

УДК 532.3:534.1

О.М. Макасеєв

ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОВАГИ НЕІДЕАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАЯТНИК–ЕЛЕКТРОДВИГУН

In this paper, we investigate the nonideal dynamical system pendulum–electric motor. We construct and analyze the stability regions of equilibrium points. The study proposes a method of using such regions for searching the areas of deterministic chaos in the space of system parameters. Additionally, we demonstrate the falseness of applying the ideal mathematical models for studying the equilibrium points. Only the use of nonideal mathematical models, notably those models in which the oscillation source power is comparable to the power consumed by the oscillating system, allows us to make the right conclusion on the stability of equilibrium points.

Вступ

Маятникові системи є класичним прикладом коливальних динамічних систем. За своєю фізичною природою вони надзвичайно прості, що дає змогу легко здійснювати експериментальну перевірку одержуваних теоретичних результатів. Більше того, останнім часом значно розширилася сфера застосування маятникових моделей для математичного опису коливальних процесів. Такі моделі широко використовуються при дослідженні динамічної поведінки систем найрізноманітнішої природи в економіці, біології, медицині.

Переважає більшість досліджень динаміки маятникових систем проводиться без врахування обмеженості потужності джерела збуджень їх коливань, тобто припускається, що потужність джерела збудження істотно перевищує потужність, яка споживається коливальною системою. Такі системи називаються ідеальними за Кононенком [1].

У багатьох випадках ідеалізація призводить до грубих помилок в якісному і кількісному описі динамічних режимів маятникових систем [2–4]. Тому в більшості практичних задач об'єкт коливальна система–джерело збуджень коливань принципово повинен трактуватися як неідеальна за Кононенком [1] динамічна система. В таких системах потужність джерела збуджень коливань обов'язково припускається порівнянною з потужністю, що споживається коливальною системою. Це зумовлює необхідність обов'язкового врахування зворотного впливу коливальної системи на функціонування джерела збудження коливань.

У статті розглядається неідеальна динамічна система маятник–електродвигун [2–5]. Побудова та аналіз областей стійкості для цієї системи дадуть можливість узагальнити властивості неідеальних маятникових систем, а отри-

мані результати можуть бути корисними для практичного застосування при моделюванні інших видів коливальних систем. Зауважимо, що детальне дослідження проблем стійкості ustalених режимів у працях [2–5] не проводилося.

Постановка задачі

Метою роботи є побудова та аналіз областей стійкості для неідеальної динамічної системи маятник–електродвигун.

Математична модель системи маятник–електродвигун

Рівняння руху системи маятник–електродвигун як детермінованої неідеальної динамічної системи можуть бути записані у такому вигляді [2–5]:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} = Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} = Dy_2 + Ey_3 + F, \end{cases} \quad (1)$$

де фазові змінні y_1, y_2 описують відхилення маятника від вертикалі, а фазова змінна y_3 пропорційна швидкості обертання валу електродвигуна. Параметри системи визначаються за формулами

$$\begin{aligned} C &= -\delta\varepsilon^{-2/3}\omega_0^{-1}, \\ D &= -\frac{2ml^2}{I}, F = \frac{2l^{2/3}}{a^{2/3}}\left(\frac{N_0}{\omega_0} + E\right), \end{aligned} \quad (2)$$

де m – маса маятника, l – зведена довжина маятника, ω_0 – власна частота маятника, a – довжина кривошипа електродвигуна, $\varepsilon = \frac{a}{l}$, δ –

коефіцієнт демпфування середовища, I – момент інерції ротора електродвигуна, E , N_0 – сталі статичної характеристики електродвигуна.

Система рівнянь (1) явно містить чотири керуючих параметри (C , D , E , F), при зміні яких у ній реалізується той чи інший динамічний режим. Зазначимо, що один із цих параметрів (E) безпосередньо задається кутом нахилу характеристики двигуна, другий (C) – пропорційний опору середовища, в якому рухається маятник, а останні два визначаються за формулами (2). Як видно з цих формул, параметри D , F залежать від довжини та маси маятника, його власної частоти, коефіцієнта демпфування, лінійних розмірів кривошипно-шатунного механізму, моменту інерції ротора, а також від параметрів статичної характеристики електродвигуна. Тобто фактично ці параметри є мультипараметрами динамічної системи (1).

Нехай Vf – векторне поле, яке породжується правою частиною системи (1). Тоді дивергенція цієї системи може бути визначена за формулою

$$\operatorname{div} Vf = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial y_3} = 2C + E. \quad (3)$$

Таким чином, дивергенція системи постійна і від’ємна, оскільки $C < 0$, $E < 0$. Тому система (1) є дисипативною і всі атрактори цієї системи, як регулярні, так і хаотичні, є підмножинами нульового фазового об’єму і розміщені в області фазового простору.

Достатні умови асимптотичної стійкості

Всі положення рівноваги системи (1) є розв’язком такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} Cy_1 - y_2 y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2 y_2 + y_2^3) = 0, \\ Cy_2 + y_1 y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1 = 0, \\ Dy_2 + Ey_3 + F = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ця система має нескінченну множину розв’язків, і кожному розв’язку відповідає положення рівноваги системи (1). Система алгебричних рівнянь (4) є нелінійною системою третього порядку, тому її аналітичні розв’язки можуть бути знайдені тільки в частинних випадках. У загальному випадку ці розв’язки можуть бути знайдені тільки за допомогою числових методів.

Нехай $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$, $y_3 = y_{30}$ – один із розв’язків системи (1). Тоді система рівнянь у варіаціях матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = \left(C - \frac{1}{4} y_{10} y_{20} \right) \tilde{y}_1 - \left(\frac{3}{8} y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{10}^2 \right) \tilde{y}_2 - y_{20} \tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \left(\frac{3}{8} y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{20}^2 \right) \tilde{y}_1 + \left(C + \frac{1}{4} y_{10} y_{20} \right) \tilde{y}_2 + y_{10} \tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 = D \tilde{y}_2 + E \tilde{y}_3. \end{cases} \quad (5)$$

Запишемо характеристичне рівняння для системи у варіаціях (5):

$$\begin{vmatrix} C - \frac{1}{4} y_{10} y_{20} - \lambda & - \left(\frac{3}{8} y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{10}^2 \right) & - y_{20} \\ \frac{3}{8} y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{20}^2 & C + \frac{1}{4} y_{10} y_{20} - \lambda & y_{10} \\ 0 & D & E - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи даний визначник, отримаємо таке рівняння:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

де

$$a_1 = -2C - E,$$

$$a_2 = C^2 - \frac{1}{16} y_{10}^2 y_{20}^2 + 2CE - D y_{10} +$$

$$+ \left(\frac{3}{8} y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{10}^2 \right) \left(\frac{3}{8} y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{20}^2 \right),$$

$$a_3 = E \left(\frac{1}{16} y_{10}^2 y_{20}^2 - C^2 - \left(\frac{3}{8} y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{10}^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{3}{8} y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{20}^2 \right) \right) + D \left(y_{10} \left(C - \frac{1}{4} y_{10} y_{20} \right) + \right. \\ \left. + y_{20} \left(\frac{3}{8} y_{10}^2 + y_{30} + \frac{1}{8} y_{20}^2 \right) \right).$$

За критерієм Гурвіца достатні умови асимптотичної стійкості положення рівноваги системи (1) будуть мати вигляд

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (6)$$

Перша умова $a_1 = -2C - E > 0$ завжди виконується в силу дисипативності системи (1). Умови стійкості також містять параметр D , який характеризує взаємодію між електродви-

гуном і маятником. Це означає, що застосування ідеальної моделі, в якій нехтується взаємозв'язок між коливальною підсистемою та джерелом збудження, може призвести до грубих помилок при визначенні стійкості того чи іншого положення рівноваги. Так, теоретично очікувані стійкі положення рівноваги в реальному експерименті можуть виявитися нестійкими і навпаки. Більше того, в ідеальній постановці задачі, коли ми покладемо $D = 0$, система рівнянь (1) розпадеться на дві підсистеми. Одна з них складатиметься з перших двох рівнянь системи (1), а друга – лише з третього рівняння цієї системи. Отже, в ідеальній постановці задачі максимальна розмірність фазового простору отриманих рівнянь буде дорівнювати двом. У просторах такої розмірності існування хаотичних атракторів є теоретично неможливим [5, 6].

Побудова областей стійкості

При дослідженні поведінки системи корисною для практики буде інформація про вплив параметрів системи на стійкість її положень рівноваги. Цю інформацію можуть дати так звані області стійкості, тобто області значень параметрів, при яких система має стійке або нестійке положення рівноваги в околі деякої точки.

Методика побудови областей стійкості полягає в тому, що площина вибраних параметрів системи розбивається за допомогою вертикально-горизонтальної сітки на точки, розміщені близько одна до одної. В кожній сітковій точці чисельно розв'язується система рівнянь (1) (у

нашому випадку використовувався метод Ньютона) і перевіряються умови асимптотичної стійкості (6). Після встановлення стійкості положення рівноваги в будь-якій сітковій точці пікселю екрана комп'ютера, який відповідає даній точці площини вибраних параметрів, надається певний кольоровий код. У результаті на екрані комп'ютера отримуємо області зміни параметрів, при яких система має стійке або нестійке положення рівноваги в околі деякої точки.

На рис. 1 наведено області стійкості положення рівноваги, побудовані для параметрів C і E при $D = -0,6$, $F = 0,19$.

На рисунках світло-сірим кольором зображено стійкі положення рівноваги, а темно-сірим – нестійкі. Можна побачити, що при цих змінах параметрів у системі існують доволі обширні області як стійкості, так і нестійкості. Зазначимо, що в тих областях простору параметрів системи, де положення рівноваги є нестійким, аттрактором системи (1) може бути або граничний цикл, або інваріантний тор, або хаотичний аттрактор. В областях, де положення рівноваги є стійким, аттрактором системи і буде положення рівноваги. Це означає, що пошук хаотичних атракторів системи (1) необхідно здійснювати саме в областях нестійкості. Більше того, можна побачити, що обидва рисунки в правій частині мають великі темно-сірі області, що свідчить про можливість наявності там областей хаотичності.

Побудуємо при таких самих межах зміни параметрів карту динамічних режимів системи (1) (рис. 2). Методика побудови карт динамічних режимів детально описана в [5].

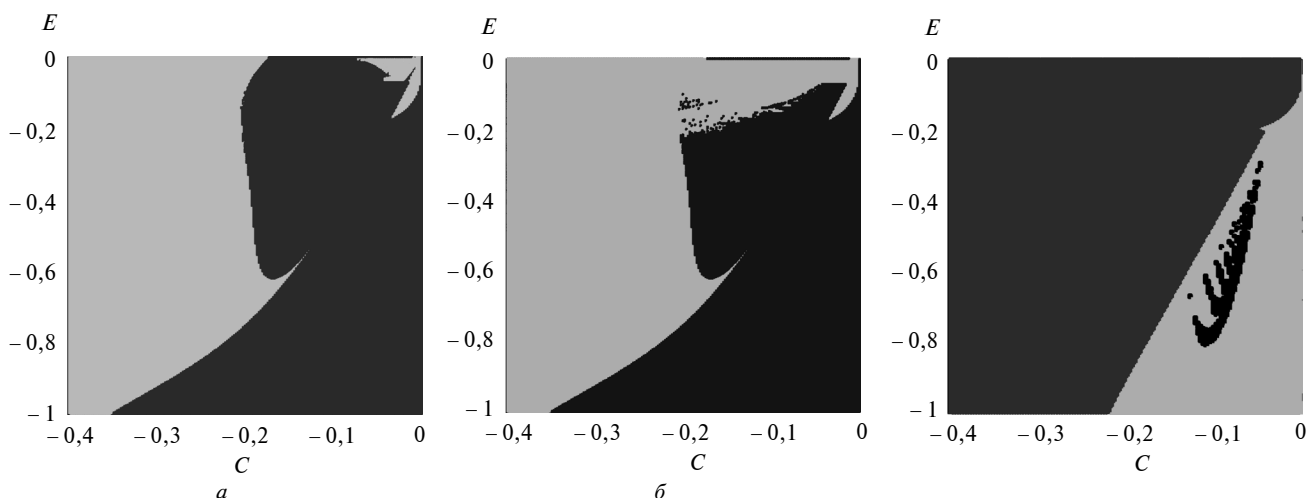


Рис. 1. Области стійкості при $D = -0,6$, $F = 0,19$: а – в околі точки $(0,0,0)$; б – в околі точки $(10,10,10)$

Рис. 2. Карта динамічних режимів

На карті темно-сірі області відповідають положенням рівноваги системи (1), світло-сірі – граничним циклам, а чорні – хаотичним атракторам. Бачимо, що області граничних циклів і хаотичних атракторів містяться при тих межах зміни параметрів, де система (1) має нестійкі положення рівноваги (рис. 1). Це означає, що припущення про наявність областей хаотичності в правій частині карти динамічних режимів (рис. 2) було правильним. При цьому побудова областей стійкості системи (1) потребує в сотні разів менше часу комп’ютерних обчислень, ніж громізка процедура побудови карт динамічних режимів. Тому для пошуку хаотичних атракторів доцільно спочатку будувати кілька областей стійкості, тим самим звужуючи область пошуку, а вже потім переходити до побудови карт динамічних режимів.

Можна помітити, що у верхній правій частині областей стійкості положення рівноваги в околі точки $(0,0,0)$ (рис. 1, *a*) є області, де система (1) має нестійкі положення рівноваги, а в околі точки $(10,10,10)$ (рис. 1, *б*) – стійкі. Так, наприклад, при значеннях параметрів $C = -0,12$, $D = -0,6$, $E = -0,1$, $F = 0,19$ в системі (1) існують три положення рівноваги: два стійких $(-0,5875; 0,0416; 1,6502)$, $(1,9434; 0,481; -0,9859)$ та одне нестійке $(-1,4043; 0,2438; 0,4373)$. А при $C = -0,12$, $D = -0,6$, $E = -0,01$, $F = 0,19$ система (1) має одне стійке положення рівноваги $(-0,0527; 0,0002; 18,9834)$ і два нестійких: $(1,7931, 0,3326, -0,9549)$, $(-1,7438; 0,3139; 0,1631)$.

На рис. 3 наведено області стійкості положення рівноваги в околі точки $(0,0,0)$ при $E = -0,59$, $F = -0,17$ (рис. 3, *a*) і при $C = -0,1$, $E = -0,59$ (рис. 3, *б*).

Бачимо, що система (1) має досить великі області як стійкості, так і нестійкості. Побудовані області стійкості дають інформацію про наявність атракторів того чи іншого типу при певних значеннях параметрів.

Аналогічно будуються області стійкості і для інших параметрів системи. На рис. 4 показано області стійкості положення рівноваги в околі точки $(0,0,0)$ при $C = -0,1$, $D = -0,6$ (рис. 4, *a*) і при $C = -0,1$, $F = 0,19$ (рис. 4, *б*).

На рис. 5, *a*, *б* наведено області стійкості положень рівноваги в околі точок $(0,0,0)$ і $(1,-1,0)$ відповідно. Вони побудовані при значеннях параметрів $D = -0,6$, $E = -0,59$.

Як видно, рис. 5, *a* і *б* не є ідентичними, що свідчить про наявність кількох положень рівноваги. Так, при $C = -0,3$, $F = 1$ система (1) має два стійких положення рівноваги: $(-0,5936; 0,1093; 1,5838)$, $(1,0102; 2,9923; -1,3481)$ та од-

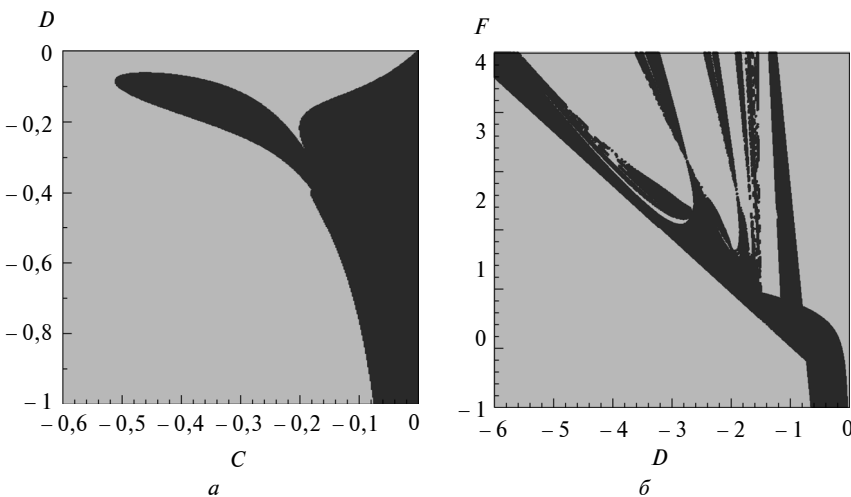


Рис. 3. Области стійкості в околі точки $(0,0,0)$: *a* – $E = -0,59$, $F = -0,17$; *б* – $C = -0,1$, $E = -0,59$

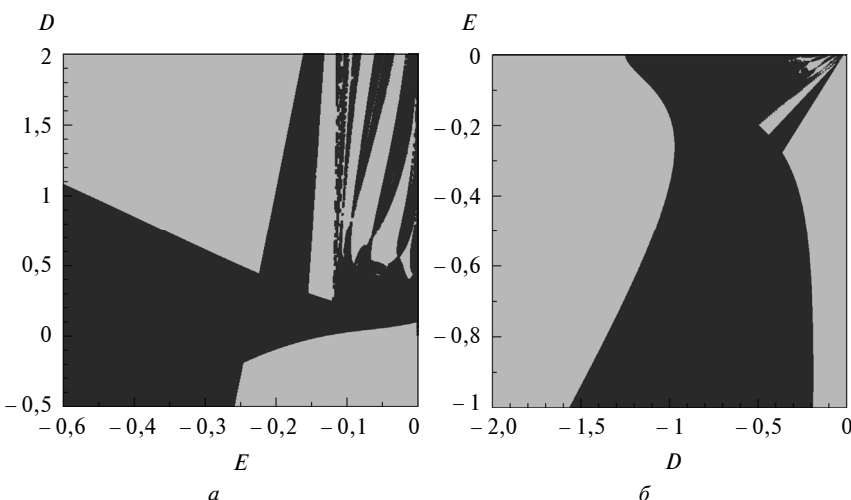


Рис. 4. Области стійкості в околі точки $(0,0,0)$: *a* – $C = -0,1$, $D = -0,6$; *б* – $C = -0,1$, $F = 0,19$

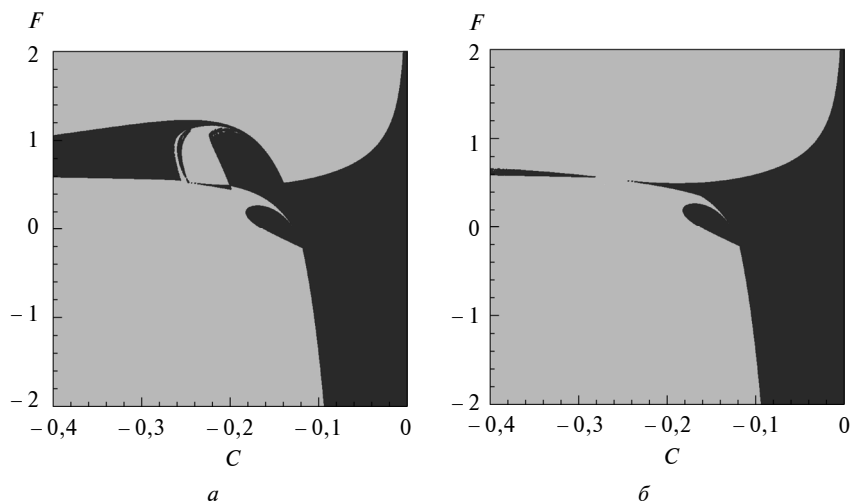


Рис. 5. Области стійкості при $D = -0,6$, $E = -0,59$: *а* – в околі точки $(0,0,0)$; *б* – в околі точки $(1,-1,0)$

не нестійке $(-1,4161; 2,5455; -0,8937)$. При $C = -0,05$, $F = -1$ система має також три положення рівноваги, але одне стійке $(0,5989; 0,0179; -1,7132)$ і два нестійких: $(-4,8812, 1,2722, -2,9887)$, $(4,3497; 0,9956; -2,7073)$. Однак, наприклад, при $C = -0,3$, $F = 1,5$ і при $C = -0,05$, $F = 0,2$ система (1) має лише одне положення рівноваги. В першому випадку воно є стійким $(-0,3921; 0,0468; 2,4948)$, а в другому – нестійким $(-1,7486; 0,1541; 0,1823)$.

Оскільки хаотичні атрактори можуть існувати тільки в областях фазового простору з не

стійкими положеннями рівноваги, то для того, щоб звузити область пошуку таких атракторів доцільно будувати кілька областей стійкості з однаковими межами зміни біфуркаційних параметрів, але в околах різних точок.

Висновки

Результати дослідження свідчать, що тільки застосування неідеальних моделей дає можливість зробити правильний висновок про стійкість положень рівноваги динамічної системи маятник–електродвигун. Так, нестійкі, при нехтуванні параметрів взаємодії, положення рівноваги системи насправді можуть виявитися стійкими, і навпаки: стійкі – нестійкими. Показано, що використання побудованих областей стійкості дає змогу значно пришвидшити процес знаходження областей існування детермінованого хаосу в просторі параметрів системи.

У подальших дослідженнях системи маятник–електродвигун передбачається широке використання побудови областей стійкості для спрощення процедури побудови карт динамічних режимів і дослідження різних типів хаотичних атракторів системи маятник–електродвигун.

1. *Kononenko V.O.* Vibrating system with a limited power-supply. – London: Pliffe, 1969. – 236 p.
2. *Краснопольская Т.С., Швець А.Ю.* Хаотические режимы взаимодействия в системе “маятник–источник энергии” // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 5. – С. 90–96.
3. *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos. – 1993. – 3, N 3. – P. 387–395.
4. *Краснопольская Т.С., Швець А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИКИ, 2008. – 280 с.
5. *Швець О.Ю.* Детермінований хаос при коливаннях фізичного маятника // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2006. – № 4. – С. 85–91.
6. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова и др.* – М.; Ижевск: ИКИ, 2003. – 530 с.