УДК 512.64

Р.В. Скуратовський

ПРОБЛЕМА СКІНЧЕННОЇ СПРЯЖЕНОСТІ І СПІЛЬНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ РАДІУС

It were investigated folowing things norm of vector under periodic and aperiodic action matrixes from finite set M of matrix with rational elements is bounded, AZR and PZR for action of such set. A difficult case is considered, when every matrix from M has eigenvalues such that some from them are greater than 1 and other less then 1. A lower spectral radius (LSR) is studied for such set M by opening of question about that, whether is M characteristics of AZR and PZR. The conducted research witnessed of the eventual set of matrices $\tilde{M}$, which satisfies certain terms, has not PAS and AAS, it is proofed that $\hat{\rho}(\tilde{M}) \geq 1.$ Conditions of AZR and PZR is holds for $\tilde{M}[\mathbb{Q}]$ and vectors from $\mathbb{Q}^n.$ It is established existing of the systems of matrices $\tilde{M}$ are above Q for which takes place ES.

Вступ

Питання скінченної спряженості FC було представлене Лагарісом—Вонгом у 1995 р. через її зв'язок з проблемою спільного спектрального радіуса для скінченної множини матриць певного виду. В основному ця задача розглядається у зв'язку з визначенням спектрального радіуса і, як доведено в [1, 2], має клас складності NP. У [3] введено рекурсію $x_{t+1} \in \{A_{i_t} x_t : A_{i_t} \in M,\ t \in \mathbb{N}\},$ де послідовність i_t може бути довільним словом з алфавіту M. Послідовність $x_{i+1} = A_i x_i,$ яка задовольняє включення $x_{t+1} \in \{A_{i_t} x_t : A_{i_t} \in M\},$ є траєкторією для i_t. Дискретними лінійними включеннями називають множину всяких можливих векторів $(x_k): k \geq 0$ з $\mathbb{R}^n,$ згенерованих за рекурсивною схемою $x_{t+1} \in \{A_{i_t} x_t : A_{i_t} \in M\}$ [3]. Цю множину позначають DLI(M). Важливими є поняття AAS — абсолютна асимптотична стабільність, введене в [3], тобто $\lim x_t = 0, \forall (i_t)$ і $\forall (x_t) \in \in \mathrm{DLI}(M),$ $t \geq 0,$ та PAS — періодична асимптотична стабільність, а саме для кожного (i_t) і скінченного $A_w = A_{i_m} A_{i_{m-1}} \ldots A_{i_1}$ має місце $\lim\limits_{k \to \infty} (A_w)^k = 0.$ Згідно з теоремою у [3] PAS еквівалентне, тому що спектральний радіус менший одиниці. Також відома теорема, де для скінченного набору матриць M з обмеженими нормами виконується еквівалентність $\hat{\rho}(M) < 1 \Leftrightarrow DLI(M)$ є AAS. Саме тому дослідимо деякі набори M на AAS і PAS, оскільки між ними є зв'язок.

Ми розглядаємо систему відображень $x_{i+1} = = M_i x_i,$ де M — це скінченний набір матриць, і $M_i \in M$ для кожного $i \geq 0.$ У термінах динамічних систем припущення FC може мати таку форму [3, 4]: якщо всі періодичні добутки матриць з M збігаються до 0 (або навпаки розбігаються), то так само себе поводять і всі аперіодичні добутки. При цьому на набори матриць M можуть накладатись ті чи інші умови. Неважко довести, що для скінченного набору M, де усі $M_i[\mathbb{Q}]$: кожне $\lambda_j < 1,$ буде мати місце FC. Справді, норму ітерованого елемента можна оцінити зверху $\|x_i\|_1 < < \|\lambda x_{i-1}\|_1,$ де λ — найбільше за модулем власне значення, а за згадуваною умовою $\forall A_w : \rho(A_w) < 1.$

Постановка задачі

Мета роботи — дослідити, чи є обмеженість норми вектора при періодичній чи аперіодичній дії матриць зі скінченного набору матриць з раціональними коефіцієнтами, а також чи наявні AZR і PZR [3]. Зрозуміло, якщо всі власні числа матриць менші одиниці своїм абсолютним значенням, то відповідь позитивна, а якщо більші одиниці, то негативна. Важливо дослідити складний випадок, коли кожна матриця з M має власні числа як більші, так і менші одиниці, саме його і розглянемо детально. Одним із завдань є вивчення *нижнього спектрального радіуса* (LSR) для такого набору M за допомогою розкриття питання про те, чи має M властивості AZR і PZR.

Основні поняття і результати

Відомо теорему з [3] про зв'язок LSR і PZR, яка встановлює еквівалентність між PZR та існуванням скінченного слова w такого, що $\rho(M) < 1.$ Також важливо дослідити, яку стабільність має система: абсолютну (AS) чи абсолютну експоненційну (AES) [3].

Досліджуємо ітераційний процес, що починається з ініціального вектора $\vec{v}_0$. Далі ітеруємо за формулою $v_i = M_i \ldots M_1 M_0 v_0,$ де $M_i \in M,$ тому, можливо, $M_i = M_j$, $i \neq j$. Спектральний радіус набору M характеризує, як швидко росте норма $\vec{v}_t$ зі зростанням i [2, 3], зокрема, всі траєкторії збігатимуться до ініціального вектора, якщо $\rho(M) < 1$. За допомогою нерівності Коші—Адамара та детермінантів матриць можна зробити висновки і про зростання норми ітерованого вектора з невід'ємними координатами під дією добутків матриць, а потім, застосовуючи теореми про зв'язок AZR і LSR, знайти діапазон LSR.

Розглянемо гіпотезу скінченної спряженості. У термінах динамічних систем це припущення може мати таку форму: якщо всі періодичні добутки матриць з M збігаються до 0, то так само поводяться й усі аперіодичні добутки.

Нагадаємо, що спектральний радіус — це $\rho(A) = \max|\lambda_i|$ для кожного лінійного ендоморфізму $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ [3]. Спільний спектральний радіус (JSR) — це

$$\widehat{\rho}(M) := \limsup_{k\to\infty} (\rho_k(M))^{1/k},$$

де $(\rho_k(M)) := \sup\left\{\rho\left(\prod_{i=1}^{k} M_i\right) : M_i \in M,\ 1 \le i \le k\right\}.$

У термінах комбінаторики слів FC стверджує, що $\widehat{\rho}(M)$ може бути завжди досягнутий періодичним добутком матриць, тобто $\exists A_w = A_{i_m} \dots A_{i_1}$, $A_{i_j} \in M$, $m < \infty$ таке, що $\widehat{\rho}(M) = \rho(A_w)^{1/m}$. Нещодавно було доведено хибність наведеного в [3] припущення про скінченну спряженість для цілочислових матриць. Існування контрприкладу показано в [3] через використання ІСФ (ітерована система функцій), спеціальних відображень і послідовностей Штурма.

Також довели хибність скінченної спряженості В.Д. Блондел, А.А. Владіміров та ін. [4], хоча їх доведення не є конструктивними і залишають відкритим питання про явний контрприклад для набору матриць з раціональними компонентами, що порушує гіпотезу скінченної спряженості. Такий приклад наведено в цій статті.

Теорема 1. Існує скінченний набір матриць $\tilde{M}$ над $\mathbb{Q}$, кожна з яких має власні числа $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_k}$, $k \le n$, що залишає обмеженою норму вектора при нескінченній аперіодичній дії на $\forall \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$, також має місце AZR.

Оскільки у формулюванні поняття AZR [3] достатньо існування послідовності (i_t): $\lim_{t\to\infty} \vec{u}_t = 0$ для довільного $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{u}_0\| \le 1$, а таку послідовність можна побудувати аналогічно до наведеної нижче в цій теоремі, то буде наявна і AZR. Вкажемо принцип побудови такого набору $\tilde{M}$. Розглянемо, не зменшуючи загальності, матрицю 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

і виведемо умову для вектора $\vec{u} = (x, y)$, при якій виконується нерівність $\|\mathrm{M}\vec{u}\| \le \|\vec{u}\|$. Для цього нам потрібно, щоб виконалась нерівність

$$\left(\frac{9x}{10}\right)^2 + \left(\frac{9y}{8}\right)^2 \le x^2 + y^2, \tag{1}$$

що рівнозначно $\frac{17y^2}{64} \le \frac{19x^2}{100}$, тобто $|y| \le \le \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{19}{17}\right)^{1/2} |x|$. Аналогічно можна розглянути і строгу нерівність. Іншими словами, ця нерівність виконується в тому випадку, коли вектор $\vec{u}$ утворює з віссю абсцис кут, не більший $\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$. Тобто оператор зменшує норму вектора, якщо він належить сектору з кутами від $0 \le \varphi \le \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$, назвемо його *сектором стиску*. В загальному випадку це сектор, де виконується нерівність $(\lambda_1 x)^2 + (\lambda_2 y)^2 \le x^2 + y^2$. Крім того, сектором *регулярного* стиску назвемо такий сектор, де виконується умова $\|M_{i_t}\vec{u}_{t-1}\| \le \le \mu\|\vec{u}_{t-1}\|$, $0 < \mu < 1$, $M_{i_t} \in \tilde{M}$. Під кутом, який утворює цей вектор і пряма, розуміємо *мінімальний* з двох суміжних кутів, утворених ними. Також розглянемо матрицю

$$R = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

і застосуємо її для спрягання матриці M. А саме, нехай $A_1 = M$, $A_2 = RMR^{-1}$, $A_3 = R^2MR^{-2}$. Матриця R є матрицею повороту на кут $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$ (цей аргумент є співвідношенням чисельників, рівних тангенсу), тобто вона зберігає норму довільного вектора. Зазначимо, що власні вектори та сектор стиску матриці A_2 такі ж, як в A_1, тільки повернуті на кут $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$. Тому умова $\|A_2\vec{u}\| \le \|\vec{u}\|$ рівнозначна умові $\|R^{-1}A_2\vec{u}\| \le$ $\le \|R^{-1}\vec{u}\|$, тобто $\|MR^{-1}\vec{u}\| \le \|R^{-1}\vec{u}\|$. Тепер, якщо ми повторимо для вектора $R^{-1}\vec{u}$ ті самі міркування, що й для $\vec{u}$, то отримаємо, що нерівність $\|A_2\vec{u}\| \le \|\vec{u}\|$ виконується, коли вектор $R^{-1}\vec{u}$ утворює з віссю абсцис кут, не більший $\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$. А якщо застосувати до вектора $R^{-1}\vec{u}$ й осі абсцис перетворення R, то між вектором $\vec{u}$ і прямою, отриманою після повороту осі абсцис на кут $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$, буде кут, не більший $\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$. Аналогічно виконується нерівність $\|A_3\vec{u}\| \le \|\vec{u}\|$, якщо $\vec{u}$ утворює кут, не більший $\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$, з прямою, що виходить при повороті осі абсцис на кут $2\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$.

Нескладно перевірити, що $60° < \operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right) <$ $< 2\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$, таким чином маємо накриття верхньої півплощини секторами стиску, а нижньої — вертикальними кутами цих самих секторів. Тому будь-який не нульовий вектор $\vec{u}$ утворює кут, який не більший $\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{19}{17}\right)^{1/2}\right)$, хоча б з однією з таких прямих: вісь абсцис, образ осі абсцис при повороті на $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$ (під дією оператора R) або образ осі абсцис при повороті на $2\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)$ (при дії оператора R^2). У будь-якому випадку, з множини матриць $\{A_1, A_2, A_3\}$ завжди можна вибрати таку $A_i \in \tilde{M}$, $1 \le i \le 3$, що $\|A_i\vec{v}\| \le \|\vec{v}\|$, $1 \le i \le 3$. Таким чином, для будь-якого стартового вектора $\vec{u}_0$ можна побудувати послідовність $\forall (i_t)_{t=0}^{\infty}$, $t \in \mathbb{N}$, $i_t \in \{1, 2, 3\}$, для якої послідовність $\forall(\vec{u}_t) \in \mathrm{DLI}(\tilde{M})$ буде обмеженою, більше того $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{u}_t = 0$, тобто виконується $\lim\limits_{t\to\infty} \|\vec{u}_t\| = 0$ або AZR, бо нерівність (1) завжди можна посилити так: $\|M_{i_t}\vec{u}_{t-1}\| \le \mu\, \|\vec{u}_{t-1}\|, 0 < \mu < 1$. Зрозуміло, що для набору матриць $\widehat{M}$, де $\forall A_i \in \widehat{M}$, $\rho(A_i) < 1$, теорема 1 теж має місце.

Теорема 2. Для набору $\tilde{M}[\mathbb{Q}]$ існує нескінченно багато ініціальних векторів $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ таких, що для довільної *препеpіодичної* (тобто періодичної, починаючи з якогось місця) послідовності (i_t) $(\forall t \in \mathbf{N} : i_n \in \{1, \ldots, k\})$, і $\forall(\vec{u}_t) \in$ $\in \mathrm{DLI}(\tilde{M})$, де $|\tilde{M}| = k$, відповідно $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ не є обмеженою і не має PZR. Крім того, для довільного ініціального вектора $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ та $\tilde{M}[\mathbb{Q}]$ і відповідних аперіодичних (i_t) наявні AZR і умова, що $(\|\vec{u}_t\|)_{t=0}^{\infty}$ є обмеженою.

Розглянемо деяку періодичну $(i_t)_{t=0}^{\infty}$. Нехай вона має період d і препеpіод m, тобто для будь-якого $n > m : i_n + d = i_n$. Нехай $B = A_{i_m} A_{i_{m-1}} \ldots$ A_{i_1} і $C = A_{i_{m+d}} A_{i_{m+d-1}} \ldots A_{i_{m+1}}$. Тоді, щоб $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ була обмеженою, необхідно (і в принципі, достатньо), щоб обмеженою була її підпослідовність $(\vec{u}_{m+nd})_{t=0}^{\infty}$, тобто послідовність $B\vec{u}_0, CB\vec{u}_0, \ldots,$ $C^n B\vec{u}_0$. Зазначимо, що $\det(\mathrm{C}) = \left(\frac{81}{80}\right)^d$, що більше одиниці. Тому або всі власні числа C за модулем більші одиниці, або C має тільки одне (причому некратне) власне число $\lambda_1 : |\lambda_1| \le 1$. У першому випадку послідовність $(C^n B\vec{u}_0)_{n=0}^{\infty}$ буде обмеженою тільки тоді, коли $B\vec{u}_0$ буде нульовим, а так як $\det(B) = \left(\frac{81}{80}\right)^m \ne 0$, то останнє рівнозначне, тому що $\vec{u}_0$ буде нульовим. У другому випадку $(C^n B\vec{u}_0)_{n=0}^{\infty}$ буде обмеженою тільки тоді, коли $B\vec{u}$ колінеарний вектору $\vec{v}_1$, який відповідає власному числу $\lambda_1 : |\lambda_1| \le 1$ матриці C. Через невиродженість B це означає, що $\vec{u}_0$ колінеарний $B^{-1}\vec{v}_1$ (тобто праобразу власного вектора матриці C, який отримано під дією B^{-1}). Таким чином, для заданої майже періодичної $(i_t)_{t=0}^{\infty}$ простір векторів $\vec{u}_0$, для яких відповідна $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ обмежена, має розмірність не більше одиниці. Іншими словами, якщо ми накладемо умову $\|\vec{u}_0\| = 1,$ то існує не більше двох векторів $\vec{u}_0$, для яких при заданій майже періодичній $(i_t)_{t=0}^{\infty}$ відповідна $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ буде обмеженою. Всіх можливих препеперіодичних послідовностей $(i_t)_{t=1}^{\infty}$, очевидно, зчислене число (а ось неперіодичних послідовностей континуум, як і ірраціональних чисел континуум). Тому існує такий стартовий вектор $\vec{w}$, для якого відповідна послідовність $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ (задається співвідношеннями $\vec{u}_n = A_{i_n}\vec{u}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_0 = \vec{w}$) не буде обмеженою ні для якої майже періодичної послідовності $(i_t)_{t=1}^{\infty}$. Таким чином, набір $\tilde{M}$ не задовольняє умови PZR, бо там є вимога довільності стартового елемента (вектора). Тому LZR для $\tilde{M}$ не є строго меншим одиниці. З відсутності AAS для $\mathrm{DLI}(\tilde{M})$ випливає, що $\widehat{\rho}(\tilde{M}) \ge 1,$ звідси $\rho(A_w) \ge 1.$

У той же час з огляду на міркування, викладені в теоремі 1, деяка (аперіодична) послідовність $(i_t)_{t=1}^{\infty}$, для якої $(\vec{u}_t)_{t=0}^{\infty}$ буде обмеженою, все ж існує. Для набору матриць $\widehat{M}$, де $\forall A_i \in \widehat{M}$, $\rho(A_i) < 1$ має місце PZR і PAS, бо періодична дія – це дія однією матрицею C, $\rho(C) < 1.$

***Наслідок* 1.** Існує ініціальний вектор $\vec{u}_0 \in \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$ такий, що для довільного $\tilde{M}\,[\mathbb{Q}]$ немає місця ні PZR, ні існуванню препеперіодичної дії, яка залишає його норму обмеженою.

Дамо конструктивне доведення. Справді, такий ініціальний вектор $\vec{w} = \vec{u}_0$ (для якого нема ні обмеженої дії, ні PZR) можна вказати явно. Для препеперіодичних $(i_t)_{t=1}^{\infty}$ відповідні матриці B і C матимуть лише раціональні елементи. Тому відповідні вектори $\vec{v}_1$ ($\vec{v}_1$ – власний вектор, відповідний $\lambda_1 : |\lambda_1| \le 1$), а отже, і $B^{-1}\vec{v}_1$ будуть мати відношення координат, які є раціональним числом або ж квадратичною ірраціональністю (тобто коренем деякого квадратичного многочлена з раціональними коефіцієнтами). Тому вектор $\vec{w}$, у якого відношення координат – не квадратична ірраціональність, очевидно, не підходить ні для однієї препеперіодичної $(i_t)_{t=1}^{\infty}$. Наприклад, таким буде вектор $\vec{w} = \left(\frac{1}{(1+2^{2/3})^{1/2}}, \frac{2^{1/3}}{(1+2^{2/3})^{1/2}}\right)$. Справді, вектор з точністю до пропорційності визначається саме відношенням координат, а оскільки власне число матриці C є коренем квадратного рівняння і відповідний власний вектор $\vec{v}_1$ отримується з рівняння $C\vec{v}_1 - \lambda_1\vec{v}_1 = \vec{0}$, то з огляду на те, що C матриця над $\mathbb{Q}$, маємо ірраціональність відношення координат у $\vec{v}_1$.

Якщо $\vec{v}_1$ (власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_1 : |\lambda_1| \le 1$) матриці C має раціональні координати і матриця B – добуток матриць з препеперіодічної частини, теж матриця з раціональними елементами, (тоді $B^{-1}v_1$ теж має раціональні координати), то для такої послідовності існує "поганий" стартовий вектор (тобто такий, який жодна така послідовність не залишить обмеженим), таким буде $\vec{u}_0$, у якого хоч одна координата – ірраціональне число. Але під дією матриці з дійсними елементами такий (ірраціональний) $\vec{u}_0$ завжди може бути перетворений у раціональний вектор так, як система 2 на 2 буде розв'язна за умови, що матриця не вироджена (а оскільки невідомих є чотири, тому розв'язна), чого неможливо досягти, використовуючи лише матриці над $\mathbb{Q}$, тобто для нашого $\tilde{M}$. Якщо ж $\vec{u}_0$ має раціональні координати, то, перетворивши його матрицею B (над $\mathbb{Q}$), отримуємо вектор $\vec{u}_n$ над $\mathbb{Q}$, а довільне $\mathbb{Q}$ число може бути представлене як корінь квадратного рівняння. Для цього достатньо використати теорему Вієта для побудови відображення з множини коренів у множину коефіцієнтів і показати, що воно взаємно однозначне, тому можна побудувати матрицю C над $\mathbb{Q}$, яка має такий власний вектор, який рівний $\vec{u}_n$. Отже, маємо наслідок.

***Наслідок* 2.** Для $\vec{u}_0 \in \mathbb{Q}^n$ (чи навіть $\vec{u}_0 = (u_{01}, u_{02})$, $u_{01} : u_{02} = a + b\sqrt{c}$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$) існує скінченний набір $\tilde{M}\,[\mathbb{Q}]$, для якого мають місце існування обмеженої $(\|\vec{u}_t\|)_{t=0}^{\infty}$ та одночасно PZR і AZR, аналогічно для $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ $(\|\vec{u}_t\|)_{t=0}^{\infty}$ і набору $\tilde{M}\,[\mathbb{R}]$.

Існує зчислена кількість $\tilde{M}$, де всі $\lambda_j < 1$, і наявна навіть ES [3], тому що для довільної (i_t) існують $c,\ q(M) < 1$ такі, що виконується нерівність $\|x_n\| < cq^n\,\|x_0\|$. Для досліджуваного нами набору M немає ні AS, ні AES. З відсутності PAS для $\mathrm{DLI}(\tilde{M})$ за лемою 3.6 з [3] отримуємо, що спектральний радіус $\rho(A_w) \geq 1$ для деякого скінченного слова w. Зауважимо, що для набору $\widehat{M}$, де всі $\lambda_j < 1$, може існувати періодична дія, яка збільшує норму вибраних $\vec{u}_0,\ \vec{v}_0$, наприклад, $A_1 : A_1\vec{u} = 0,9\vec{u}$ і $A_1\vec{v} = 0,8\vec{v}$, де $\vec{u} = (1;0)^T,\ \vec{v} = (1;0,01)^T$ є власними векторами. Візьмемо $\vec{g} = \vec{v} - \vec{u} = (0;\ 0,01)^T$, тоді $A_1\vec{g} = A\vec{v} - A\vec{u} = (-0,1;0,008)^T$, тобто $\|\vec{g}\| < \|A\vec{g}\|$. Аналогічно діють $A_2 \ldots A_i$.

Для невід'ємних матриць над $\mathbb{Z}$ та векторів, які утворюють кут $\varphi : \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ з віссю абсцис, теж існує обмежена дія. *Сектор замкненості* $(\mathrm{cls}(A))$ оператора A відносно векторів з $\varphi : \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ такий, де для вектора $\vec{u} = (x, y)$ виконуються умови $a_{11}x + a_{12}y < 0$ і $a_{21}x + a_{22}y > 0$. Взявши перетин $\mathrm{cls}(A)$ з сектором стиску, знайдемо сектор допустимої дії на вектори $\vec{u}$, які утворюють кут $\varphi : \pi / 2 < \varphi < \pi$ з віссю абсцис, тому діяти на $\vec{u}$ можна зменшуючи його норму та повертаючи $\vec{u}$ в межах $\varphi : \pi / 2 < \ < \varphi < \pi$ в обох напрямках. Як засвідчили розрахунки, другу чверть $\left(\varphi : \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$ можна покрити секторами допустимої дії матриць зі скінченного набору $\breve{M} : |\breve{M}| < 80$. Оскільки матриця з одних нулів не розглядається, існує вектор, що не належить сектору стискаючої дії, це $u = (-a,\ a)^T$, він заборонений.

Висновок

Проведене дослідження засвідчило, що для скінченного набору матриць $\tilde{M}$, де усі $M_i[\mathbb{Q}]$: існує $\lambda_j < 1$, а решта $\lambda_j \geq 1$, відсутні умови PAS і AAS. А з відомої теореми [3], що стверджує $\hat{\rho}(\tilde{M}) < 1 \Leftrightarrow DLI(M)$ володіє властивістю AAS, і доведеною тут відсутністю AAS, слідує, що $\hat{\rho}\left(M\right) \geq 1$ для обмеженого $\tilde{M}$.

Доведено, що при дії на вектори з $\mathbb{Q}^n$ для наборів $\tilde{M}$, де усі M_i: існує $\lambda_j < 1$, а решта $\lambda_i \geq 1$, виконуються умови AZR і PZR, які еквівалентні за теоремою з [3, с. 63]. Тому згідно з [3] існує скінченне слово $w : \rho(A_w) < 1$. Умови FC для $\tilde{M}\,[\mathbb{Q}]$ не виконуються, бо відсутні і AAS, і PAS. Крім того, існують набори $\widehat{M}$, де усі M_i: кожне $\lambda_j < 1$, але FC не виконується навіть для векторів з $\mathbb{Q}^n$, бо є PAS, але немає AAS.

Встановлено, що існують системи матриць M, де всі $|\lambda_j| < 1$, для яких має місце навіть ES, бо для довільної (i_t) існують такі $c,\ q(M) < 1$, що виконується нерівність $\|x_n\| < cq^n\,\|x_0\|$. Для досліджуваного нами набору $\tilde{M}$ відсутні і AS, і AES.

Перспективою продовження цього дослідження є узагальнення результату на матриці з цілими невід'ємними елементами, зокрема, матриці над скінченним полем F_2.

1. *Blondel V.D., Nesterov Yu., Theys J.* Computing the Joint Spectral Radius of a Set of Matrices // 23rd Benelux Meeting on Systems and Control, Helvoirt. The Netherlands, paper FrP06-3. – March 17–19. – 2004. –P. 103.
2. *Blondel V.D., Gaubert S., and Tsitsiklis J.N.* Approximating the Spectral Radius of Sets of Matrices in the Max-Algebra is NP-hard // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – P. 1762–1765.
3. *Theys Jacques.* Joint Spectral Radius: Theory and Approximations. Ph. thesis in Combinatorics and Optimization. Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Docteur en Sciences Appliques. – 2005. – 198 p.
4. *Blondel V.D., Theys J. and Vladimirov A.A.* An Elementary Counterexample to the Finiteness Conjecture // SIAM J. on Matrix Analysis. – 2003. – **24**, N 4. – P. 963–970.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
12 травня 2011 року