**Висновки.** Варіаційно-градієнтні методи збігаються краще, ніж відомі градієнтні методи (зокрема, метод найскорішого спуску) і не потребують знання меж спектра оператора. Тому застосування їх до задач захисту інформації в інформаційно-комунікаційних системах і мережах є актуальним і перспективним.

### *Література*

1. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. — М., 1978.

2. *Герасименко В.А.* Основы защиты информации / В. А. Герасименко, А. А. Малюк. — М.: МИФИ, 1997. — 537 с.

3. *Лучка А.Ю.* Вариационно-градиентный метод / Лучка А.Ю., Нощенко О.Э., Тухалевская Н.И. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — 24. — № 7. — С. 963-971.

**УДК 517.9: 330.42**

**Неня О. І.**, к.ф.-м.н.,
доцент, кафедра вищої математики,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана

## ПРО РОЗВ'ЯЗОК ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ПІДПРИЄМСТВА

*АНОТАЦІЯ. У публікації досліджено проблему побудови динамічної моделі розвитку підприємства в умовах кредитування та короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво, а також побудови розв'язку функціонально-диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, несталим запізненням та імпульсною дією, яке описує дану модель.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна система, імпульсне диференціальне рівняння, нелінійне запізнення, фундаментальна функція, спряжене рівняння, асимптотична стійкість, тривіальний розв'язок.*

*АННОТАЦИЯ. В публикации исследуются проблемы построения динамической модели развития предприятия в условиях кредитирования и кратковременных внешних воздействий на производство, а также построения решения функционально-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами та импульсным воздействием, которое описывает данную модель.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая система, импульсное дифференциальное уравнение, нелинейное запаздывание, фундаментальная функция, сопряженное уравнение, асимптотическая устойчивость, тривиальное решение.*

*ANNOTATIO. In article we analyse the problems of the construction of a dynamic model of development of enterprise in the conditions of crediting and of external influences on the production, as well as the construction of the solution of functional-differential equation with variable coefficients and impulses that describes this model.*

*KEY WORDS: dynamical system, impulsive differential equetion, nonconstant delay, fundamental function, conjecture equetion, asymptotic stability, trivial solution.*

**Постановка задачі.** Динамічна модель розвитку підприємства в умовах кредитування та короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво описується рівнянням [10]

$$A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)R(g(t)) + I(t), \tag{1}$$

де $A(t)$ — вартість основних виробничих фондів, $a(t)$ — темп вибуття основних фондів, інвестування коштів відбувається за рахунок кредитних ресурсів $I(t)$, та деякої частини $c(t)$ чистого прибутку $R(g(t))$ який залежить від попередніх станів динамічної системи.

Якщо чистий прибуток $R(g(t))$ прямо пропорційно залежить від фондів $A(g(t))$ з коефіцієнтом пропорційності $q$, а вартість основних виробничих фондів $A(t)$ імпульсивно змінюється на величину $b_k$ в певні моменти часу, то рівняння (1) запишеться у вигляді імпульсного диференціального рівняння із запізненням

$$\begin{gathered} A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)qA(g(t)) + I(t), \quad t \neq t_k, \\ A(t_k + 0) = (1 + b_k)A(t_k) + \beta_k, \quad t = t_k. \end{gathered} \tag{2}$$

**Допоміжні результати.** Імпульсні диференціальні рівняння із запізненням в останні десятиліття притягують увагу багатьох дослідників завдяки їх широкому застосуванню у різних областях науки та техніки. За допомогою цих рівнянь можна описати процеси, які, з одного боку, залежать від того, що відбувалося в попередні моменти часу, а з іншого, зазнають короткострокових змін, тривалість яких є дуже незначною. Важливу роль у розвитку математичної теорії імпульсних рівнянь відіграла перша в світі монографія А. М. Самойленка та М. О. Перестюка [1], яка була перекладена англійською мовою [2]. Протягом останніх років з’явилась багато монографій і публікацій за темою імпульсних рівнянь [3–6], які продовжують дослідження в даній сфері.

Розглянемо функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією, аналогічне рівнянню (2):

$$\dot{x}(t) = c(t)x(g(t)) - a(t)x(t) + f(t), \quad t \neq t_k \tag{3}$$

$$x(t_k+0)=(1+b_k)x(t_k)+\beta_k, \quad t=t_k,$$

де $c(t)$, $a(t)$, $f(t)$, $g(t)$ — кусково-неперервні функції, $g(t) < t$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sup(t-g(t))<\infty$, $b_k \ge -1$, $\beta_k \in R$, послідовність точок імпульсної дії задовольняє умови $t_1 > t_0$, $t_k - t_{k-1} > 0$, $k \in Z^+$.

Під розв'язком рівняння (3) розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (3) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів.

Встановимо, який вигляд буде мати розв'язок рівняння (3).

Розглянемо таке неоднорідне диференціальне рівняння із запізненням

$$x'(t)=\int\limits_{-h(t)}^{0}\left[d_\theta \eta(t,\theta)\right]x(t+\theta)+f(t), \tag{4}$$

де $f(t)\in C_{[0,\infty)}$ і відповідне йому однорідне рівняння

$$x'(t)=\int\limits_{-h(t)}^{0}\left[d_\theta \eta(t,\theta)\right]x(t+\theta). \tag{5}$$

З теорії функціонально-диференціальних рівнянь відомо, що формально спряжене рівняння до (5) має вигляд

$$y(t)+\int\limits_{t}^{\infty} y(\alpha)\eta(\alpha,t-\alpha)d\alpha = const. \tag{6}$$

Подамо рівняння (4) і (5) у більш зручній формі і використаємо рівняння (3), щоб побудувати формально спряжене рівняння однорідного лінійного рівняння з імпульсною дією.

Відповідне однорідне рівняння рівнянню (3) буде

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=c(t)x(g(t))-a(t)x(t), \; t\ne t_k, \\ x(t_k+0)=(1+b_k)x(t_k), \; t=t_k.\end{gathered} \tag{7}$$

Якщо функцію $g(t)$ подати у вигляді $g(t) = t - h(t)$, тоді нормована функція $\eta(t,\theta)$ для формально спряженого рівняння буде матиме вигляд

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases} a(t)-c(t), \theta \le -h(t), \\ a(t), -h(t) < \theta < 0, \\ 0, \theta = 0, \end{cases}$$

а саме рівняння запишеться таким чином:

$$y(t)+\int\limits_{t}^{\psi(t)}a(s)y(s)ds+\int\limits_{\psi(t)}^{\infty}y(s)\big(a(s)-c(s)\big)ds=const,\ \ t\neq t_k,$$

$$y(t_k+0)=\frac{1}{1+b_k}y(t_k),\ \ t=t_k,$$

де $\psi\big(g(t)\big)\equiv t$.

Останнє рівняння легко перетворюється на таке диференціальне рівняння з імпульсною дією (див. [7–9])

$$\dot{y}(t)=a(t)y(t)-c\big(\psi(t)\big)y\big(\psi(t)\big)\psi'(t),\ \ t\neq t_k,\tag{8}$$

$$y(t_k+0)=\frac{1}{1+b_k}y(t_k),\ \ t=t_k,$$

де $\psi\big(g(t)\big)\equiv t$.

**Основні результати**

**Теорема 1.** Рівняння (8) є спряженим рівнянню (7).

*Доведення.* Нехай $x(t)$, $y(t)$ — довільні розв'язки рівнянь (3) і (8) відповідно. Тоді інтегруванням за частинами добутку $x'(t)y(t)$ на інтервалі $[t_0, t]$ отримаємо такий вираз

$$y(t)x(t)-y(t_0)x(t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}y'(s)x(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}y(s)c(s)x(g(s))ds-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}y(s)a(s)x(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}y(s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{n(t_0)\leq k<n(t)}\big[x(t_k+0)y(t_k+0)-x(t_k)y(t_k)\big]=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}y(s)a(s)x(s)ds-\int\limits_{t_0}^{t}x(s)y(\psi(s))c(\psi(s))\psi'(s)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}y(s)c(s)x(g(s))ds-\int\limits_{t_0}^{t}y(s)a(s)x(s)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}y(s)f(s)ds+\sum_{n(t_0)\leq k<n(t)}\beta_k y(t_k+0)=$$

$$= -\int_{t_0}^{t} x(s) y(\psi(s)) c(\psi(s)) \psi'(s) ds + \int_{t_0}^{t} y(s) c(s) x(g(s)) ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} y(s) f(s) ds + \sum_{n(t_0) \le k < n(t)} \beta_k y(t_k + 0), \tag{9}$$

де $n(t) = \min\{i \in N : t_i \ge t\}$.

З другим доданком останнього виразу проведемо такі перетворення

$$\int_{t_0}^{t} y(s) c(s) x(g(s)) ds = \begin{bmatrix} g(s) = \alpha, \\ s = \psi(\alpha), \\ ds = \psi'(\alpha) d\alpha \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{g(t_0)}^{g(t)} y(\psi(\alpha)) c(\psi(\alpha)) x(\alpha) \psi'(\alpha) d\alpha = \int_{g(t_0)}^{t_0} y(\psi(\alpha)) c(\psi(\alpha)) x(\alpha) \psi'(\alpha) d\alpha +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} y(\psi(\alpha)) c(\psi(\alpha)) x(\alpha) \psi'(\alpha) d\alpha - \int_{g(t)}^{t} y(\psi(\alpha)) c(\psi(\alpha)) x(\alpha) \psi'(\alpha) d\alpha$$

і підставимо його в (9). Тоді маємо:

$$y(t) x(t) - y(t_0) x(t_0) = \int_{g(t_0)}^{t_0} y(\psi(s)) c(\psi(s)) x(s) \psi'(s) ds -$$

$$- \int_{g(t)}^{t} y(\psi(s)) c(\psi(s)) x(s) \psi'(s) ds + \int_{t_0}^{t} y(s) f(s) ds + \sum_{n(t_0) \le k < n(t)} \beta_k y(t_k + 0). \tag{10}$$

Позначимо

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x(t) y(t) + \int_{g(t)}^{t} y(\psi(s)) c(\psi(s)) x(s) \psi'(s) ds, \tag{11}$$

тоді вираз (10) перепишеться у вигляді

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle x(t_0), y(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t} y(s) f(s) ds + \sum_{n(t_0) \le k < n(t)} \beta_k y(t_k + 0).$$

Якщо $x(t)$ розглядати як розв’язок рівняння (7), то $f(t) \equiv 0$, $\beta_k = 0$ і маємо таке:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle x(t_0), y(t_0)\rangle = const.$$

З цього можна зробити висновок, що рівняння (8) спряжене до рівняння (7) по відношенню до функції $\langle x(t), y(t)\rangle$ заданої в (11).

Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Аналогічно можна показати, що рівняння (7) є спряженим до (8).

**Означення 1.** Розв'язок рівняння (7) $X(t, s)$, який задовольняє умови $X(s, s) = 1$ та $X(t, s) = 0$ для $t > s$, називається фундаментальною функцією рівняння (7).

**Означення 2.** Розв'язок рівняння (8) $Y(t, s)$, який задовольняє умови $Y(s, s) = 1$ і $Y(t, s) = 0$ для $t > s$, називається фундаментальною функцією рівняння (8).

**Теорема 2.** Нехай $X(t, s)$ — фундаментальна функція рівняння (7). Якщо $x(t)$ розв'язок рівняння (3), тоді має місце формула

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{g(t_0)}^{t_0} X(t,\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} X(t,s)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k X(t,t_k+0). \tag{12}$$

*Доведення.* Замінемо $y(s)$ у виразі (10) на фундаментальну функцію $Y(s, t)$ і отримаємо

$$x(t)Y(t,t) - x(t_0)Y(t_0,t) = \int_{g(t_0)}^{t_0} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds -$$

$$-\int_{g(t)}^{t} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds + \int_{t_0}^{t} Y(s,t)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k Y(t_k+0,t),$$

звідси маємо

$$x(t) = x(t_0)Y(t_0,t) + \int_{g(t_0)}^{t_0} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} Y(s,t)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k Y(t_k+0,t). \tag{13}$$

З іншого боку, замінивши $x(t)$ на $X(t, t_0)$ у (13), отримуємо

$$X(t,t_0)=X(t_0,t_0)Y(t_0,t)+\int\limits_{g(t_0)}^{t_0}Y(\psi(s),t)c(\psi(s))X(s,t_0)\psi'(s)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}Y(s,t)f(s)ds+\sum_{n(t_0)\le k<n(t)}\beta_k Y(t_k+0,t),$$

звідки $X(t, t_0) = Y(t_0, t)$ оскільки $f(t)\equiv 0,\ \beta_k=0$ для всіх $k$.

Тому

$$x(t)=X(t,t_0)x(t_0)+\int\limits_{g(t_0)}^{t_0}X(t,\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}X(t,s)f(s)ds+\sum_{n(t_0)\le k<n(t)}\beta_k X(t,t_k+0)$$

Теорему доведено.

**Висновки.** У статті розглянуто динамічну модель розвитку підприємства в умовах кредитування та при дії короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво, побудовано функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією і змінним запізненням, яке описує дану модель. На основі фундаментальної функції $X(t, s)$ побудовано розв'язок імпульсного рівняння зі змінним запізненням.

Отримані результати будуть застосовані в подальших дослідженнях для встановлення умов асимптотичної стійкості тривіального розв'язку рівняння (7) на основі припущення про виконання умов Перона для рівняння (3).

## ***Література***


1. *Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К. : Вища школа, 1987. — 288 с.

2. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. — World Scientific, Singapore, 1995. — 462 p.

3. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. — Longman, Harlow, 1993. — 245 p.

4. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with Impulse Effect. — Ellis Horwood, Chichester, 1989. — 256 p.

5. *Gopalsamy K., Zhang B.G.* On delay differential equations with impulses // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — Vol. 139. — №1. — P. 110–122.

6. *Lakshmikantham V., Bainov D.D. Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapure: World Scientific, 1989. — 273 p.

7. *Беллман Р., Кук Л.Л.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, Л.Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 425 с.

9. *Akhmet M.U., Alzabut J., Zafer A.* Perron's theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay // Journal of Computational and Applied Mathematics — 2006. — 193. — P. 204–218.

10. *Егорова Н.Е.* Дифференциальный анализ развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс / Егорова Н.Е., Хачатрян С.Р., Маренный М.А. // Аудит и финансовый анализ. — 2000. — № 4 — С. 444-458.

**УДК 004.042**

**Ігнатова Ю. В.**, к.е.н., ст. викладач
кафедри економіко-математичного моделювання,
**Бєгун А. В.**, к.е.н., проф.,
професор кафедри інформаційного менеджменту,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОАКТИВНОГО ВИЗНАЧЕННЯ DDoS-атаки

*АНОТАЦІЯ. У статті запропоновано представити роботу інформаційного вузла, який атакується великою кількістю зовнішніх запитів, у вигляді стохастичної моделі масового обслуговування. Запропонована модель та визначені на її основі системні характеристики (ймовірність простою, ймовірність скоєння атаки, середні кількості легальних і нелегальних запитів) дозволяють кількісно оцінити рівень інформаційної безпеки досліджуваного об'єкта.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: інформаційна безпека, DDoS-атака, модель масового обслуговування, пуассонівський вхідний потік запитів.*

*АННОТАЦИЯ. В статье представлена работа информационного узла, атакуемого большим числом внешних запросов, в виде стохастической модели массового обслуживания. Предложенная модель и определенные на ее основе системные характеристики (вероятность простоя, вероятность совершения атаки, среднее число легальных и нелегальных запросов) позволяют количественно оценить уровень информационной безопасности исследуемого объекта.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: информационная безопасность, DDoS-атака, модель массового обслуживания, пуассоновский входной поток требований.*

*ABSTRACT. Article describes a system which is attacked by a large number of external requests. The proposed stochastic queuing model helps to identify basic system characteristics of the functioning node (the probability of committing the attacks, the average numbers of legal and illegal requests) and quantify the level of information security of the object.*