УДК 517.927

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОЛОКАЦІЙНИЙ ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОДИ РОЗВ′ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Розглядаються деякі класи лінійних інтегро-функціональних рівнянь та інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Наближені розв′язки таких рівнянь будуються за допомогою колокаційного та колокаційно-ітеративного методів.

Ключові слова: *інтегро-функціональні рівняння, рівняння з малою нелінійністю, обернений оператор, наближений розв'язок, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи.*

Вступ. При дослідженні різноманітних задач теоретичного і прикладного характеру широке застосування мають інтегральні та інтегро-функціональні рівняння [7]. Оскільки побудова точних розв'язків таких рівнянь можлива лише в окремих випадках, то великого значення набувають методи побудови наближених розв'язків цих рівнянь. Одним з ефективних методів є колокаційний метод та одне з його узагальнень, — колокаційно-ітеративний метод [1; 4; 6].

У цій статті розглядаються питання можливості застосування цих методів до деяких типів інтегро-функціональних рівнянь.

Основна частина. Розглянемо деякі класи інтегро-функціональних та інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю наближені розв′язки яких можна побудувати колокаційним та колокаційно-ітеративним методами.

1. Лінійні інтегро-функціональні рівняння

У просторі $L_2(a;b)$ — дійсних і вимірних на проміжку $(a;b)$ функцій, сумовних з квадратом, розглянемо інтегро-функціональне рівняння вигляду

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)\,dt, x\in(a;b) \qquad (1)$$

$$y(x)=0, x\notin(a;b),$$

де $f(x)$ — відома, а $y(x)$ — шукана функції з $L_2(a;b)$. Відносно функцій $h(x), p(x)$, $K(x;t)$ припускаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a;b]$ і в квадраті $[a;b]^2=[a;b]\times[a;b]$ задовольняють умови:

$$\left|p(x)\right| \le \overline{p} < \infty, \tag{2}$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a;b]$ і $h'(x) \ge l > 0, x - h(x) \le \sigma > 0,$ (3)

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x;t)\,dxdt = B^2 < \infty. \tag{4}$$

Покажемо, що рівняння (1) при виконанні умов (2)–(4) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [3; 5]. Поруч з інтегральним цілком неперервним оператором K, який має вигляд

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)v(t)\,dt, \forall v(x) \in L_2(a;b),$$

будемо розглядати оператор S такий, що

$$(Sv)(x) = \begin{cases} v(x), x \in \left[a, h^{-1}(a)\right], \\ v(x) - p(x)v(h(x)), x \in \left[h^{-1}(a), b\right], \end{cases} \tag{5}$$

де $v(x)$ — довільна функція з $L_2(a;b)$.

Зазначимо, що цей оператор, як і оператор K, діє з $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показати, що оператор S лінійний. Умови (2), (3) гарантують його обмеженість. Дійсно,

$$S = \sup \frac{(Sv)(x)}{v(x)} \le 1 + \left|\frac{p^2(x)}{h'(x)}\right|^{1/2} \le 1 + \frac{\overline{p}}{\sqrt{l}} < \infty,$$

де sup береться по $v(x) \in L_2(a;b), v(x) \ne 0$.

Ці ж умови говорять про те, що оператор S оборотний. Обернений до нього оператор має вигляд

$$\left(S^{-1}v\right)(x) = \begin{cases} v(x), x \in \left[a, h^{-1}(a)\right], \\ v(x) + \sum\limits_{i=1}^{S} v(h^i(x)\prod\limits_{k=0}^{i-1} p\left(h^k(x)\right), \end{cases} \tag{6}$$

$$x \in \Delta s, s = \overline{1, m}.$$

Тут, як і надалі,

$$\Delta s = \left[c_{s-1}, c_s\right], c_0 = a, c_s = h^{-1}\left(c_{s-1}\right), c_m = b, h^k(x) = h\left(h^{k-1}(x)\right), s = \overline{1, m}.$$

Іншими словами, вираз (6) — це розв'язок функціонального рівняння

$$y(x) - p(x)y\left(h(x)\right) = u(x), x \in [a;b],$$

$$y(x) = 0, x \notin [a;b],$$

(де $u(x)$ — відома, $y(x)$ — шукана функції) за допомогою методу кроків. Умова (3) гарантує той факт, що кількість кроків m скінченна і $m \le \dfrac{b-a}{\sigma}$.

Неважко переконатись в тому, що оператор S^{-1}, так як і оператор S, лінійний і обмежений. Таким чином, враховуючи вище сказане, ми можемо розглядати рівняння (1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ky)(x), \tag{7}$$

де $f(x)$ — задана, $y(x)$ — шукана функції з $L_2(a;b)$.

Нехай $(Sy)(x) = u(x)$, тоді $y(x) = (S^{-1}u)(x)$ і ми від рівняння (7) переходимо до рівняння

$$u(x) = f(x) + (Tu)(x). \tag{8}$$

Оператор $T = KS^{-1}$ Фредгольмів як суперпозиція Фредгольмового і лінійного обмеженого операторів $[2]$. Іншими словами, застосувавши згадану вище заміну, ми перетворюємо інтегро-функціональне рівняння (1) в інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)\,dt$$

з цілком неперервним інтегральним оператором T, ядро якого

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum\limits_{i=1}^{m-s} K\left(x;\left(h^{-1}\right)^k(t)\right), t \in \Delta s, \\ K(x;t), t \in (c_{m-1};b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a;b), \end{cases}$$

де $\left(h^{-1}\right)^k(t) = h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right)$.

2. Інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю

Розглянемо у просторі $L_2(a;b)$ інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$\begin{gathered} y(x) - p(x)y(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y(t)\,dt + \\ +\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y(t))\,dt, x \in (a;b); y(x) = 0, x \notin (a;b), \end{gathered} \tag{9}$$

де ε — малий додатний параметр, $f(x)$ — відома, а $y(x)$ — невідома функції з простору $L_2(a;b)$.

Припустимо, що:

1) $$\left|p(x)\right| \le \overline{p} < \infty; \tag{10}$$

2) ядра $K(x;t), G(x;t)$ визначені в квадраті $(a;b)^2$ і задовольняють умовам

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)\,dxdt = B^2 < \infty; \tag{11}$$

$$\int_a^b\int_a^b G^2(x;t)\,dxdt = G^2 < \infty; \tag{12}$$

3) функція $\Phi(t;y)$ в області $D = \{a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ вимірна за t при всіх y і неперервна за y при всіх t (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця:

$$\left|\Phi(t;y) - \Phi(t;\overline{y})\right| \le L\left|y - \overline{y}\right|, \tag{13}$$

де L — деяка додатна стала.

При дотриманні умов (9)–(11) інтегральні оператори

$$(Kv)(x) = \int_a^b K(x;t)\,v(t)\,dt,$$

$$(\Phi v)(x) = \varepsilon\int_a^b G(x;t)\,\Phi(t;v(t))\,dt,$$

відображають простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервними, а лінійний оператор S оборотний, причому обернений до нього оператор S^{-1} обмежений [2].

Обгрунтування наближених методів розв'язання рівняння (9) полягає в тому, що це рівняння шляхом заміни

$$u(x) = (Sy)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \left[a; h^{-1}(a)\right], \\ y(x) - p(x)\,y(h(x)), & x \in \left[h^{-1}(a); b\right], \end{cases} \tag{14}$$

зводиться до інтегрального рівняння з малою нелінійністю

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)\,u(t)\,dt + \varepsilon\int_a^b G(x;t)\,F(t;u(t))\,dt, x \in (a;b). \tag{15}$$

Слід відмітити, що $F(t;u(t)) = \Phi\left(t;\left(S^{-1}u\right)(t)\right)$.

3. Метод колокації розв'язування інтегро-функціонального рівняння

Ідея методу стосовно рівняння (9) полягає в тому, що наближений розв'язок $y_m(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_m(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j\varphi_j(x)$$

і визначаємо з функціонального рівняння

$$\begin{gathered} y_m(x)-p(x)y_m(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_m(t)dt, \\ y_m(x)=0, x\notin[a;b], \end{gathered} \tag{16}$$

$\{\varphi_j(x)\}$ — система лінійно незалежних на $[a;b]$ функцій, $j=\overline{1,m}$, а невідомі параметри $a_j=a_j(n)$ знаходимо з умови

$$\gamma_m(x_i)=0,\ x_i=a+i\frac{b-a}{n}, i=\overline{0,n}, \tag{17}$$

$$\gamma_m(x)=y_m(x)-p(x)y_m(h(x))-f(x)-\int_a^b K(x;t)y_m(t)dt. \tag{18}$$

Для знаходження параметрів a_j одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j=b_i, i=\overline{1,n}, \tag{19}$$

в якій β_{ij} обчислюється за формулою

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-T_j(x_i), b_i=f(x_i), i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Систему рівнянь (19) доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k=b_k$.

4. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю

Рівняння (9) при виконанні умов (10)–(12) можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Будемо розглядати оператори *S*, такі, що

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in\left[a;h^{-1}(a)\right], \\ v(x)-p(x)v(h(x)),\ x\in\left[h^{-1}(a);b\right], \end{cases}$$

$$(\Phi v)(x)=\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;v(t))dt,$$

де $v(x)$ — довільна функція з $L_2(a;b)$.

Зауважимо, що оператор *S*, як і оператор *K*, діє з $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Крім того, оператор *S* є лінійним, обмеженим та оборотним. Обернений до нього оператор S^{-1} має вигляд

$$\left(S^{-1}v\right)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in\left[a;h^{-1}(a)\right], \\ v(x)+\sum\limits_{i=1}^{S}v\left(h^{i}(x)\right)\prod\limits_{k=0}^{i-1}p\left(h^{k}(x)\right), x\in\Delta_s, s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{21}$$

$$\Delta_S=\left(c_{s-1},c_s\right), c_0=a, c_s=h^{-1}\left(c_{s-1}\right), c_m=b,$$

$$h^k(x)=h\left(h^{k-1}(x)\right), S=\overline{1,m}.$$

Слід відмітити, що (21) — це розв'язок функціонального рівняння

$$y(x)-p(x)y\left(h(x)\right)=u(x), x\in[a;b], y(x)=0, x\notin[a;b],$$

($u(x)$ — відома, $y(x)$ — шукана функції) при застосуванні покрочного методу, причому умова (10) гарантує що кількість кроків m скінчення і $m\le\dfrac{b-a}{\sigma}$.

Оператор S^{-1}, як і оператор S є лінійним і обмеженим. Тому можна розглядати (9), як операторне рівняння

$$(Sy)(x)=f(x)+(Ky)(x)+(\Phi y)(x), \tag{22}$$

де $f(x)$ — задана, $y(x)$ — шукана функції із $L_2(a;b)$.

Нехай $(Sy)(x)=u(x)$, тоді $y(x)=(S^{-1}u)(x)$ і можна від рівняння (22) прийти до рівняння

$$u(x)=f(x)+(Tu)(x)+\varepsilon(Fu)(x).$$

Оператор $T=KS^{-1}$ є Фредгольмовим як суперпозиція Фредгольмового та лінійного обмежного операторів. Тобто, ми від ітегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю (9) приходимо до інтегрального рівняння з малою нелінійністю вигляду (15) з цілком неперервним інтегральним оператором T, ядро якого

$$T(x;t)=\begin{cases} K(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{m-s}K\left[x;\left(h^{-1}\right)^{i}(t)\right]\prod\limits_{k=1}^{i}p\left[(h^{-1})^{k}(t)\right], t\in\Delta s, \\ K(x;t),\ t\in\left(c_{m-1};b\right), s=\overline{1,m-1}, x\in(a;b), \end{cases}$$

де $\left(h^{-1}\right)^{k}(t)=h^{-1}\left[\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right]$.

Застосуємо колокаційно-ітеративний метод до рівняння (9). Наближений розв'язок $y_k(x)$ визначаємо згідно формул

$$y_k(x)-p(x)y_k\left(h(x)\right)=$$
$$=f(x)+\int\limits_a^b K(x;t)z_k(t)dt+\varepsilon\int\limits_a^b G(x;t)\Phi\left(t;y_{k-1}(t)\right)dt, x\in[a;b], \tag{23}$$

$$y_k(x)=0, x\notin[a;b],$$
$$z_k(x)=y_{k-1}(x)+\omega_k(x), \qquad (24)$$
$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\eta_j(x),$$
$$\eta_j(x)=\left(S^{-1}\varphi_j\right)(x).$$

Невідомі параметри $a_j^k=a_j^k(n)$ знаходимо з умови $\gamma_k(x_i)=0$, де $x_i\in[a;b]$, $i=\overline{1,n}$ — вузли колокації та

$$\gamma_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)z_k(t)dt-y_k(x)+p(x)y_k(h(x))+$$
$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y_{k-1}(t))dt, x\in[a;b]. \qquad (25)$$

Ввівши позначення

$$\mathrm{E}_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt-y_{k-1}(x)+p(x)y_{k-1}(h(x))+$$
$$+\varepsilon\int_a^b G(x;t)\Phi(t;y_{k-1}(t))dt, x\in[a;b]$$

і підставляючи функцію $z_k(x)$, визначену формулою (24), в вираз (25) для знаходження параметрів a_j^k одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j^k=b_i^k, i=\overline{1,n}, \qquad (26)$$

в якій

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-K_j(x_i), b_i^k=\mathcal{E}_k(x_i),$$
$$K_j(x)=\int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt, j=\overline{1,n},$$
$$\eta_j(x)=\left(S^{-1}\varphi_j\right)(x),$$
$$b_i^k=\mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему рівнянь (26) можна записати у вигляді $\Lambda a_k=b_k$, де b_k, a_k — записані у векторному вигляді та Λ — матриця, складена з елементів β_{ij}.

Зауважимо, що в ролі наближення до шуканого розв’язку можна взяти, як функцію $y_k(x)$ так і функцію $z_k(x)$. Слід звернути увагу на той факт, що на основі аналізу формул (23)–(25) при $\omega_k\left(x\right)=0$, $k=1,2,3,\ldots$, наближення $y_k\left(x\right)$ знаходиться методом послідовних наближень.

Алгоритми (16)–(18) і (23)–(25) зводять розглянуту задачу до колокаційного та колокаційно-ітеративного методів розв'язання інтегрального рівняння з малою нелінійністю та з інтегральним оператором Фредгольма.

Висновки. У статті розглянуто наближені методи розв'язування інтегро-функціональних рівнянь. Побудовано і досліджено колокаційний та колокційно-ітеративний методи знаходження наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю.

Список використаних джерел:

1. Вайникко Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г. М. Вайникко // Диференц. уравнения. — 1965. — № 2. — С. 244–254.
2. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Алимов. — М. : Наука, 1948. — 752 с.
3. Криль С. А. Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом / С. А. Криль. — К., 1978. — 35 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.17).
4. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1980. — 264 с.
5. Лучка А. Ю. Построение приближенных решений линейных интегро-разностных уравнений / А. Ю. Лучка, С. А. Криль. — К., 1987. — 36 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.14).
6. Поселюжна В. Б. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В. Б. Поселюжна, Л. М. Семчишин. — Тернопіль : ТНЕУ, 2013. — 203 с.
7. Федорчук В. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання / В. А. Федорчук, В. А. Іванюк, Д. А. Верлань. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — 144с.

Considered one type of linear intnhro-functional equations and intnhro-functional equations with small nonlinearity. Approximate solutions of such equations built with the help collocation and collocational-iterative methods.

Key words: *integral-functional equations, equations with small nonlinearity, inverse operator, approximate solution, collocation and collocational-iterative methods.*

Отримано: 02.04.2015