УДК 519.3

І.М. Александрович, М.В. Сидорова

ОБЕРНЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА З ФУНКЦІЄЮ БЕССЕЛЯ В ЯДРІ

In this article, we prove the formulas of inversion of integral presentation of p-analytical functions with characteristic $p = e^{\alpha x}$ та $p = e^{\alpha x} y^k$ (α, k — const > 0). P-analytical functions with these characteristics are closely related to the Helmholtz equation and generalized axisymmetric Helmholtz equation fundamentally used for obtaining the integral presentation of $e^{\alpha x} y^k$-analytic functions by arbitrary analytic functions and their inversion formulas. Specifically, we determine the conditions, under which the direct and inverse formulas of integral presentation of $e^{\alpha x}$-analytical and $e^{\alpha x} y^k$-analytical functions are the solutions of integral equations of Volterra type.

Вступ

Розвиток теорії інтегральних рівнянь першого роду, зокрема з функцією Бесселя в ядрі, значною мірою стимулюється її широкими застосуваннями до задач плоскої контактної теорії пружності, теорії повзучості і теорії пластичності, електродинаміки, до крайових задач для рівнянь і систем з частинними похідними.

Інтегральне рівняння, еквівалентне досліджуваній крайовій задачі, з'являється, як правило, внаслідок таких міркувань. Розглядається деяке інтегральне зображення розв'язків рівняння в частинних похідних. Під знаком інтеграла стоять невідома функція (густина інтеграла) і задане ядро — функція двох змінних, одна з яких є змінною інтегрування, а по другій змінній ядро є розв'язком даного рівняння в частинних похідних. Підставляючи такий інтеграл в крайову умову, отримаємо інтегральне рівняння, властивості ядра якого повністю визначаються властивостями ядра інтегрального зображення.

Про розмаїття застосування методу інтегральних рівнянь існує багато наукової літератури (див., наприклад, [1–3]).

Обернення інтегральних рівнянь Вольтерра з функцією Бесселя в ядрі, яким присвячено дану статтю, стане важливим поповненням методу інтегральних рівнянь.

Постановка задачі

Мета даної статті — вивести формули обернення інтегрального зображення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = e^{\alpha x}$ і $p = e^{\alpha x} y^k$ ($\alpha, k - \text{const} > 0$) для областей двох різних типів; вивчити умови, при яких інтегральне зображення розв'язків $e^{\alpha x}$-аналітичних функцій, а також $e^{\alpha x} y^k$-аналітичних функцій та формули їх обернення є розв'язками інтегральних рівнянь типу Вольтерра; розв'язати інтегральні рівняння першого роду типу згортки з функцією Бесселя в ядрі.

Необхідні означення і попередні відомості

Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини $z = x + iy$, симетрична відносно дійсної осі.

***Означення* 1.** Область G, симетрична відносно дійсної осі, належить класу A, якщо вона містить повністю відрізок, що з'єднує дві будь-які її точки з однаковими абсцисами.

***Означення* 2.** Область G, симетрична відносно дійсної осі, належить класу B, якщо вона містить повністю відрізок прямої, проведеної з нескінченно віддаленої точки в довільну її точку z паралельно осі y.

Якщо $\omega(z)$ і $g(z)$ — дві довільні аналітичні в області G функції, уявні частини яких на дійсній осі рівні нулеві, то функція

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z),$$

де

$$w_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) =$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{2}x}\beta(x, y) + \frac{\alpha}{2} y e^{-\frac{\alpha}{2}x} \int_0^y \beta(x, \tau) \frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2 - \tau^2}\right)}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} d\tau +$$

$$+ ie^{\frac{\alpha}{2}x} \int_0^y \left(\frac{\partial \beta(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\alpha}{2}\beta(x, \tau) \right) I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2 - \tau^2}\right) d\tau, \quad (1)$$

$$w_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y) =$$

$$= -e^{-\frac{\alpha}{2}x} \int_0^y \left(\frac{\partial \gamma(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\alpha}{2}\gamma(x, \tau) \right) I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2 - \tau^2}\right) d\tau +$$

$$+i\left(e^{\frac{\alpha}{2}x}\gamma(x,y)+e^{\frac{\alpha}{2}x}\frac{\alpha}{2}\times\right.$$

$$\left.\times y\int_0^y \gamma(x,\tau)\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}d\tau\right), \qquad (2)$$

$\beta(x,y)=\mathrm{Re}\left[e^{\frac{\alpha}{2}z}\omega(z)\right]$, $\gamma(x,y)=\mathrm{Re}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}z}g(z)\right]$, буде $e^{\alpha x}$-аналітичною в області G, тобто, задовольнятиме систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z}&=e^{-\alpha x}\frac{\partial w}{\partial z},\\ \frac{\partial w}{\partial \bar z}&=-e^{-\alpha x}\frac{\partial w}{\partial \bar z}\end{aligned} \qquad (3)$$

та умову

$$w(x)=\omega(x)+ig(x). \qquad (4)$$

Функція $w(z)=w_1(z)+w_2(z)$ становить загальне інтегральне зображення в області G класу A $e^{\alpha x}$-аналітичної функції через дві довільні аналітичні в цій області функції.

Якщо ж $\omega(z)$, $g(z)$ — аналітичні функції в області G класу B, які на нескінченності задовольняють умову

$$\begin{aligned}&e^{\frac{\alpha}{2}z}\omega(z)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}z-\frac{3}{4}\pi i\right)z^{-\frac{1}{2}}=O\left(\frac{1}{|z|^{\varepsilon}}\right),\\ &e^{-\frac{\alpha}{2}z}g(z)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}z-\frac{3}{4}\pi i\right)z^{-\frac{1}{2}}=O\left(\frac{1}{|z|^{\varepsilon}}\right),\end{aligned} \qquad (5)$$

то функції

$$w_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)=$$

$$=e^{-\frac{\alpha}{2}x}\beta(x,y)-\frac{\alpha}{2}ye^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty\beta(x,\tau)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}d\tau-$$

$$-ie^{\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty\left(\frac{\partial\beta(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,\tau)\right)J_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)d\tau, \qquad (6)$$

$$w_2(z)=u_2(x,y)+iv_2(x,y)=$$

$$=e^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty\left(\frac{\partial\gamma(x,\tau)}{\partial x}+\frac{\alpha}{2}\gamma(x,\tau)\right)J_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)d\tau+$$

$$+i\left(e^{\frac{\alpha}{2}x}\gamma(x,y)-\frac{\alpha}{2}ye^{\frac{\alpha}{2}x}\times\right.$$

$$\left.\times\int_y^\infty\gamma(x,\tau)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}d\tau\right) \qquad (7)$$

становлять інтегральне зображення $e^{\alpha x}$-аналітичної функції в області з нескінченно віддаленою точкою.

***Зауваження* 1.** Надалі вважатимемо $g(z)=0$.

***Зауваження* 2.** Якщо область G є одночасно областю як класу A, так і класу B (наприклад, півплощина), $\omega(z)$ — аналітична в G функція, що задовольняє умову $\mathrm{Im}[\omega(z)]_{z=x}=0$, а на нескінченності умову (5), то розв'язки системи (3), визначені відповідно рівностями (1), (2) і (6), (7), збігаються. Цей факт дуже важливий при розв'язуванні крайових задач.

Основні результати

Інтегральні зображення розв'язків системи (3) розглядаються як інтегральні рівняння типу Вольтерра.

Теорема 1. Інтегральні зображення (1), (2) становлять інтегральні рівняння типу Вольтерра, розв'язок яких має вигляд

$$\beta(x,y)=e^{\frac{\alpha}{2}x}u_1(x,y)-$$

$$-\frac{\alpha}{2}ye^{\frac{\alpha}{2}x}\int_0^y u_1(x,y)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}d\tau,$$

$$\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}x}v_1(x,y)-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{\alpha}{2}x}\frac{\alpha}{2}\int_0^y v_1(x,\tau)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}\tau d\tau\right], \qquad (1')$$

$$\frac{\partial\gamma(x,y)}{\partial x}+\frac{\alpha}{2}\gamma(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[-e^{\frac{\alpha}{2}x}u_2(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}x}\int_0^y u_2(x,\tau)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}\tau d\tau\right], \qquad (2')$$

$$\gamma(x,y)=e^{-\frac{\alpha}{2}x}v_2(x,y)-\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}x}y\times$$

$$\times\int_0^y v_2(x,\tau)\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}d\tau.$$

Доведення. До формул (1), (2) застосуємо інтегральне перетворення Карсона–Лапласа [5], а також теорему про згортку для перетворення Карсона–Лапласа.

Теорема 2. Якщо аналітичні функції $\omega(z)$, $g(z)$ задовольняють умову (5), то розв'язок інтегральних рівнянь (6), (7) матиме вигляд

$$\beta(x,y)=e^{\frac{\alpha}{2}x}u_1(x,y)+\frac{\alpha}{2}ye^{\frac{\alpha}{2}x}\times$$

$$\times\int_y^\infty u_1(x,\tau)\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}d\tau,$$

$$\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}x}v_1(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty v_1(x,\tau)\tau\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}d\tau\right],\qquad(6')$$

$$\frac{\partial\gamma(x,y)}{\partial x}+\frac{\alpha}{2}\gamma(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\frac{\alpha}{2}x}u_2(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty u_2(x,\tau)\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}\tau d\tau\right],\qquad(7')$$

$$\gamma(x,y)=e^{-\frac{\alpha}{2}x}v_2(x,y)+$$

$$+\frac{\alpha}{2}ye^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_y^\infty v_2(x,\tau)\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}d\tau.$$

Доведення. Для одержання формул (6′), (7′) досить до кожної із формул (6), (7) застосувати перетворення Карсона–Лапласа, а також теорему про згортку для перетворення Карсона–Лапласа у випадку нескінченного проміжку, тобто

$$\int_x^\infty f(y)g(y-x)dy\leftrightarrow-\frac{\tilde f(p)\tilde g(-p)}{p}.$$

Нехай $D=G\cap\{y>0\}$, G – довільна однозв'язна область, симетрична відносно дійсної осі.

Якщо $\omega(z)$ – довільна аналітична в області D функція, яка на дійсній осі набуває дійсних значень, то функція

$$\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)=$$

$$=2C_k\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^{1-k}e^{-\frac{\alpha}{4}(z+\bar z)}\operatorname{Im}\int_a^z e^{\frac{\alpha}{2}\sigma}\omega(\sigma)\otimes$$

$$\otimes{}_0F_1\left[\frac{k}{2};\frac{\alpha^2}{16}(z-\sigma)(\bar z-\sigma)\right][(z-\sigma)(\bar z-\sigma)]^{\frac{k}{2}-1}d\sigma+$$

$$+i2\frac{C_k}{k}e^{\frac{\alpha}{4}(z+\bar z)}\operatorname{Im}\int_a^z\omega'(\sigma)e^{\frac{\alpha}{2}\sigma}{}_0F_1\left[\frac{k}{2}+1;\right.\qquad(8)$$

$$\left.\frac{\alpha^2}{16}(z-\sigma)(\bar z-\sigma)\right][(z-\sigma)(\bar z-\sigma)]^{\frac{k}{2}}d\sigma,$$

$$C_k=\left\{\int_0^\pi\sin^{k-1}\theta d\theta\right\}^{-1},$$

де ${}_0F_1[v;z]$ – функція Бесселя–Кліффорда [5], буде $e^{\alpha x}y^k$-аналітичною в області D, тобто задовольнятиме систему

$$e^{\alpha x}y^k\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad e^{\alpha x}y^k\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(9)$$

та умову

$$v(x,0)=0.\qquad(10)$$

Формула (8) встановлює взаємно однозначну відповідність між $e^{\alpha x}y^k$-аналітичними і аналітичними в області D функціями, уявні частини яких на дійсній осі дорівнюють нулеві.

Теорема 3. Нехай інтегральне зображення $e^{\alpha x}y^k$-аналітичної функції $\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ через аналітичну в області G класу A функцію $\omega(z)$ має вигляд

$$\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)=$$

$$=2C_ky^{1-k}e^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_0^y\beta(x,\tau)(y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}-1}\otimes$$

$$\otimes{}_0F_1\left[\frac{k}{2};\frac{\alpha^2}{16}(y^2-\tau^2)\right](y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}-1}d\tau+$$

$$+i2\frac{C_k}{k}e^{\frac{\alpha}{2}x}\int_0^y\left[\frac{\partial\beta(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,\tau)\right]\otimes$$

$$\otimes\ {}_0F_1\left[\frac{k}{2}+1;\frac{\alpha^2}{16}(y^2-\tau^2)\right](y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}}d\tau, \qquad (11)$$

де $\beta(x,\tau)=\mathrm{Re}\left[e^{\frac{\alpha}{2}(x+i\tau)}\omega(x+i\tau)\right]$.

Тоді розв'язок інтегральних рівнянь (11) матиме вигляд

$$\beta(x,y)+i\left[\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}x}}{\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)C_k}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{d^m\left[\tau^{k-1}u(x,\tau)\right]}{(d\tau^2)^m}\otimes$$

$$\otimes\ {}_0F_1\left[m-\frac{k}{2}+1;-\frac{\alpha^2}{16}(y^2-\tau^2)\right]\tau(y^2-\tau^2)^{m-\frac{k}{2}}d\tau+$$

$$+ie^{-\frac{\alpha}{2}x}\frac{1}{C_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\frac{d^m v(x,\tau)}{(d\tau^2)^m}\otimes\right.$$

$$\left.\otimes\ {}_0F_1\left[m-\frac{k}{2}+1;\ -\frac{\alpha^2}{16}(y^2-\tau^2)\right]\frac{\tau}{(y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}-m}}d\tau\right\},$$

$$\frac{k}{2}-1\neq n,\ m=\left[\frac{k}{2}\right];$$

$$\beta(x,y)+i\left[\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}x}}{C_k n!}y\frac{d^{n+1}[y^{k-1}u(x,y)]}{(dy^2)^{n+1}}-e^{\frac{\alpha}{2}x}\frac{\alpha y}{2n!C_k}\times$$

$$\times\int_0^y\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}\frac{d^{n+1}[\tau^{k-1}u(x,\tau)]}{(d\tau^2)^{n+1}}\tau d\tau+ \qquad (12)$$

$$+i\frac{e^{\frac{\alpha}{2}x}}{C_k n!}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{d^{n+1}v(x,\tau)}{(dy^2)^{n+1}}-\frac{\alpha}{2}\int_0^y\frac{d^{n+1}v(x,\tau)}{(d\tau^2)^{n+1}}\otimes\right.$$

$$\left.\otimes\frac{J_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{y^2-\tau^2}}\tau d\tau\right\},\ \frac{k}{2}-1=n.$$

Теорема 4. Якщо область G належить класу B, $\omega(z)$ задовольняє умову $\mathrm{Im}\,\omega(z)|_{z=x}=0$, а при підході до нескінченності

$$e^{\frac{\alpha}{2}z}\omega(z)\left(e^{\frac{\alpha}{2}z}+e^{-\frac{\alpha}{2}z+\frac{k-1}{2}\pi i}\right)z^{\frac{k-1}{2}}=O\left(\frac{1}{|z|^{\varepsilon}}\right), \qquad (13)$$

то функція

$$\varphi(z)=u(x,y)+iv(x,y)=$$

$$=-2C_k y^{1-k}e^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_y^{\infty}\beta(x,\tau)\,{}_0F_1\left[\frac{k}{2};-\frac{\alpha^2}{16}(\tau^2-y^2)\right]\otimes$$

$$\otimes(\tau^2-y^2)^{\frac{k}{2}-1}d\tau+i2\frac{C_k}{k}e^{\frac{\alpha}{2}x}\int_y^{\infty}\left[\frac{\partial\beta(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,\tau)\right]\otimes$$

$$\otimes(\tau^2-y^2)^{\frac{k}{2}}\,{}_0F_1\left[\frac{k}{2}+1;\ -\frac{\alpha^2}{16}(\tau^2-y^2)\right]d\tau \qquad (14)$$

відображає аналітичні в області G класу B функції $\omega(z)$ у $e^{\alpha x}y^k$-аналітичні функції. Тут $\beta(x,\tau)=\mathrm{Re}\left[e^{\frac{\alpha}{2}(x+i\tau)}\omega(x+i\tau)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right]$.

Розв'язок рівняння (14) має такий вигляд:

$$\beta(x,y)+i\left[\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^m e^{\frac{\alpha}{2}x}}{\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)C_k}\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{d^m\left[\tau^{k-1}u(x,\tau)\right]}{(d\tau^2)^m}\otimes$$

$$\otimes(\tau^2-y^2)^{m-\frac{k}{2}}\,{}_0F_1\left[m-\frac{k}{2}+1;\ \frac{\alpha^2}{16}(\tau^2-y^2)\right]\tau d\tau+$$

$$+i\frac{(-1)^m e^{-\frac{\alpha}{2}x}}{\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)C_k}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{d^m v(x,\tau)}{(d\tau^2)^m}\otimes\right.$$

$$\left.\otimes(\tau^2-y^2)^{m-\frac{k}{2}}\tau\,{}_0F_1\left[m-\frac{k}{2}+1;\ \frac{\alpha^2}{16}(\tau^2-y^2)\right]d\tau,\right. \qquad (15)$$

$$\frac{k}{2}-1\neq n, m=\left[\frac{k}{2}\right].$$

$$\beta(x,y)+i\left[\frac{\partial\beta(x,y)}{\partial x}-\frac{\alpha}{2}\beta(x,y)\right]=$$

$$=(-1)^n y\frac{e^{\frac{\alpha}{2}x}}{C_k n!}\frac{d^{n+1}[y^{k-1}u(x,y)]}{(dy^2)^{n+1}}+(-1)^n e^{\frac{\alpha}{2}x}\frac{\alpha y}{2n!C_k}\times$$

$$\times\int_y^{\infty}\frac{d^{n+1}[\tau^{k-1}u(x,\tau)]}{(d\tau^2)^{n+1}}\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}\tau d\tau+$$

$$+i(-1)^n \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}x}}{C_k n!}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{d^{n+1}v(x,y)}{(dy^2)^{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{2}\int\limits_y^\infty \frac{d^{n+1}v(x,\tau)}{(d\tau^2)^{n+1}}\frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\tau^2-y^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-y^2}}\tau d\tau\right\},\quad \frac{k}{2}-1=n.$$

Доведення основних результатів

Доведення теореми 3 буде спиратись на формулу зв'язку між $e^{\alpha x}$- та $e^{\alpha x}y^k$-аналітичними функціями. Аналогічний зв'язок застосовується для доведення теореми 4.

Доведення теореми 3. Обернений до формули (11) інтегральний оператор можна побудувати, попередньо ввівши:

якщо в області класу A $u_1(x,y)$ – дійсна частина $e^{\alpha x}$-аналітичної функції, то

$$u(x,y)=2C_k y^{1-k}\int\limits_0^y u_1(x,\tau)(y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}-1}d\tau \qquad (16)$$

дійсна частина $e^{\alpha x}y^k$-аналітичної функції, і, відповідно, якщо $v_1(x,y)$ – уявна частина $e^{\alpha x}$-аналітичної функції, то

$$v(x,y)=2C_k\int\limits_0^y v_1(x,\tau)(y^2-\tau^2)^{\frac{k}{2}-1}\tau d\tau \qquad (17)$$

уявна частина $e^{\alpha x}y^k$-аналітичної функції.

Доведення теореми 4. Обернення формули (15) одержано на основі (6′), (7′), а також на основі того, що коли в області класу B $u_1(x,y)$ – дійсна частина $e^{\alpha x}$-аналітичної функції (формула (6)), то

$$u(x,y)=2C_k y^{1-k}\int\limits_y^\infty u_1(x,\tau)(\tau^2-y^2)^{\frac{k}{2}-1}d\tau \qquad (18)$$

дійсна частина $e^{\alpha x}y^k$-аналітичної функції, і, відповідно, якщо $v_1(x,y)$ – уявна частина $e^{\alpha x}$-аналітичної функції (формула (6)), то

$$v(x,y)=2C_k\int\limits_y^\infty v_1(x,\tau)(\tau^2-y^2)^{\frac{k}{2}-1}\tau d\tau \qquad (19)$$

уявна частина $e^{\alpha x}y^k$-аналітичної функції.

Висновки

У статті встановлено умови, при яких інтегральні зображення $e^{\alpha x}$- і $e^{\alpha x}y^k$-аналітичних функцій є інтегральним рівнянням Вольтерра 2-го та відповідно 1-го роду, а формули обернення є їх розв'язками. Тим самим запропоновано методи розв'язування рівнянь Вольтерра з функцією Бесселя в ядрі.

Отримані результати будуть використані для розв'язання крайових задач математичної фізики, зокрема для розв'язання задач теорії пластичності.

Ураховуючи перспективу одержаних наукових результатів, надалі будуть вивчатися властивості інтегральних рівнянь з новими узагальненими ядрами.

1. *Гахов В.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. *Положий Г.Н.* Теория и применение p-аналитических и *p,q*-аналитических функций. – К.: Наук. думка, 1973. – 422 с.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

1. *Сидоров М.В., Ляшко В.І., Александрович І.М.* Обернення деяких інтегральних рівнянь з ядром Бесселя // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 4. – С. 196–200.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. СМБ. – М.: Наука. – Т.1, 1969; т. 2. 1970.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
24 травня 2011 року