, то і

$$[x, y) = [x, v_x) \cup [v_x, y) \subseteq G.$$

Таким чином, $y \in Y_x$. Але $y > v_x$, що суперечить тому, що $v_x = \sup Y_x$.

Далі для $x \in G$ розглянемо систему проміжків

$$\mathcal{U}_x = \{[u, v_x)\colon u \leq x \text{ і } [u, v_x) \subseteq G\}$$

і множину $U_x = \{u \in \mathbb{L}\colon [u, v_x) \in \mathcal{U}_x\}$. Ясно, що $x \in U_x$, отже, $U_x \neq \varnothing$ і $\mathcal{U}_x \neq \varnothing$. Оскільки $U_x \neq \varnothing$ і $x \in U_x$, то існує $u_x = \inf U_x \in [-\infty, x]$. Легко пояснити, що $(u_x, v_x) \subseteq G$. Покладемо $I(x) = (u_x, v_x)$, якщо $u_x \notin G$ і $I(x) = [u_x, v_x)$, якщо $u_x \in G$. Ясно, що і той, і другий випадок можливий, як показує приклад відкритих множин $G = (a, b)$ чи $G = [a, b)$. Зауважимо, що $x \in I(x)$, і, крім того, зрозуміло, що $I(x) \subseteq G$ для кожного $x \in G$.

Покажемо, що побудована нами система проміжків $\mathcal{I} = \{I(x)\colon x \in G\}$ є шуканою.

Спочатку доведемо, що для будь-якої точки $v \in I(x)$, де $x \in G$, обов'язково $I(v) = I(x)$. Припустимо, що $x \leq v$. Оскільки x і v належать до одного проміжку $I(x)$, то $[x, v] \subseteq I(x)$. Розглянемо множини

$$Y_x = \{y \in \mathbb{L}\colon y > x \text{ і } [x, y) \subseteq G\} \text{ та } Y_v = \{y \in \mathbb{L}\colon y > v \text{ і } [v, y) \subseteq G\}.$$

Якщо $y \in Y_v$, то $[x, y) = [x, v] \cup [v, y) \subseteq G$, отже, $y \in Y_x$. Тому $Y_v \subseteq Y_x$ і $\sup Y_v \leq \sup Y_x$. Навпаки, нехай $y \in Y_x$. Якщо $y \leq v$, то оскільки $Y_v \neq \varnothing$, то існує елемент $\widetilde{y} \in Y_v$ і для нього обов'язково $y < \widetilde{y}$. Якщо ж $y > v$, то $[v, y) \subseteq [x, y) \subseteq G$, отже, $y \in Y_v$. Так чи інакше завжди існує $\widetilde{y} \in Y_v$, такий, що $y \leq \widetilde{y}$. Оскільки $\widetilde{y} \leq \sup Y_v$, то і $y \leq \sup Y_v$, звідки випливає, що і $\sup Y_x \leq \sup Y_v$. Таким чином, $v_x = \sup Y_x = \sup Y_v$. Так само легко пояснюється, що і $u_x = \inf U_x = \inf U_v$. Тому і $I(x) = I(v)$, бо $I(x) = (u_x, v_x) = I(v)$, якщо $u_x \notin G$, і $I(x) = [u_x, v_x) = I(v)$, якщо $u_x \in G$.

Нехай $v < x$. Оскільки $v \in I(x)$, то $[v, x] \subseteq G$, отже, $x \in Y_v$, і тому $v < x < \sup Y_v$, а значить $x \in I(v)$. Тоді за доведеним вище $I(x) = I(v)$. Покажемо, що система $\mathcal{I}$ диз'юнктна. Нехай $I_1 = I(x_1)$ та $I_2 = I(x_2)$, де $\{x_1, x_2\} \subseteq G$, — це два проміжки з системи $\mathcal{I}$. Якщо $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$, то існує точка $x_0 \in I_1 \cap I_2$ і за доведеним $I_1 = I(x_0) = I_2$, отже, $I_1 = I_2$. Таким чином, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, якщо проміжки I_1 і I_2 різні.

Нехай $(a, b) \in \mathcal{I}$ і $[c, d) \in \mathcal{I}$. Якби $b = c$, то $(a, d) = (a, b) \cup [c, d) \subseteq G$, зокрема, $b = c \in G$, що суперечить побудові. Отже, (a, b) не прилягає до $[c, d)$.

Нехай $[a, b) \in \mathcal{I}$ і $[c, d) \in \mathcal{I}$. Якщо $b = c$, то $b \in G$, а якщо $d = a$, то $d \in G$, і те, і друге неможливе, тому і $[a, b)$ не прилягає до $[c, d)$.

Рівність $G = \bigsqcup \mathcal{I}$ очевидна, бо $x \in I(x) \subseteq G$для кожного $x \in G$.

Єдиність. Припустимо, що системи $\mathcal{I}$ та $\mathcal{J}$ такі як у формулюванні теореми. Доведемо, що $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. Нехай $I_0 \in \mathcal{I}$ і $I_0 = \langle a, b \rangle$. Покажемо, що $I_0 \in \mathcal{J}$. Утворимо систему

$$\widetilde{\mathcal{J}_0} = \{J \in \mathcal{J}\colon J \cap I_0 \neq \varnothing\} \text{ і } \mathcal{J}_0 = \{J \cap I_0\colon J \in \widetilde{\mathcal{J}_0}\}.$$

Елементи системи $\mathcal{J}_0$ — це проміжки типу (α,β) чи $[\alpha,\beta)$, причому $\bigcup\mathcal{J}_0 = I_0$. Справді, $\bigcup\mathcal{J}_0 \subseteq I_0$, оскільки кожний проміжок з $\mathcal{J}_0$ міститься в I_0. Навпаки, нехай $x \in I_0$. Тоді $x \in G = \bigcup\mathcal{J}$, отже, існує такий проміжок $J \in \mathcal{J}$, що $x \in J$. В такому разі $x \in J \cap I_0$, отже, $J \cap I_0 \neq \varnothing$ і $J \in \widetilde{\mathcal{J}}_0$, а $J \cap I_0 \in \mathcal{J}_0$, звідки отримуємо, що $x \in \bigcup\mathcal{J}_0$.

Зауважимо, що проміжки з системи $\mathcal{J}_0$ диз'юнктні і не прилягають один до одного. Доведемо, що тоді система $\mathcal{J}_0$ складається з одного проміжку. По-перше, система $\mathcal{J}_0$ непорожня, бо $I_0 \neq \varnothing$ і $I_0 = \bigcup\mathcal{J}_0$. Припустимо, що $\mathcal{J}_0$ містить принаймні два різних проміжки. Нехай це будуть проміжки $P_1 = \langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ і $P_2 = \langle\alpha_2,\beta_2\rangle$, причому $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Оскільки ці проміжки диз'юнктні, то $\beta_1 \leq \alpha_2$.

Зрозуміло, що $\beta_1 \in I_0$, адже $P_1 \subseteq I_0$ і $P_2 \subseteq I_0$, тому $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq b$ і $a < \beta_1 < b$. Тому існує такий проміжок $P_3 = \langle\alpha_3,\beta_3\rangle \in \mathcal{J}_0$, що $\beta_1 \in P_3$. Ясно, що P_3 або перетинає проміжок P_1, або прилягає до нього, що неможливо, бо в системі $\mathcal{J}_0$ таких проміжків нема. Таким чином, система $\mathcal{J}_0$ складається з одного елемента $P_0 = J_0 \cap I_0$, де $J_0 \in \mathcal{J}$. Оскільки $\bigcup\mathcal{J}_0 = I_0$, то $I_0 = P_0 \subseteq J_0$.

Для знайденого проміжку J_0 з системи $\mathcal{J}$ побудуємо системи

$$\mathcal{I}_0 = \{I \in \mathcal{I}\colon I \cap J_0 \neq \varnothing\} \text{ і } \mathcal{I}_0 = \{I \cap J_0\colon I \in \widetilde{\mathcal{I}}_0\}.$$

Зрозуміло, що $I_0 \in \mathcal{I}_0$, адже $\varnothing \neq I_0 \subseteq J_0$, а тому $I_0 = I_0 \bigcap J_0$ і $I_0 \in \widetilde{\mathcal{I}}_0$. Як і раніше, $J_0 = \bigcup\mathcal{I}_0$ і система $\mathcal{I}_0$ складається з одного елемента. Оскільки $I_0 \in \mathcal{I}_0$, то $\mathcal{I}_0 = \{I_0\}$ і $I_0 = \bigcup\mathcal{I}_0 = J_0$. Таким чином, $I_0 = J_0 \in \mathcal{J}$, що доводить включення $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.

Із тих самих причин справедливе і обернене включення $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, отже, $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, що і доводить єдиність.

Зауважимо, що будь-яка диз'юнктна система невироджених проміжків $\mathcal{I}$ на числовій прямій обов'язково не більш, ніж зліченна, адже в кожному з цих проміжків I можна вибрати по раціональному числу r_I і отримати ін'єкцію $I \mapsto r_I$ системи $\mathcal{I}$ в зліченну множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Таким чином, побудована в доведенні теореми системи проміжків не більш, ніж зліченна. □

5. Ніде не щільні розриви. Символом χ_A ми позначаємо характеристичну функцію множини A.

Теорема 3. *Нехай $b \in \mathbb{Q}$ і F — замкнена ніде не щільна підмножина прямої Зорґенфрея $\mathbb{L}$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f\colon \mathbb{L}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{L}$, така, що $D(f) = F \times \{b\}$.*

Доведення. Розглянемо відкриту в $\mathbb{L}$ множину $G = \mathbb{L} \setminus F$. За теоремою 2 існує така диз'юнктна не більш ніж зліченна система $\mathcal{I}$, що складається з проміжків $I = (a,b)$ або $I = [a,b)$, кожен з яких не прилягає до іншого, і $G = \bigsqcup\mathcal{I}$.

Для кожного проміжку $I \in \mathcal{I}$ у випадку $I = (a,b)$ виберемо двосторонню послідовність чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ таку, що $a < a_n < a_{n+1} < b$ для кожного n, $\lim_{n\to-\infty} a_n = a$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, а у випадку $I = [a,b)$ односторонню послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, таку, що $a_1 = a$, $a_n < a_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Ясно, що і в першому, і в другому випадках $I = \bigsqcup_n [a_n, a_{n+1})$. Систему проміжків $[a_n, a_{n+1})$, що пов'язана з проміжком I, позначимо $\mathcal{L}(I)$. Введемо у розгляд диз'юнктну систему $\mathcal{L} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}}\mathcal{L}(I)$ напіввідкритих справа проміжків, що виникають при таких розбиттях проміжків I з системи $\mathcal{I}$. Оскільки система $\mathcal{I}$ не більш ніж зліченна, то система $\mathcal{L}$ зліченна, отже, $\mathcal{L} = \{L_k\colon k \in \mathbb{N}\}$, причому $L_k \cap L_j = \varnothing$ при $k \neq j$.

Для числа $b \in \mathbb{Q}$ розглянемо послідовність ірраціональних чисел $b_k = b - \frac{\sqrt{2}}{k}$, яка, строго зростаючи, прямує до b. Для кожного номера k нехай $M_k = (b_k, b_{k+1}) \cap \mathbb{Q}$ і $P_k =$

$L_k \times M_k$. Розглянемо характеристичні функції $u_k = \chi_{P_k}$ прямокутників P_k в добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$. Як легко перевірити ([4]), функції $u_k \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ неперервні. Оскільки прямокутники P_k і P_j при $k \neq j$ не перетинаються, то формулою

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$$

визначається функція на добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, яка збігається з характеристичною функцією множини $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Покажемо, що функція $f \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ і буде шуканою.

Спочатку перевіримо, що функція f нарізно неперервна. Нехай $x \in \mathbb{L}$. Якщо $x \in F$, то $(\{x\} \times \mathbb{Q}) \cap E = \varnothing$, отже, $f^x(y) = 0$ для кожного $y \in \mathbb{Q}$, а значить, $f^x \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ — неперервна функція. Якщо $x \in G$, то існує єдиний номер k, такий, що $x \in L_k$. В такому разі $f^x = \chi_{M_k}$, а характеристична функція проміжку з ірраціональними кінцями неперервна, отже, і тут x-розріз $f^x \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ буде неперервним.

Нехай $y \in \mathbb{Q}$. Якщо $y < b_1$ або $y \geq b$, то, очевидно, функція $f_y \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервна, адже $f_y = 0$. Припустимо, що $b_1 < y < b$. Тоді існує єдиний номер k, такий, що $b_k < y < b_{k+1}$. В такому разі $f_y = \chi_{L_k}$, а характеристична функція напіввідкритого проміжку $[\alpha, \beta)$ є неперервною як функція з $\mathbb{L}$ в $\mathbb{L}$ (див. [4]), отже і тут y-розріз $f_y \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервний. Таким чином, функція $f \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ нарізно неперервна.

Розглянемо тепер точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{L} \times \mathbb{Q}$ і дослідимо, коли f буде розривною в точці p_0. По-перше, зауважимо, що на відкритій в добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$ множині $H = (\mathbb{L} \times \mathbb{Q}) \setminus (\mathbb{L} \times \{b\})$ функція f неперервна, адже її звуження на відкриті диз'юнктні частини $H_k = \mathbb{L} \times M_k$ при $k = 1, 2, ...$ і $H_0 = \mathbb{L} \times (\mathbb{Q} \setminus [b_1, b])$ множини H неперервні і $H = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} H_k$. Тому, коли $y_0 \neq b$, то $p_0 \in C(f)$.

Нехай $y_0 = b$ і $x_0 \in G$. Оскільки $G = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} L_k$, то існує єдиний номер k, такий, що $x_0 \in L_k$. Зрозуміло, що $p_0 \in W_k = L_k \times ((b_{k+1}, +\infty) \cap \mathbb{Q})$. При цьому W_k — це окіл точки p_0 в добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$ і $f(p) = 0$ на W_k. Це показує, що функція f буде неперервною в точці p_0.

Нехай $y_0 = b$ і $x_0 \in F$. Покажемо, що тоді $p_0 \in D(f)$. Оскільки множина F ніде не щільна в $\mathbb{L}$, то її доповнення G буде щільною множиною в просторі $\mathbb{L}$. Зауважимо, що за побудовою $f(p_0) = 0$. Розглянемо довільний базисний окіл $W = U \times V$, де $U = [x_0, x_0 + \delta)$ і $V = (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$, точки p_0 у добутку $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$. Оскільки $\overline{G} = \mathbb{L}$, то $G \cap U \neq \varnothing$. Тому існує такий проміжок $I \in \mathcal{I}$, що $I \cap U \neq \varnothing$.

Припустимо, що $I = (a, b)$ і $u \in I \cap U$. Тоді $a \geq x_0$, адже, у випадку $a < x_0$, ми б отримали, що $a < x_0 \leq u < b$, звідки $x_0 \in I \subseteq G$, що неможливо, бо $x_0 \in F = \mathbb{L} \setminus G$. Крім того, $a < u < x_0 + \delta$. Таким чином, $x_0 \leq a < x_0 + \delta$. Нехай $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — двостороння послідовність точок, що поставлена у відповідність інтервалу $I = (a, b)$. Тоді $\lim_{n \to -\infty} a_n = a$, отже, існує таке $N_0 \in \mathbb{Z}$, що $a_n < x_0 + \delta$ при $n \leq N_0$. Всі проміжки $[a_n, a_{n+1})$ при $n < N_0$ будуть міститися в проміжку U, адже для них $x_0 \leq a < a_n < a_{n+1} < x_0 + \delta$. Нескінченна система проміжків $\mathcal{L}_0 = \{[a_n, a_{n+1}) \colon n < N_0\}$ є частиною системи $\mathcal{L} = \{L_k \colon k \in \mathbb{N}\}$. Тому існує така строго зростаюча послідовність номерів k_j, що $\mathcal{L}_0 = \{L_{k_j} \colon j \in \mathbb{N}\}$. При цьому $b_{k_j} \to b$ при $j \to \infty$, отже, існує такий номер j, що $b - \delta < b_{k_j} < b_{k_j+1} < b$. В такому разі $M_{k_j} \subseteq V$ і $L_{k_j} \subseteq U$, отже, $P_{k_j} = L_{k_j} \times M_{k_j} \subseteq U \times V = W$. Оскільки $P_{k_j} \neq \varnothing$, то існує точка $p \in P_{k_j}$ і для неї $f(p) = u_{k_j}(p) = 1$. Таким чином, в околі W ми знайшли таку точку p, що $f(p) - f(p_0) = 1 - 0 = 1$.

Нехай тепер $I = [a, b)$. Як і раніше, легко пояснити, що $x_0 < a < x_0 + \delta$. Проміжок $U_0 = [x_0, a)$ теж буде околом точки x_0 в $\mathbb{L}$, причому $U_0 \subseteq U$. Оскільки $\overline{G} = \mathbb{L}$, то

$G \cap U_0 \neq \varnothing$, а значить, існує такий проміжок $J = (c, d)$ або $[c, d)$ з $\mathcal{I}$, що $J \cap U_0 \neq \varnothing$. Ясно, що $I \neq J$, адже існує точка $v \in J \cap U_0$, а для неї $v \in J$ і $v \notin I$, бо $v \in U_0$. Тому $I \cap J = \varnothing$, звідки випливає, що $d \leq a$. Таким чином, $x_0 \leq v < d \leq a < x_0 + \delta$, отже, $x_0 < d < x_0 + \delta$. Нехай (c_n) — це та одностороння чи двостороння послідовність точок, що була поставлена у відповідність проміжку J з $\mathcal{I}$ при визначенні системи $\mathcal{L}(J)$. Тоді $\lim_{n\to\infty} c_n = d$, отже, існує такий номер N_1, що $x_0 < c_n < c_{n+1} < d$ при $n \geq N_1$. Нескінченна система проміжків $\mathcal{L}_1 = \{[c_n, c_{n+1})\colon n \geq N_1\}$ є частиною системи $\mathcal{L} = \{L_k\colon k \in \mathbb{N}\}$. Тому існує така строго зростаюча послідовність номерів k'_j, що $\mathcal{L}_1 = \{L_{k'_j}\colon j \in \mathbb{N}\}$. Як і раніше, $b_{k_j} \to b$ і тому існує такий номер i, що $P_{k'_j} = L_{k'_j} \times M_{k'_j} \subseteq W$. Звідки знову отримуємо, що $f(p) - f(p_0) = 1$ для деякої точки $p \in W$.

Таким чином, для кожного базисного околу W точки p_0 у добутку $\mathbb{L}\times\mathbb{Q}$ ми знайшли таку точку $p \in W$, що $f(p) - f(p_0) = 1$. Це показує, що $p_0 \in D(f)$. □

6. Розриви першої категорії. Тут ми доведемо, що побудову з попереднього пункту можна модифікувати так, що твердження теореми 3 буде виконуватися і в тому випадку, коли замість замкненої ніде не щільної множини F фігурує F_σ-множина першої категорії.

Зауважимо, що звичний для дійснозначних функцій прийом згущення особливостей з допомогою ряду для $\mathbb{L}$-значних функцій не проходить, як показує наступний приклад.

Приклад 1. Нехай $u_n = \frac{1}{2^n}\chi_{[0,\frac{1}{n})}$ для кожного номера n. Тоді функції $u_n\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ неперервні, ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

збігається нормально, а значить, рівномірно на $\mathbb{L}$ (як ряд з дійснозначних функцій) і його сума $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ є розривною в точці 0 функцією.

Справді, $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Якщо ж, $x > 0$, то існує такий номер N, що $\frac{1}{N} \leq x$. Тоді $u_n(x) = 0$ при $n > N$, адже $x \notin [0, \frac{1}{n})$ при $n \geq N$. Тому

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N} < 1 = f(0).$$

Таким чином, в точці 0 функція f не має локального мінімуму, а значить, є розривною як функція зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$.

Цей приклад показує, що при використанні рядів для побудови $\mathbb{L}$ значних функцій треба проявляти певну обачність, щоб зберегти неперервність.

Основний результат подамо в уточненому формулюванні у порівнянні з формулюванням теореми 3. Зауважимо, що кожну F_σ-множину A першої категорії у довільному топологічному просторі X можна подати у вигляді $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n — замкнені ніде не щільні в X множини. Тому наступну теорему можна застосувати для кожної F_σ-множини першої категорії в $\mathbb{L}$.

Теорема 4. *Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених ніде не щільних множин F_n в $\mathbb{L}$, $G_n = \mathbb{L} \setminus F_n$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $b \in \mathbb{Q}$, $(b_m)_{m=1}^{\infty}$ — послідовність ірраціональних чисел b_n, яка, строго зростаючи, прямує в $\mathbb{R}$ до b, $(b_{m,j})_{j=1}^{\infty}$ — строго зростаючі послідовності ірраціональних чисел $b_{m,j}$, які прямують до b_{m+1} і для них $b_{m,1} = b_m$, $b_m < b_{m,j} < b_{m+1}$*

для кожного $j > 1$. Тоді для кожного n існує така диз'юнктна послідовність проміжків $L_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n,k+1})$, що $G_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} L_{n,k}$, при цьому характеристичні функції $\chi_{P_{n,k}} : \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ прямокутників $P_{n,k} = L_{n,k} \times M_{k,n}$, де $M_{k,n} = (b_{k,n}, b_{k,n+1}) \cap \mathbb{Q}$, неперервні як і функції $u_{n,k} = \frac{1}{2^n}\chi_{P_{n,k}}$, функції $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ нарізно неперервні і для них $D(u_n) = F_n \times \{b\}$ і функція $f = \sum_{k=1}^{\infty} u_n \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ теж нарізно неперервні і для неї $D(f) = A \times \{b\}$.

Доведення. Як в доведенні теореми 3 перевіряється, що функції u_n нарізно неперервні і для них $D(u_n) = F_n \times \{b\}$, при цьому проміжки M_k замінюються на проміжки $M_{k,n}$ і число 1 замінюється на $\frac{1}{2^n}$. Функція f визначена на $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, причому носії функцій u_n і u_m при $n \neq m$ не перетинаються, тому $f|_{\mathrm{supp} u_n} = u_n|_{\mathrm{supp} u_n}$ для кожного n.

Доведемо, що функція $f \colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ нарізно неперервна. Зафіксуємо спочатку $y \in \mathbb{Q}$ і доведемо неперервність функції $f_y \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$. Якщо $y < b_1$ або $y \geq b$, то $f_y = 0$ за побудовою, отже, неперервність f_y зрозуміла. Нехай $b_1 < y < b$. Тоді існують такі номери k і n, що $b_{k,n} < y < b_{k,n+1}$. За побудовою носії функцій u_m при $m \neq n$ не перетинаються зі смугою $\mathbb{L} \times M_{k,n}$, тому $f(p) = u_n(p)$ на $\mathbb{L} \times M_{k,n}$. Тоді $f_y = (u_n)_y$ і неперервність функції f_y випливає з неперервності функції $(u_n)_y$.

Нехай $x \in \mathbb{L}$. Покажемо, що функція $f^x \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ неперервна. Введемо у розгляд множину $N(x) = \{n \in \mathbb{N} \colon x \in G_n\}$. Оскільки $G_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} L_{n,k}$, то для кожного $n \in N(x)$ існує єдиний номер k_n, такий, що $x \in L_{n,k_n}$, а тоді $u_n^x = \frac{1}{2^n}\chi_{M_{k_n,n}}$ за побудовою функції u_n. Якщо ж $n \notin N(x)$, то $u_n^x = 0$. В такому разі

$$f^x = \sum_{k=1}^{\infty} u_n^x = \sum_{n \in N(x)} u_n^x = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}\chi_{M_{k_n,n}}.$$

Доповнення $\mathbb{Q} \setminus \{b\}$ є диз'юнктним об'єднанням відкритих в $\mathbb{Q}$ множин $M_{k,n}$, $V_1 = (-\infty, b_1) \cap \mathbb{Q}$ і $V_2 = (b, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. За побудовою $f^x|_{V_1} = 0$ і $f^x|_{V_2} = 0$. Далі $f|_{M_{k,n}} = \frac{1}{2^n}\chi_{M_{k_n,n}}$, якщо $k = k_n$, і $f|_{M_{k,n}} = 0$, якщо $k \neq k_n$. Тому звуження на всі розглянуті відкриті множини є неперервними. Звідси негайно випливає неперервність f^x у всіх точках, крім точки b.

Доведемо, що функція $f^x \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ неперервна і в точці b. Зауважимо, що за побудовою $f^x(b) = 0 \leq f^x(y)$ для кожного $y \in \mathbb{Q}$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер n_0, що $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ при $n > n_0$. Множина $K = \{k_n \colon n \in N(x) \text{ і } n \leq n_0\}$ скінченна і тому існує номер m, такий, що $k < m$ для кожного $k \in K$. Покладемо $\delta = b - b_m > 0$ і розглянемо $y \in \mathbb{Q}$, для якого $b - \delta < y < b$, тобто $b_m < y < b$. Нехай $N_1(x) = \{n \colon n \leq n_0 \text{ і } n \in N(x)\}$ і $N_2(x) = \{n \colon n > n_0 \text{ і } n \in N(x)\}$. Введемо функції

$$g = \sum_{n \in N_1(x)} \frac{1}{2^n}\chi_{M_{k_n,n}} \text{ і } h = \sum_{n \in N_2(x)} \frac{1}{2^n}\chi_{M_{k_n,n}}.$$

Ясно, що $f^x = g + h$. Якщо $n \in N_1(x)$, то $k_n < m$, отже, $M_{k_n,n} \cap (b_m, b) = \varnothing$ і $\chi_{M_{k_n,n}}(y) = 0$, а значить і $g(y) = 0$. Далі, оскільки множини $M_{k_n,n}$ диз'юнктні, то $h(y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. В такому разі, $f^x(b) = 0 \leq f^x(y) = g(y) + h(y) < \varepsilon$. Оскільки $f^x(y) = 0$ при $y \geq b$, то $0 \leq f^x(y) < \varepsilon$ при $|y - b| < \delta$, що і дає нам неперервність функції $f^x \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{L}$ у точці b.

Залишилось довести, що $D(f) = A \times \{b\}$. З'ясуємо спочатку, що $A \times \{b\} \subseteq D(f)$, тобто $F_n \times \{b\} \subseteq D(f)$ для кожного n. За побудовою з доведення теореми 3 для даної точки $p_0 = (x_0, b) \in F_n \times \{b\}$ існує послідовність точок $p_{n,m} \in \mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, така, що $u_n(p_{n,m}) = \frac{1}{2^n}$

для кожного m і $p_{n,m} \to p_0$ при $m \to \infty$. Оскільки $f(p_0) = u_n(p_0) = 0$ і $f(p) \geq u_n(p)$ для кожного $p \in \mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, то $f(p_{n,m}) \geq u_n(p_{n,m}) = \frac{1}{2^n} > 0 = f(p_0)$. Це показує, що $f(p_{n,m}) \nrightarrow f(p_0)$ при $m \to a$ в $\mathbb{L}$, отже, функція f розривна в точці p_0.

Нехай тепер $p_0 = (x_0, b) \notin A \times \{b\}$ і $x_0 \in \mathbb{L}$. Оскільки $f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(p)$, $0 \leq u_n(p) \leq \frac{1}{2^n}$ на $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, для кожного n і функції u_n неперервні в точці p_0 (як функції зі значеннями в $\mathbb{L}$, а значить, і в $\mathbb{R}$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(p)$ збігається рівномірно на $\mathbb{L} \times \mathbb{Q}$ і функція $f\colon \mathbb{L} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ неперервна в точці p_0. Але $0 = f(p) \leq f(p_0)$ для кожного $p \in \mathbb{L} \times \mathbb{Q}$, отже, в точці p_0 функція f має найменше значення. Тому f буде неперервною і як відображення зі значеннями в прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$.

Нарешті поза прямою $y = b$ функція f буде неперервною, бо на відкритих смугах $\mathbb{L} \times M_{k,n}$ вона збігається з неперервною функцією u_n, а на відкритих множинах $\mathbb{L} \times V_1$ і $\mathbb{L} \times V_2$ вона нульова. Таким чином, $D(f) = A \times \{b\}$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Filipchuk O.I. Separately continuous mappings and their analogues with values in non-metrizable spaces. – PhD thesis, 2010. (in Ukrainian)
2. Myronyk O.D. Stratifiable, semistratifiable spaces and separately continuous mappings. – PhD thesis, 2015. (in Ukrainian)
3. Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *The importance of the σ-metrizability in results on joint continuity of KC-functions*// Int. Conf. dedicate to the 125th anniversary of Hans Hahn. Book of Abstracts. – 2004. – P. 65–66. (in Ukrainian)
4. *Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. The Sorgenfrey line and separately continuous mappings*, Buk. Math. J. – 2014. – V.2, №1. – P. 59–68. (in Ukrainian)
5. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*// Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, №2. – P. 191–203.
6. Calbrix J., Troallic J.P. *Applications séparément continues*// C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – V.288. – P. 647–648.

Chernivtsi National University
vmaslyuchenko@ukr.net
myronyk.oks@gmail.com

Надійшло 22.01.2016
Після переробки 23.04.2016