ДО ПИТАННЯ ПРО НЕКОЛИВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ірина НОВАК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ 01601

Редакція отримала статтю 15 грудня 2010 р.

Для стохастичного рівняння Іто $\ddot{x} + (p(t) + q(t)\dot{w}(t))x = 0$ другого порядку встановлено умови, при яких всі його нетривіальні розв'язки є неколивними на півосі.

1 Вступ

Стохастичні диференціальні рівняння Іто другого порядку мають важливе значення з точки зору практичних застосувань і вивчалися, наприклад, в [4], [6], [8].

В даній роботі досліджується поведінка на півосі розв'язків лінійного стохастичного рівняння Іто другого порядка, зокрема, встановлено умови неколивності всіх нетривіальних його розв'язків. Для встановлення цих умов ми використовуємо метод асимптотичної відповідності, згідно з яким розв'язки стохастичної системи порівнюються з розв'язками спеціальним чином побудованої детермінованої системи.

Метод асимптотичної еквівалентності для дослідження поведінки звичайних диференціальних рівнянь почали вивчати давно. Перші результати з цього напрямку отримані Вітнером [11], Левінсоном [9] та

УДК 517.9, MSC 2000: 34C41, 35B40, 34F05, 80H10

Якубовичем [12]. Згодом з'явилася низка праць, в яких вивчалася асимптотична еквівалентність диференціальних систем різного вигляду [5], [10]. В працях [1], [2], [7] дані питання розглядалися для стохастичних систем. Однак, питання неколивності розв'язків лінійного стохастичного рівняння Іто другого порядку раніше не вивчалися.

Строге означення асимптотичної відповідності наступне.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = f(t, x)dt, \tag{1}$$

при $t \geq 0$, $x \in R^n$.

Поруч з системою (1) розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy = g(t, y)dt + \sigma(t, y)dw(t). \tag{2}$$

Будемо вважати, що всі розв'язки систем (1), (2) визначені при $t \geq 0$.

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) такий, що*

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0\} = 1,$$

то систему (1) будемо називається асимптотично відповідною до системи (2) з ймовірністю одиниця.

Дана стаття складається зі вступу, постановки задачі, допоміжних тверджень та основного результату (теорема про неколивність). У розділі допоміжні твердження сформульовано і доведено дві леми. В першій лемі дана оцінка другого моменту розв'язку стохастичного рівняння Іто другого порядку. У другій лемі встановлено умови, при яких звичайна та стохастичні диференціальні системи другого порядку спеціального виду є асимптотично відповідними з ймовірністю одиниця.

Основним результатом є отримання умов неколивності розв'язків лінійного стохастичного рівняння Іто другого порядку.

2 Постановка задачі

Розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння Іто другого порядку

$$\ddot{x} + (p(t) + q(t)\dot{w}(t))x = 0, \tag{3}$$

де $t \geq 0$, $x \in R$, $p(t)$, $q(t)$ – неперервні функції при $t \geq 0$; $w(t)$ – стандартний скалярний вінерівський процес, визначений для $t \geq 0$ на ймовірносному просторі $(\Omega, F, \mathbf{P})$; $\{F_t, t \geq 0\}$ – потік σ-алгебр, відносно якого узгоджений процес $w(t)$.

Рівняння (3) будемо розуміти, як систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_2 &= -p(t)x_1 dt - q(t)x_1 dw(t). \end{aligned} \tag{4}$$

В силу лінійності (4) і неперевності її коефіцієнтів за t, сильний розв'язок $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ існує і єдиний при $t \geq t_0$ з початковими даними $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, де $\overline{x}_0 - F_{t_0}$-вимірна випадкова величина з обмеженим другим моментом. В наших позначеннях $x(t) = x_1(t)$.

Означення 2. *Розв'язок $x(t)$ рівняння (3) назвемо нетривіальним при $t \geq 0$, якщо він перетворюється в нуль з нульовою ймовірністю.*

Визначимо випадкову величину τ_1 наступним чином:

$$\tau_1 = \inf\{t > t_0, x_1(t) = 0\}$$

якщо множина під знаком непорожня, інакше $\tau_1 = \infty$.

Означення 3. *Випадкову величину τ_1 назвемо першим нулем розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t > t_0$, якщо $\tau_1 < +\infty$ з ймовірністю одиниця.*

В силу лінійності системи (4) і умов на її коефіцієнти точка $(0; 0)$ недосяжна для процесу $(x_1(t), x_2(t))$. Отже, враховуючи гладкість компоненти $x_1(t)$, в деякому правому околі першого нуля τ_1 компонента $x_1(t)$ відмінна від нуля.

Тому можна визначити випадкову величину τ_2:

$$\tau_2 = \inf\{t > \tau_1, x_1(t) = 0\},$$

якщо множина під знаком inf непорожня, інакше $\tau_2 = +\infty$.

Дану випадкову величину будемо називати другим нулем розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t > t_0$, якщо $\tau_2 < +\infty$ з ймовірністю одиниця.

Далі за індукцією можна визначити послідовність нулів $\{\tau_n\}$ розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t > t_0$. При цьому два нулі τ_{n-1} та τ_n будемо називати послідовними нулями розв'язку $x(t)$ на інтервалі $t > t_0$.

Покладемо $t_0 = 0$ і будемо говорити про нулі на півосі $t \geq 0$.

Означення 4. *Нетривіальний розв'язок $x(t)$ рівняння (3) назвемо коливним на півосі $t > 0$, якщо він має нескінченну множину нулів. В противному разі розв'язок назвемо неколивним.*

3 Допоміжні твердження

Для дослідження задачі про неколивність розв'язків лінійного стохастичного рівняння Іто другого порядку, сформулюємо і доведемо лему про асимптотичну відповідність між стохастичною системою Іто спеціального вигляду другого порядку та детермінованою системою другого порядку. Шукана відповідність буде використана в подальшому для дослідження поведінки нулів.

Розглянемо стохастичну систему рівнянь Іто спеціального виду

$$dy = Aydt + Q(t)ydw(t) \tag{5}$$

та систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = Axdt, \tag{6}$$

де $t \geq 0$, $x, y \in R^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}$, $q(t)$– неперевна функція при $t \geq 0$.

Нехай $X(t, \tau)$ – матрицант системи (6). Введемо позначення $X(t) = X(t, 0)$. Очевидно, що матрицант системи (6) має вигляд

$$X(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \|X(t, \tau)\|^2 = (t - \tau)^2 + 2. \tag{7}$$

В подальшому, для встановлення асимптотичної відповідності між системами (5) та (6), нам знадобиться оцінка другого моменту розв'язків системи (5).

Має місце наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконується умова*

$$\int\limits_0^\infty \tau^2 q^2(\tau) d\tau < \infty. \tag{8}$$

Тоді існує стала $a > 0$, що для довільного розв'язку $y(t)$ системи (5) при $t \geq 0$ справедлива оцінка

$$E|y(t)|^2 \leq 2(t^2+2)aE|y(0)|^2. \tag{9}$$

Доведення. З аналога формули Коші [3, с. 234], розв'язок системи (5) допускає представлення в інтегральній формі через матрицант системи (6). Маємо

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau). \tag{10}$$

Оцінимо другий момент $y(t)$. Маємо

$$E|y(t)|^2 \leq 2\|X(t)\|^2 E|y(0)|^2 + 2\int_0^t \|X(t,\tau)\|^2\|Q(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Використовуючи формулу (7) та поділивши обидві частини останньої нерівності на (t^2+2), отримуємо

$$\frac{E|y(t)|^2}{t^2+2} \leq 2E|y(0)|^2 + 2\int_0^t \frac{(t-\tau)^2+2}{t^2+2} q^2(t)E|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Звідси маємо нерівність

$$\frac{E|y(t)|^2}{t^2+2} \leq 2E|y(0)|^2 + 2\int_0^t \frac{E|y(\tau)|^2}{\tau^2+2} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau,$$

з якої, на підставі нерівності Гронуолла-Беллмана, отримуємо оцінку для другого моменту розв'язку системи (5):

$$\frac{E|y(t)|^2}{t^2+2} \leq 2E|y(0)|^2 \exp\left(\int_0^t q^2(t)(\tau^2+2)d\tau\right)$$

або

$$E|y(t)|^2 \leq 2(t^2+2)E|y(0)|^2 a, \tag{11}$$

де $a = \exp\left(\int_0^t q^2(t)(\tau^2+2)d\tau\right)$.

Лему 1 доведено.

Наступна лема встановлює умови асимптотичної відповідності між системами (5) і (6).

Лема 2. *Нехай виконується умова*

$$\int_0^\infty t^4 q^2(t)dt < \infty. \tag{12}$$

Тоді система (6) асимптотично відповідна з ймовірністю одиниця до системи (5).

Доведення. Використовуючи еволюційну властивість матриціанта $X(t,\tau) = X(t,0)X(0,\tau)$, перепишемо (10) у вигляді

$$y(t) = X(t)[y(0) + \int_0^\infty X(0,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)] -$$
$$- \int_t^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau). \tag{13}$$

Перевіримо збіжність в середньому квадратичному інтегралів в (13).

Із оцінки

$$E|\int_0^\infty X(0,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)|^2 \le 2a\int_0^\infty (\tau^2+2)^2 q^2(\tau)E|y(0)|^2 d\tau < \infty$$

випливає потрібна збіжність.

Аналогічно з оцінки

$$E|\int_t^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)|^2 \le$$
$$\le 2a\int_t^\infty ((t-\tau)^2+2)q^2(\tau)E|y(0)|^2(\tau^2+2)d\tau \le$$
$$\le 2a\int_0^\infty (\tau^2+2)^2 q^2(\tau)E|y(0)|^2 d\tau < \infty$$

випливає збіжність другого інтеграла в середньому квадратичному.

Отже, умова (12) є достатньою для збіжності інтегралів в середньому квадратичному у виразі (13).

Оскільки розв'язки систем (5) і (6) однозначно визначаються початковими даними, то відповідність між розв'язками встановимо через відповідність між початковими умовами. Кожному розв'язку $y(t)$ системи

(5) з початковими умовами $y(0)$ ставимо у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (6) з початковими умовами

$$x(0) = y(0) + \int\limits_0^\infty X(0,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau). \tag{14}$$

Оцінимо різницю між відповідними розв'язками. Для цього виберемо послідовність $\{l_k, k \geq 1\}$ так, щоб $l_k > k$, $k \geq 1$ і

$$\int\limits_{l_k}^\infty t^4 q^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}. \tag{15}$$

З умови (12) випливає можливість такого вибору. Оскільки $x(t) = X(t)x(0)$, де $x(0)$ визначається формулою (14), то з (13) для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ одержуємо

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\geq l_k}|x(t)-y(t)| > \frac{1}{k}\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}|\int\limits_t^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{k}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^\infty \{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}|\int\limits_t^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{k}\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}|\int\limits_t^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{k}\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^\infty \left(\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}|\int\limits_{l_k+n}^\infty X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{2k}\right\} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}|\int\limits_{l_k+n}^t X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{2k}\right\}\right). \tag{16}$$

Проведемо оцінку спочатку для другого доданку. З нерівності Чебишева маємо

$$\sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}|\int\limits_{l_k+n}^t X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{2k}\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 E \left(\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} |\int\limits_{l_k+n}^{t} X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)|^2 \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 \sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} \int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1} \|X(t,\tau)\|^2 \|Q(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 \sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} \|X(t,l_k+n)\|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1} \|X(t,\tau)\|^2 \|Q(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 \|X(l_k+n+1, l_k+n)\|^2 \int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1} \|X(l_k+n,\tau)\|^2 \|Q(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 8k^2 a E|y(0)|^2 3 \int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 48k^2 a E|y(0)|^2 \int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau \leq$$

$$\leq 48k^2 a E|y(0)|^2 \int\limits_{l_k+n}^{\infty} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau \leq 48k^2 a E|y(0)|^2 \frac{1}{2^k} = I_k^{(1)}.$$

Остання нерівність виконується згідно (15).

Оцінимо тепер перший доданок у формулі(16). Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} |\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X(t,\tau)Q(\tau)y(\tau)dw(\tau)| > \frac{1}{2k} \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 \sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} \int\limits_{l_k+n}^{\infty} \|X(t,\tau)\|^2 \|Q(\tau)\|^2 E|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 4k^2 \sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1} \|X(t,l_k+n)\|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{l_k+n}^{\infty} \|X(l_k+n,\tau)\|^2 q^2(\tau) 2aE|y(0)|^2(\tau^2+2)d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 48k^2 aE|y(0)|^2 \int\limits_{l_k+n}^{\infty} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 48k^2 aE|y(0)|^2 \int\limits_{l_k+n}^{\infty} q^2(\tau)\tau^2 \frac{\tau^2+2}{\tau^2} d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_{l_k}^{\infty} q^2(\tau)(\tau^2+2)d\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(l_k+n)^2} 48k^2 aE|y(0)|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^k} 48k^2 aE|y(0)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = I_k^{(2)}.$$

Отже

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\geq l_k}|x(t)-y(t)| > \frac{1}{k}\} \leq I_k^{(1)} + I_k^{(2)} = I_k.$$

Оскільки, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} I_k$ збіжний, то з леми Бореля-Кантелі отримуємо доведення твердження леми 2.

4 Основний результат

Дослідимо поведінку нулів нетривіальних розв'язків рівняння (3) на півосі. Доведемо теорему про неколивність розв'язків лінійного стохастичного рівняння Іто другого порядку.

Теорема. *Нехай функція $p(t) \leq 0$ на додатній півосі.*

Якщо виконується умова (12), то всі розв'язки рівняння (3) неколивні на додатній півосі.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що існує нетривіальний розв'язок рівняння (3), який є коливним на півосі. Нехай

$\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ – його нескінченна послідовність нулів. Поруч з рівнянням (3) розглянемо рівняння

$$\ddot{y}(t) + q(t)y\dot{w}(t) = 0. \tag{17}$$

З леми 2 випливає, що рівняння $\ddot{z} = 0$ асимптотично відповідне з ймовірністю одиниця до рівняння (17). Всі нетривіальні розв'язки рівняння $\ddot{z} = 0$ мають вигляд $z = c_1 t + c_2$, де c_1, c_2 – довільні сталі і $|c_1| + |c_2| \neq 0$. Ці розв'язки є неколивними на додатній півосі. Тому і всі нетривіальні розв'язки рівняння (17) будуть теж неколивними.

З іншого боку, з аналога теореми порівнянь маємо, що між будь-якими послідовними нулями нетривіального розв'язку рівняння (3) існує з ймовірністю одиниця принаймі один нуль довільного нетривіального розв'язку рівняння (17). Отже, якщо в нашому припущені розв'язок $x(t)$ рівняння (3) коливний, то всі нетривіальні розв'язки $y(t)$ рівняння (17) теж коливні. Отримане протиріччя і доводить теорему.

5 Висновки

В даній роботі встановлено умови неколивності всіх нетривіальних розв'язків стохастичного рівняння Іто другого порядку на півосі.

[1] *Креневич А.П.* Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №10. – С. 1368-1384.

[2] *Самойленко А.М., Станжицький О.М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями – К.: Наукова думка, 2009. – 338 с.

[3] *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально диференциальных уравнений. – Р.: Зинатне, 1989. – 421 с.

[4] *Arnold L.* Random dynamical systems. – G.: Institute fur Dynamische Systeme, 1997. – 639 p.

[5] *Akhmet M.U., Tleubergenova M.A., Zafer A.* Asymptotic equivalence of differential equations and asymptotically almost periodic solutions // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2007. – **67**. – P. 1–14.

[6] *Baxendale P.H., Goukasian L.* Lyapunov exponenfor small random pertubations of hamiltonian systems // The Annals of Probability. – 2002. – **30**. – P. 101–134.

[7] *Buldygin V.V., Klesov O.I., Steinerbach J.G., Tymoshenko O.A.* On the φ asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations// Theory Probab.: Math. Statist. – 2008. – **1**. – P. 11–30.

[8] *Freidlin M., Weber M.* Random perturbations of nonlinear oscillators// Ann. Probab.: Math. – 1998.– **26**, №3. – P. 925–967.

[9] *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations// Duke Math.J. – 1948. – **15**. – P. 111–126.

[10] *Saito S.* Asymptotic equivalence of quasilinear ordinary differential systems// Math. Japan. – 1992. – **37**. – P. 503–513.

[11] *Witner A.* Linear variations of constants // Amer. Jour. Math. – 1946. – **68**. – P. 185–213.

[12] *Yakubovich V.A.* On the asymptotic behavior of systems of differential equations// Mat. Sbornic. – 1951. – **28**. – P.217–240.

CONCERNING PROBLEM OF NONOSCILLATION OF SOLUTIONS TO LINEAR STOCHASTIC ITO EQUATION OF SECOND ORDER

Iryna NOVAK

Kyiv Taras Shevchenko National University
60, Volodymyrska Str., Kyiv 01601

Conditions when all nontrivial solutions of stochastic Ito's equation of the second order $\ddot{x} + (p(t) + q(t)\dot{w}(t))x = 0$ are no oscillatory on semiaxis are obtained.