УДК 517.98

М.О. Качановський

ФОРМУЛИ ТИПУ КЛАРКА–ОКОНА В МАЙКСНЕРІВСЬКОМУ АНАЛІЗІ БІЛОГО ШУМУ ДЛЯ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ЗА ХІДОЮ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Clark–Ocone type formulas allow presenting square integrable and differentiable by Hida chance quantities as stochastic integrals of some random processes as well as reconstructing a chance quantity by its Hida derivative. These formulas can be used in the stochastic analysis and in the financial mathematics. This paper aims to significantly extend a class of chance quantities, for which the Clark–Ocone type formulas in the Meixner white noise analysis can be applied. To this end, by employing the methods of the infinite-dimensional analysis as well as the theory of generalized functions, we show that the condition of differentiability by Hida in the classical sense when building the Clark–Ocone type formulas is actually not necessary at all. Hence applying Clark–Ocone type formulas is possible for square integrable by the generalized Meixner measure, but not differentiable by Hida chance quantities.

Вступ

Формула Кларка–Окона [1, 2] для подання випадкової величини через стохастичні інтеграли та її узагальнення, які ми будемо називати *формулами типу Кларка–Окона*, застосовуються у стохастичному аналізі та фінансовій математиці [3–7]. Незважаючи на те, що на сьогодні побудовано різного роду варіанти таких формул на різноманітних просторах з використанням неоднакових стохастичних похідних та інтегралів по різних випадкових процесах і мірах [3–11], задача побудови формул такого типу з метою задовольнити вимоги застосувань залишається важливою та актуальною.

Опишемо кілька типових прикладів. У [10] отримано формулу типу Кларка–Окона, яка пов’язана з процесом Леві та містить стохастичні інтеграли по вінерівському процесу і за компенсованою пуассонівською випадковою мірою. У [6] запропоновано інший підхід до побудови такої формули. Він базується на розкладі Нуаларта–Скоутенса [12]. Зараз формула містить стохастичні інтеграли по спеціальних випадкових процесах. В [11] автор отримав формули типу Кларка–Окона, пов’язані з так званим *узагальненим процесом Майкснера* [13], який залежно від параметрів може ставати вінерівським, пуассонівським, гамма-процесом тощо і за певних умов є процесом Леві (зауважимо, що в [11] використовуються лише безпосередні узагальнення класичних стохастичних похідної та інтеграла, а запропонований підхід, відповідно, істотно відрізняється від підходів у [6, 10]). При цьому однією з умов для випадкової величини, для якої будуються формули типу Кларка–Окона, є природна, але доволі обмежувальна *диференційовність за Хідою* у класичному розумінні. Отже, важливим завданням є модифікація схеми [11], яка дасть можливість відмовитися від цієї умови.

Постановка задачі

Метою роботи є модифікація запропонованої автором в [11] схеми побудови формул типу Кларка–Окона для квадратично інтегровних випадкових величин у майкснерівському аналізі білого шуму, яка дасть змогу застосовувати ці формули до недиференційовних за Хідою випадкових величин.

Попередні відомості

Спочатку нагадаємо вигляд класичної формули Кларка–Окона. Позначимо через D простір Шварца нескінченно диференційовних дійсно-значних функцій на $R_+ := [0,+\infty)$ з компактними носіями; через D' дуальний до D простір узагальнених функцій; через R, C та N відповідно позначатимемо множини дійсних, комплексних і натуральних чисел, покладемо також $Z_+ := N \cup \{0\}$. Нехай μ – стандартна гауссівська міра на $(D', C(D'))$ (тут і нижче $C(D')$ – породжена циліндричними множинами σ-алгебра на D'). Добре відомо (див., наприклад, [1, 2]), що будь-яка квадратично інтегровна за μ та диференційовна за Хідою комплексно-значна функція F на D' може бути подана у вигляді

$$F = EF + \int E_t \partial_t F d W_t, \qquad (1)$$

де E позначає математичне сподівання; E_t – умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t; $\partial_{\cdot} F$ – похідна Хіди F; $\int \text{o}(t) dW_t$ – стохастичний інтеграл Іто по W. Формула (1) називається *формулою Кларка–Окона*. Як відомо [3, 4], вона зберігається (з точністю до зрозумілих модифікацій) у випадку, коли замість гауссівської міри використовується пуассонівська.

Визначення *узагальненої міри Майкснера* μ, яка є мірою майкснерівського білого шуму (похідної узагальненого процесу Майкснера у сенсі узагальнених функцій), наведене з детальними поясненнями в [13] (див. також [14]). Оскільки воно є громіздким і не буде безпосередньо використовуватись у цій статті, обмежимось зауваженням, що μ – ймовірнісна міра на $(D', C(D'))$, яка залежить від двох параметрів – комплексно-значних функцій на R_+, добуток яких є обмеженою функцією $\eta : R_+ \to R_+$. Залежно від параметрів μ може ставати гауссівською чи пуассонівською мірою $(\eta = 0)$, гамма-мірою $(\eta = 1)$ тощо.

Нехай $(L^2) := L^2(D', \mu)$ – простір комплексно-значних квадратично інтегровних за μ функцій на D'. Позначимо через $\hat{\otimes}$ симетричний тензорний добуток; через нижній індекс C – комплексифікації просторів; через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спарювання між елементами D' і D, породжене скалярним добутком у просторі $L^2(R_+)$ квадратично інтегровних за мірою Лебега функцій (це позначення буде збережене для тензорних добутків і комплексифікацій просторів). У [13] показано, що в (L^2) є ортогональними певні узагальнені поліноми Аппеля (тобто поліноми з твірною функцією вигляду $\gamma(\lambda) \exp\{\langle x, \alpha(\lambda) \rangle\}$) $\langle P_n(x), f^{(n)} \rangle$, $x \in D'$, $P_n(x) \in D'^{\hat{\otimes} n}$, $f^{(n)} \in D_C^{\hat{\otimes} n}$, $n \in Z_+$. Визначимо (*дійсні*, тобто *білінійні*) скалярні добутки на $D_C^{\hat{\otimes} n}$, поклавши для $f^{(n)}$, $g^{(n)} \in D_C^{\hat{\otimes} n}$

$$\langle f^{(n)}, g^{(n)} \rangle_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{D'} \langle P_n(x), f^{(n)} \rangle \langle P_n(x), g^{(n)} \rangle \, \mu(dx).$$

З результатів [13] випливає, що

$$\langle f^{(n)}, g^{(n)} \rangle_{ext} = \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in N : j = 1, \dots, k, l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n}} \frac{n!}{l_1^{s_1} \dots l_k^{s_k} s_1! \dots s_k!} \times$$
$$\times \int_{R_+^{s_1 + \dots + s_k}} f^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots,$$
$$\underbrace{t_{s_1 + \dots + s_k}, \dots, t_{s_1 + \dots + s_k}}_{l_k}) \times$$
$$\times g^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1}, \dots, t_{s_1}}_{l_1}, \dots, \tag{2}$$
$$\underbrace{t_{s_1 + \dots + s_k}, \dots, t_{s_1 + \dots + s_k}}_{l_k}) \times$$
$$\times \eta^{l_1 - 1}(t_1) \dots \eta^{l_1 - 1}(t_{s_1}) \eta^{l_2 - 1}(t_{s_1 + 1}) \dots \eta^{l_2 - 1}(t_{s_1 + s_2}) \dots \times$$
$$\times \eta^{l_k - 1}(t_{s_1 + \dots + s_{k-1} + 1}) \dots \eta^{l_k - 1}(t_{s_1 + \dots + s_k}) \, dt_1 \dots dt_{s_1 + \dots + s_k}$$

Таким чином, наприклад, для $n = 2$ $\langle f^{(2)}, g^{(2)} \rangle_{ext} = \langle f^{(2)}, g^{(2)} \rangle + \int_{R_+} f^{(2)}(t, t) g^{(2)}(t, t) \eta(t) dt.$

Нехай $|\cdot|_{ext}$ є нормою на $D_C^{\hat{\otimes} n}$, що відповідає скалярному добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ext}$, тобто $|\cdot|_{ext} = \sqrt{\langle \cdot, \overline{\cdot} \rangle_{ext}}$. Позначимо через $H_{ext}^{(n)}$ гільбертів простір, який є класичним поповненням $D_C^{\hat{\otimes} n}$ за цією нормою (зокрема, $H_{ext}^{(0)} = C$, $H_{ext}^{(1)} = L^2(R_+)_C \equiv H$). Зауважимо, що простір $H^{\hat{\otimes} n}$, $n \in N \setminus \{1\}$ можна розуміти як власний підпростір $H_{ext}^{(n)}$ [14]. Якщо $\eta = 0$ (гауссівський та пуассонівський випадки), $H^{\hat{\otimes} n} = H_{ext}^{(n)}$.

Для $F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}$, $n \in Z_+$ визначимо (узагальнений) поліном $\langle P_n(\cdot), F^{(n)} \rangle \equiv \langle P_n, F^{(n)} \rangle \in (L^2)$ таким чином: $\langle P_n, F^{(n)} \rangle := (L^2) - \lim\limits_{k \to \infty} \langle P_n, f_k^{(n)} \rangle$, де $f_k^{(n)} \in D_C^{\hat{\otimes} n}$ та $f_k^{(n)} \underset{k \to \infty}{\to} F^{(n)}$ в $H_{ext}^{(n)}$. Неважко побачити [13], що поліноми $\langle P_n, F^{(n)} \rangle$, $F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}$, $n \in Z_+$ утворюють ортогональний базис в (L^2): будь-яке $F \in (L^2)$ можна подати у вигляді

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, F^{(n)} \rangle, \; F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}, \tag{3}$$

з нормою $\|F\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty.$

За аналогією із гауссівським аналізом визначимо *узагальнений процес Майкснера* на $(D', C(D'), \mu)$, поклавши для кожного $t \in R_+$ $M_t := \langle P_1, 1_{[0,t)}\rangle \in (L^2)$, тут $1_B(y)$ є індикатором події $\{y \in B\}$. Коротко нагадаємо визначення розширеного стохастичного інтеграла по M (див. детальніше в [14]). Нехай $G \in (L^2) \otimes H$. З наведеного вище випливає, що G можна навести у вигляді

$$G(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, G_\cdot^{(n)}\rangle, \; G_\cdot^{(n)} \in H_{ext}^{(n)} \otimes H, \tag{4}$$

з нормою $\|G\|^2_{(L^2)\otimes H} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|G_\cdot^{(n)}|^2_{H_{ext}^{(n)}\otimes H} < \infty.$ Для кожного ядра $G_\cdot^{(n)}$ визначимо елемент $\widehat{G}^{(n)} \in H_{ext}^{(n+1)}$ таким чином. Розглянемо представника (функцію) $g_\cdot^{(n)} \in G_\cdot^{(n)}$ такого, що $g_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0,$ якщо існує $j \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $t_j = t.$ Нехай $\widehat{G}^{(n)}$ – клас еквівалентності в $H_{ext}^{(n+1)}$, породжений симетризацією $g_\cdot^{(n)}$ за $n+1$ змінною. У [14] доведено коректність цього визначення та оцінку $|\widehat{G}^{(n)}|_{ext} \le |G_\cdot^{(n)}|_{H_{ext}^{(n)}\otimes H}.$

Для $G \in (L^2) \otimes H$ з $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\,|\widehat{G}^{(n)}|^2_{ext} < \infty$ визначимо *розширений стохастичний інтеграл* по M

$$\int G(t)\widehat{d} M_t := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_{n+1}, \widehat{G}^{(n)}\rangle \in (L^2). \tag{5}$$

У [14] встановлено, що він є розширенням стохастичного інтеграла Іто по M. У випадках, коли μ є гауссівською чи пуассонівською мірою, інтеграл (5) збігається з класичним розширеним стохастичним інтегралом Скорохода.

Насамкінець нагадаємо поняття стохастичної похідної Хіди в аналізі, пов’язаному із узагальненою мірою Майкснера (див. детальніше в [14, 15]). Спочатку зауважимо, що будь-яке $F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}$, $n \in N$ можна розглядати як елемент $F^{(n)}(\cdot)$ простору $H_{ext}^{(n-1)} \otimes H$, при цьому $|F^{(n)}(\cdot)|_{H_{ext}^{(n-1)}\otimes H} \le |F^{(n)}|_{ext}$ [14]. Нехай $F \in (L^2)$ вигляду (3) є такою, що $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,n\,|F^{(n)}(\cdot)|^2_{H_{ext}^{(n-1)}\otimes H} < \infty.$ Визначимо *стохастичну похідну Хіди* $\partial_\cdot F := \sum_{n=1}^{\infty} n\langle P_{n-1}, F^{(n)}(\cdot)\rangle \in (L^2) \otimes H.$

Також з [14] відомо, що розширений стохастичний інтеграл та стохастична похідна Хіди є спряженими один до одного і, зокрема, замкненими операторами.

Формули типу Кларка–Окона

Нехай $F \in (L^2)$ диференційовна за Хідою і така, що ядра $F^{(n)}$ з розкладу (3) належать просторам $H^{\widehat{\otimes} n} \subset H_{ext}^{(n)}$. Неважко зрозуміти [11], що формула Кларка–Окона в цьому випадку має вигляд (1) (інтегрування здійснюється по узагальненому процесу Майкснера M). Загальний випадок (ядра $F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}$) є значно складнішим. Справді, як показано в [11], $F \in (L^2)$ можна подати у вигляді $F = EF + \int G(t)\widehat{d} M_t$ з $G \in (L^2) \otimes H$, лише якщо

* для кожного $n \in N \setminus \{1\}$ ядро $F^{(n)} \in H_{ext}^{(n)}$ з розкладу (3) для F має представника $f^{(n)} \in F^{(n)}$ з такою властивістю: $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0,$ якщо для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ існує $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ таке, що $t_i = t_j$.

Але навіть коли ця умова виконана для диференційовної за Хідою $F \in (L^2)$, формула (1) узагалі не може бути отримана. Одним із можливих шляхів одержання аналогу цієї формули є такий. Нехай для $n \in N \setminus \{1\}$ $h_n(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1, \ldots, t_n \in R_+$ є симетризацією $1_{\{t_1 \ne t_n, t_2 \ne t_n, \ldots, t_{n-1} \ne t_n\}}$ за всіма $t_\cdot$ (тут 1_B – індикатор події B), $\widehat{h}_n := n h_n$, $\widehat{h}_1 \equiv 1.$ Для $G_\cdot^{(n)} \in H_{ext}^{(n)} \otimes H$, $n \in Z_+$, нехай $\tilde{G}_\cdot^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) := \dfrac{G_\cdot^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n)}{\widehat{h}_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot)}$, якщо для цього набору аргументів $\widehat{h}_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) \ne 0$ і $\tilde{G}_\cdot^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) = 0$ в іншому випадку. Далі визначимо лінійний неперервний оператор A в $(L^2) \otimes H$, поклавши для $G \in (L^2) \otimes H$ вигляду (4)

$$(AG)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, \tilde{G}_\cdot^{(n)}\rangle. \tag{6}$$

В [11] доведено, що якщо $F \in (L^2)$, диференційовна за Хідою та задовольняє умову (*), виконується подання

$$F = EF + \int A\partial_t F \widehat{d} M_t \equiv EF + \int (A\partial_{\cdot} F)(t)\widehat{d} M_t, \quad (7)$$

яке є *формулою типу Кларка–Окона*.

Розглянемо ще один варіант формули типу Кларка–Окона, який, на відміну від (7), є прямим узагальненням класичної формули (1). Для $n \in N$ і $t, t_1, \dots, t_n \in R_+$ покладемо $\chi_{n,t}(t_1, \dots, t_n) = 1$, якщо всі *однократні* t_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ (тобто такі, для яких не існує $t_j = t_i$ з $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$), менші за t, і $\chi_{n,t}(t_1, \dots, t_n) = 0$ в іншому випадку; $\chi_{0,t} \equiv 1$. Для кожного $t \in R_+$ визначимо лінійний неперервний оператор $\tilde{E}_t$ в (L^2), поклавши для $F \in (L^2)$ вигляду (3)

$$\tilde{E}_t F := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, F^{(n)} \chi_{n,t} \rangle. \quad (8)$$

Також в [11] доведено, що якщо $F \in (L^2)$, диференційовна за Хідою та задовольняє умову (*), отримуємо рівність

$$F = EF + \int \tilde{E}_t \partial_t F \widehat{d} M_t, \quad (9)$$

яка є *формулою типу Кларка–Окона*. У гауссівському та пуассонівському випадках $\tilde{E}_t$ є оператором умовного математичного сподівання відносно повної σ-алгебри, породженої відповідно вінерівським і пуассонівським процесами до моменту часу t, і, таким чином, (9) є класичною формулою Кларка–Окона (1).

З метою позбутися умови диференційовності за Хідою F у (7) і (9) зручно використати найпростіший варіант так званого регулярного параметризованого оснащення (L^2) [16]. Визначимо простір основних функцій $(L^2)_1 \subset \subset (L^2)$ як гільбертів простір (класів) функцій $F : D' \to C$ вигляду (3), для яких $\|F\|^2_{(L^2)_1} = \sum_{n=0}^{\infty} n! 2^n |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty$. Нехай $(L^2)_{-1}$ – спряжений до $(L^2)_1$ відносно (L^2) гільбертів простір узагальнених функцій, він складається з формальних рядів вигляду (3) з нормами $\|F\|^2_{(L^2)_{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} n! 2^{-n} |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty$. Відомо [15], що похідну Хіди $\partial_{\cdot}$ можна продовжити до лінійного неперервного оператора, що діє з (L^2) у $(L^2)_{-1} \otimes H$. Далі легко помітити, що A можна визначити за формулою (6) як лінійний неперервний оператор у $(L^2)_{-1} \otimes H$; і для кожного $t \in R_+$ $\tilde{E}_t$ можна визначити за формулою (8) як лінійний неперервний оператор в $(L^2)_{-1}$.

Лема 1. Нехай $F \in (L^2)$. Тоді $A\partial_{\cdot} F \in \in (L^2) \otimes H$.

Використовуючи визначення стохастичної похідної, операції $\tilde{\circ}$ та формулу (2), безпосереднім підрахунком можна встановити оцінки $|n \tilde{F}^{(n)}(\cdot)|^2_{H^{(n-1)}_{ext} \otimes H} \le n |F^{(n)}|^2_{ext}$, $n \in N$, за допомогою яких отримуємо $\|A\partial_{\cdot} F\|_{(L^2)\otimes H} \le \|F\|_{(L^2)} < \infty$, звідки і випливає потрібне.

Лема 2. Нехай $F \in (L^2)$. Тоді $\tilde{E}_{\cdot}\partial_{\cdot} F \in \in (L^2) \otimes H$.

Використовуючи визначення стохастичної похідної, визначення $\chi_{n,t}$, формулу (2) та той факт, що для симетричної інтегровної функції $g : R^k_+ \to R$, маємо $\int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \dots \int_0^{\infty} dt_k \, g(t_1, \dots, t_k) = = k \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_1} dt_k \, g(t_1, \dots, t_k)$, безпосереднім підрахунком можна встановити оцінки $(n+1) |F^{(n+1)}(\cdot)\chi_{n,\cdot}|^2_{H^{(n)}_{ext} \otimes H} \le |F^{(n+1)}|^2_{ext}$, $n \in Z_+$ (якщо F задовольняє умову (*), у цих виразах виконуються рівності). За допомогою цих оцінок отримуємо $\|\tilde{E}_{\cdot}\partial_{\cdot} F\|_{(L^2)\otimes H} \le \|F\|_{(L^2)} < \infty$, звідки і випливає потрібне.

Наслідком цих лем та результатів [11] є

Теорема. Нехай $F \in (L^2)$ та задовольняє умову (*). Тоді справедливі формули типу Кларка–Окона (7) і (9), підінтегральний процес в яких є елементом $(L^2) \otimes H$. Більше того, нехай замість умови (*) F задовольняє таку умову: для кожного $n \in N \setminus \{1\}$ ядро $F^{(n)} \in H^{(n)}_{ext}$ з розкладу (3) для F має представника $f^{(n)} \in F^{(n)}$ з такою властивістю: $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$, якщо існують $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \ne j$ такі, що $\max\{t_1, \dots, t_n\} =$

$= t_i = t_j$. Тоді $\tilde{E}_{\cdot}\partial_{\cdot}F = E_{\cdot}\partial_{\cdot}F$, де $E_{\cdot}$ є оператором умовного математичного сподівання відносно повної σ-алгебри, породженої узагальненим процесом Майкснера M до моменту часу ·, тобто формула (9) набуває класичного вигляду

$$F = EF + \int E_t \partial_t F dM_t \qquad (10)$$

(властивості $E_{\cdot}$ дають змогу використати стохастичний інтеграл Іто по M). І навпаки, якщо $F \in (L^2)$ можна подати у вигляді (10), то F задовольняє наведену умову.

Висновки

У статті виконано модифікацію запропонованої в [11] схеми побудови формул типу Кларка—Окона, яка дає можливість застосовувати ці формули до недиференційовних за Хідою у класичному сенсі квадратично інтегровних випадкових величин у майкснерівському аналізі білого шуму. Це дало змогу значно розширити клас випадкових величин, до яких можна застосувати згадані формули. Формули типу Кларка—Окона на загальних параметризованих просторах основних та узагальнених функцій будуть розглянуті в наступній статті.

1. *Clark J.M.* The Representation of Functionals of Brownian Motion by Stochastic Integrals // Ann. Math. Stat. — **41**, N 4. — 1970. — P. 1282—1295.
2. *Ocone D.* Malliavin's Calculus and Stochastic Integrals: Representation of Functionals of Diffusion Processes // Stochastics. — **12**, N 3-4. — 1984. —P. 161—185.
3. *Di Nunno G., Oksendal B., Proske F.* Malliavin Calculus for Levy Processes with Applications to Finance. — Universitext. Springer-Verlag, Berlin. — 2009. — P. XIV + 413.
4. *Zhang Xi.* Clark—Ocone Formula and Variational Representation for Poisson Functionals // Ann. Probab. — **37**, N 2. — 2009. — P. 506—529.
5. *Aase K., Oksendal B., Privault N., Uboe J.* White Noise Generalizations of the Clark—Haussmann—Ocone Theorem with Application to Mathematical Finance // Finance Stocastics. — **4**, N 4. — 2000. — P. 465—496.
6. *Di Nunno G., Oksendal B., Proske F.* White Noise Analysis for Levy Processes // J. Funct. Anal. — 206:1. — 2004. — P. 109—148.
7. *Maas J., van Neerven J.* A Clark—Ocone Formula in UMD Banach Spaces // Electron. Commun. Probab. — **13**. — 2008. — P. 151—164.
8. *Karatz I., Ocone D., Li J.* An Extension of Clark's Formula // Stochastics Rep. — **37**, N 3. — 1991. — P. 127—131.
9. *De Faria M., Oliveira M.J., Streit L.* A Generalized Clark—Ocone Formula // Random Oper. Stoch. Equ. — **8**, N 2. — 2000. — P. 163—174.
10. *Lokka A.* Martingale Representation of Functionals of Levy Processes // Stoch. Anal. Appl. — **22**, N 4. — 2004. — P. 867—892.
11. *Kachanovsky N.A.* Clark—Ocone Type Formulas in the Meixner white Noise Analysis // Карпат. мат. публ. — 2011. — **3**, № 1. — С. 56—72.
12. *Nualart D., Schoutens W.* Chaotic and Predictable Representations for Levy Processes // Stoch. Proc. Appl. — **90**, N 1. — 2000. — P. 109—122.
13. *Rodionova I.V.* Analysis Connected with Generating Functions of Exponential Type in One and Infinite Dimensions // Meth. Funct. Anal. Topol. — **11**, N 3. — 2005. — P. 275—297.
14. *Kachanovsky N.A.* On an Extended Stochastic Integral and the Wick Calculus on the Connected with the Generalized Meixner Measure Kondratiev-Type Spaces // Meth. Funct. Anal. Topol. — **13**, N 4. — 2007. — P. 338—379.
15. *Kachanovsky N.A.* Generalized Stochastic Derivatives on Parametrized Spaces of Regular Generalized Functions of Meixner white Noise // Meth. Funct. Anal. Topol. — **14**, N 4. — 2008. — P. 334—350.
16. *Kachanovsky N.A.* An Extended Stochastic Integral and a Wick Calculus on Parametrized Kondratiev-Type Spaces of Meixner white Noise // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — **11**, N 4. — 2008. — P. 541—564.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 травня 2011 року