ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.98

М.В. Ахрамович, М.А. Муратов

АНТИКОМУТАЦІЯ ЛОКАЛЬНО ВИМІРНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ, ПРИЄДНАНИХ ДО АЛГЕБРИ ФОН НЕЙМАНА

The purpose of this paper is to complete the investigation of a q-commutation of two self-adjoint locally measurable operators affiliated with an arbitrary von Neumann algebra. Since possible values of the q parameter are 1 and −1 the problem reduces to consideration of conditions of commutation ($q = 1$) and anticommutation ($q = -1$) of locally measurable operators. The first case has been researched earlier. In this paper, we consider the case $q = -1$. An intersection of any two domains of locally measurable operators is a locally measurable subspace. By using this fact, we proved that for any self-adjoint locally measurable operators $T, S \in LS(M)$ a dense invariant locally measurable subspace of joint bounded vectors of these operators exists. By using the criterion of anticommutation of unbounded operators, we proved that the operators $T, S \in LS(M)$ anticommute if and only if they anticommute as elements of *-algebra $LS(M)$.

Вступ

Нехай H − гільбертовий простір. Розглянемо два самоспряжених оператора T і S, діючих в H, пов'язаних співвідношенням q-комутації:

$$AB = qBA, \quad q \in \boldsymbol{C}.$$

Якщо оператори T і S самоспряжені, то параметр q дорівнює 1 або −1, тобто q-комутація пари самоспряжених операторів зводиться до їх комутації або антикомутації (градуйованої комутації, див. [1, 2]).

Самоспряжені обмежені оператори T і S комутують (антикомутують) тоді й тільки тоді, коли вони комутують (антикомутують) на кожному векторі $\xi \in \boldsymbol{H}$, тобто

$$TS\xi = ST\xi \ (TS\xi = -ST\xi).$$

Якщо оператори T і S необмежені, то поточкова комутація (антикомутація) може взагалі не мати сенсу (наприклад, якщо $D(TS) = \{0\}$). Тому поняття комутації, як і поняття антикомутації, необмежених самоспряжених операторів не можна вводити безпосередньо.

*-Підалгебра $M \subset B(\boldsymbol{H})$, яка містить тотожний оператор I і, крім того, замкнута в слабкій операторній топології, називається *алгеброю фон Неймана*.

Зазначимо, якщо $M' = \{S \in B(\boldsymbol{H}) : TS = ST \ \forall T \in \in M\}$ – комутант алгебри фон Неймана M, то алгебра M задовольняє таку характеристичну рівність:

$$M'' = M.$$

Один з перших підходів до введення некомутативного варіанту кільця вимірних функцій був запропонований І. Сігалом [3], який розглянув *-алгебру $S(M)$ вимірних операторів, приєднаних до довільної алгебри фон Неймана M. Пізніше, у працях [4, 5] були введені *-алгебри локально вимірних операторів $LS(M)$. Зауважимо, що для довільної алгебри фон Неймана M властиві такі включення:

$$M \subseteq S(M) \subseteq LS(M).$$

У працях [6, 7] вивчалась комутація вимірних і локально вимірних самоспряжених операторів, приєднаних до довільної алгебри фон Неймана. Антикомутація самоспряжених операторів була досліджена в [1, 8]. У праці [1] було показано, що два самоспряжених (в загальному випадку, необмежених) оператора T і S антикомутують тільки тоді, коли вони антикомутують на щільній в H інваріантній відносно T і S множині їх сумісних цілих векторів. У [9] розглядається антикомутація самоспряжених вимірних операторів, приєднаних до довільної алгебри фон Неймана. Доводиться, що два самоспряжених вимірних оператора T і S антикомутують тоді й тільки тоді, коли вони антикомутують як елементи *-алгебри $S(M)$.

Постановка задачі

У роботі розглядається антикомутація самоспряжених локально вимірних операторів, приєднаних до довільної алгебри фон Неймана M. Доводиться, що два самоспряжених локально вимірних оператора T і S антикомутують тоді й тільки тоді, коли вони антикомутують як елементи *-алгебри $LS(M)$.

Попередні відомості

Нехай T і S – довільні самоспряжені оператори, що діють в H. Позначимо $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\boldsymbol{R}}$, $\{F_S(\mu)\}_{\mu\in\boldsymbol{R}}$ – спектральні сім'ї ортопроекторів операторів T і S відповідно. Для будь-яких $0 \le L, M < \infty$ побудуємо оператори

$$T_L = \int_{-L}^{L} \lambda dE_T(\lambda),\ S_M = \int_{-M}^{M} \mu dF_S(\mu).$$

Означення 1. Самоспряжені оператори

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_T(\lambda),\ S = \int_{-\infty}^{\infty} \mu dF_S(\mu),$$

антикомутують, якщо для кожних $0 \le L, M < \infty$ антикомутують обмежені оператори T_L і S_M:

$$\{T_L, S_T\} = T_L S_M + S_M T_L = 0.$$

Зауважимо, якщо оператори T і S обмежені, то наведене означення еквівалентне поточковій антикомутації операторів.

Нагадаємо, що вектор $\xi \in D(T) \cap D(S)$ називається *сумісним обмеженим* вектором операторів T і S, якщо для будь-яких $k, j \in \boldsymbol{N}$ існує константа $C_\xi > 0$ така, що

$$\|T^k S^j\| \le C_\xi^{k+j},\ \|S^j T^k\| \le C_\xi^{k+j}.$$

Множину таких векторів позначимо $H_b(T, S)$.

Вектор $\xi \in D(T) \cap D(S)$ називається *сумісним цілим* вектором операторів T і S, якщо для кожного $C > 0$ виконується нерівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+j=n} \| T^k S^j \| C^n < \infty.$$

Множину таких векторів позначимо $H_c(T, S)$.

Теорема 1 [1, 10]. Нехай T і S – лінійні самоспряжені оператори в гільбертовому просторі $\boldsymbol{H}$, Φ − інваріантна відносно T і S щільна множина їх сумісних цілих векторів. Оператори T і S антикомутують тоді й тільки тоді, коли вони антикомутують на кожному векторі $\xi \in \Phi$:

$$TS\xi = -ST\xi.$$

Нехай M – алгебра фон Неймана в $B(\boldsymbol{H})$.

Лінійний підпростір $D \subseteq \boldsymbol{H}$ називається *приєднаним* до алгебри фон Неймана M (позначення – $D\eta M$), якщо

$$U(D) \subseteq D$$

для будь-якого унітарного оператора $U \in M'$.

Лінійний оператор T, діючий в $\boldsymbol{H}$, називається *приєднаним* до алгебри фон Неймана M (позначення – $T\eta M$), якщо

$$UT \subseteq TU$$

для будь-якого унітарного оператора $U \in M'$, тобто якщо:

1) $D(T)\eta M$;

2) $UT\xi = TU\xi$ для будь-якого $\xi \in D(T)$.

Зауважимо, що якщо $T \in B(\boldsymbol{H})$, то $T\eta M$ тоді й тільки тоді, коли $T \in M$.

Множина

$$Z(M) = \{T \in M : TS = TS \quad \forall S \in M\}$$

називається *центром* алгебри фон Неймана M. Зауважимо, що $Z(M)$ – комутативна алгебра фон Неймана.

Позначимо через $P(M)$ і $P(Z(M))$ решітки всіх ортопроекторів у M і $Z(M)$ відповідно.

Лінійний підпростір $D \subseteq \boldsymbol{H}$ називається *сильно щільним* в $\boldsymbol{H}$ відносно алгебри фон Неймана M, якщо

1) $D\eta M$;

2) існує послідовність ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$:

- $P_n \uparrow I$;
- $P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D$;
- $P_n^{\perp}$ − скінчений ортопроектор для будь-якого $n \in N$.

У цьому випадку говорять, що лінійний підпростір D сильно визначений послідовністю ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Зауважимо, що якщо D є сильно щільним підпростором в $\boldsymbol{H}$, то він щільний.

Означення 2. Лінійний оператор T, діючий в $\boldsymbol{H}$, називається *вимірним* відносно алгебри фон Неймана M, якщо

1) $T\eta M$;

2) область визначення $D(T)$ оператора T сильно щільна в $\boldsymbol{H}$;

3) оператор T – замкнутий.

Позначимо через $S(M)$ множину всіх операторів, вимірних відносно алгебри фон Неймана M. Зрозуміло, що

$$M \subseteq S(M).$$

Нехай $T, S \in S(M)$. Замикання $\overline{T+S}$ і $\overline{TS}$ операторів T і S є також вимірними операторами. Ці замикання називаються, відповідно, *сильною сумою* і *сильним добутком* операторів T і S та позначаються

$$\overline{T+S} = T \dotplus S, \overline{TS} = T \cdot S.$$

Множина $S(M)$ є *-алгеброю над полем $\boldsymbol{C}$ щодо операцій сильної суми, сильного добутку та операції переходу до спряженого оператора. Одиничним елементом є тотожний оператор I.

Лінійний оператор T з областю визначення $D(T)$, діючий в $\boldsymbol{H}$, називається *передвимірним* відносно алгебри фон Неймана M, якщо:

1) $T \eta M$;

2) існує послідовність ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ така, що:

- $P_n \uparrow I$;
- $P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D(T)$;
- $TP_n \in B(\boldsymbol{H})$;
- $P_n^{\perp}$ – скінчений ортопроектор для будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$;

3) оператор T – передзамкнутий.

Зрозуміло, що будь-який вимірний оператор є передвимірним. З іншого боку, замикання передвимірного оператора є вимірним оператором.

Означення 3. Лінійний оператор T, діючий в $\boldsymbol{H}$, називається *локально вимірним* відносно алгебри фон Неймана M, якщо:

1) $T \eta M$;

2) існує послідовність центральних ортопроекторів $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ така, що

- $Z_n \uparrow I$;
- $TZ_n \in S(M)$; для будь-якого $n \in N$.

3) оператор T − замкнутий.

Означення 4. Лінійний оператор T, діючий в $\boldsymbol{H}$, називається *локально передвимірним* відносно алгебри фон Неймана M, якщо:

1) $T \eta M$;

2) існує послідовність центральних ортопроекторів $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ така, що

- $Z_n \uparrow I$;
- TZ_n – передвимірний оператор для кожного $n \in \boldsymbol{N}$.

3) оператор T − передзамкнутий.

Зрозуміло, що будь-який локально вимірний оператор є локально передвимірним. З іншого боку, нехай T – локально передвимірний оператор. Тоді $\overline{T}$ є локально вимірним оператором.

Зауважимо, що якщо T і S – локально передвимірні оператори, то оператори $T+S$ і TS також локально передвимірні відносно M.

Позначимо через $LS(M)$ множину всіх операторів, локально вимірних відносно алгебри фон Неймана M. Множина $LS(M)$ є *-алгеброю над полем $\boldsymbol{C}$ щодо операцій сильної суми, сильного добутку й операції переходу до спряженого оператора. Одиничним елементом є тотожний оператор I. Зрозуміло, що

$$S(M) \subseteq LS(M).$$

Для локально вимірних операторів важлива наступна теорема.

Теорема 2 [11].

Нехай T – лінійний оператор, локально передвимірний відносно алгебри фон Неймана M, D – локально вимірний відносно M лінійний підпростір в $\boldsymbol{H}$. Тоді

$$T^{-1}(D) = \{\xi \in D(T) : T\xi \in D\}$$

також є локально вимірним відносно M підпростором в $\boldsymbol{H}$.

Нехай T – симетричний оператор, приєднаний до M, і його область визначення $D(T)$ локально вимірна відносно M. Тоді його замикання $\overline{T}$ є самоспряженим оператором, локально вимірним відносно M.

Нехай T – лінійний оператор, локально передвимірний відносно M. Тоді оператор T^* є локально вимірним відносно M.

Нехай локально передвимірні оператори T і S збігаються на локально вимірному підпросторі D. Тоді $\overline{T} = \overline{S}$.

Означення 5. Лінійний підпростір $D \subseteq \boldsymbol{H}$ називається *локально вимірним* відносно алгебри фон Неймана M, якщо:

1) $D \eta M$;

2) існують такі послідовності ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ і $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, що

- $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$;
- $P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D$;
- $Z_n P_n^{\perp}$ – скінчений ортопроектор для будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$.

Зрозуміло, якщо лінійний простір D локально вимірний відносно алгебри фон Неймана M, то він сильно щільний в $\boldsymbol{H}$. Також, якщо D_1 і D_2 – два локально вимірних відносно алгебри фон Неймана M лінійних підпростори, то лінійний підпростір $D_1 \cap D_2$ також локально вимірний відносно M. Зауважимо, що область визначення локально вимірного оператора є локально вимірним підпростором.

Інваріатні підпростори локально вимірних операторів

Нехай $T \in LS(M)$, $\{E_{|T|}(\lambda)\}_{\lambda \in \boldsymbol{R}}$ – спектральна сім'я ортопроекторів оператора $|T|$. Тоді існує така послідовність $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$ центральних ортопроекторів, що $Z_n E_{|T|}^{\perp}(n)$ – скінчений ортопроектор (див. [11]).

Твердження 1. Якщо оператор $T \in LS(M)$ самоспряжений і $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \boldsymbol{R}}$ – його спектральна сім'я ортопроекторів, то існує така послідовність $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(M))$, що ортопроектор $Z_n E_T^{\perp}([-n;n])$ скінчений для кожного $n \in \boldsymbol{N}$, де

$$E_T([-n;n]) = E_T((-\infty;n]) - E_T((-\infty;-n])$$

є ортопроектор, що відповідає відрізку $[-n;n]$.

Доведення. Оскільки оператор $T \in LS(M)$ самоспряжений, то самоспряжені оператори

$$T_+ = \frac{1}{2}(|T| + T),\ T_- = \frac{1}{2}\left(|T| - T\right)$$

належать $LS(M)$.

Нехай $\{P_{T_+}(\mu)\}_{\mu \in \boldsymbol{R}}$ і $\{Q_{T_-}(\nu)\}_{\nu \in R}$ – спектральні сім'ї ортопроекторів операторів T_+ і T_- відповідно. Тоді існують такі послідовності $\{Z_n'\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{Z_n''\}_{n=1}^{\infty}$ центральних ортопроекторів, що ортопроектори $Z_n' P_{T_+}^{\perp}(n)$ і $Z_n'' Q_{T_-}^{\perp}(n)$ скінчені. Розглянемо послідовність $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральних ортопроекторів таких, що $Z_n = Z_n' Z_n''$ для кожного $n \in \boldsymbol{N}$. Оскільки

$$E_T([-n;n]) = P_{T_+}(n) \wedge Q_{T_-}(n),$$

то

$$Z_n E_T^{\perp}([-n;n]) = Z_n (P_{T_+}^{\perp}(n) \vee Q_{T_-}^{\perp}(n)) \le$$
$$\le Z_n' P_{T_+}^{\perp}(n) \vee Z_n'' Q_{T_-}^{\perp}(n).$$

Тому $Z_n E_T^{\perp}([-n;n])$ – скінчений ортопроектор для кожного $n \in \boldsymbol{N}$.

Наслідок 1. Якщо оператор $T \in LS(M)$ самоспряжений, то існує така послідовність ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, що

1) $P_n \uparrow I$, якщо $n \to \infty$;

2) $P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D(T)$ для будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$;

3) $TP_n\xi = P_n T\xi$ для будь-якого вектора $\xi \in P_n(\boldsymbol{H})$ і будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$.

Доведення. Позначимо

$$P_n = E_T([-n;n]), \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Тоді послідовність ортопроекторів $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$ задовольняє всі названі умови.

Зауваження 1. Лінійні підпростори $P_n(\boldsymbol{H})$, побудовані при доказі наслідку 1, є інваріантними не тільки відносно оператора T, але й відносно кожного оператора T^k, $k \in \boldsymbol{N}$. Дійсно, для будь-якого вектора $\xi \in P_n(\boldsymbol{H})$ і будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$

$$T\xi = TP_n\xi = P_n T\xi \in P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D(T).$$

Звідси випливає таке:

$$T^2\xi = T(T\xi) = T(P_n T\xi) =$$
$$= P_n(T^2\xi) \in P_n(\boldsymbol{H}) \subseteq D(T),$$

і так далі, для будь-якого натурального k. Отже,

$$T_k : P_n(\boldsymbol{H}) \to P_n(\boldsymbol{H}).$$

Нехай T і S – самоспряжені локально вимірні оператори з $LS(M)$, а $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \boldsymbol{R}}$, $\{F_S(\mu)\}_{\mu \in \boldsymbol{R}}$ – їх спектральні сім'ї ортопроекторів. Для кожного натурального n позначимо

$$P_n = E_T([-n;n]),\ Q_n = F_S([-n;n])$$

і побудуємо ортопроектор

$$R_n = P_n \wedge Q_n.$$

Теорема 3:

1) множина $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\boldsymbol{H})$ є локально вимірним підпростором відносно алгебри фон Неймана M;

2) для будь-якого $n \in \boldsymbol{N}$ $\|TR_n\|_M \le n$, $\|SR_n\|_M \le n$.

Доведення. Зрозуміло, що $D\eta M$. Покажемо, що $R_n \uparrow I$. Дійсно, маємо

$$R_n^{\perp} = P_n^{\perp} \vee Q_n^{\perp}.$$

Якщо d – вимірна функція (див. [3, 11]) на $P(M)$, то

$$d(R_n^{\perp}) \le d(P_n^{\perp}) + d(Q_n^{\perp}),$$

але

$$d(P_n^{\perp}) = d(E_T^{\perp}([-n;n])) \downarrow 0$$

і

$$d(Q_n^{\perp}) = d(F_S^{\perp}([-n;n])) \downarrow 0.$$

Тому

$$d(R_n^{\perp}) \downarrow 0,$$

звідки

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} R_n^{\perp} = 0.$$

Це означає, що $R_n \uparrow I$.

Оскільки $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\boldsymbol{H})$, то

$$R_n(\boldsymbol{H}) \in D.$$

Нехай $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовності центральних ортопроекторів таких, що ортопроектори $Z'_n P_n^{\perp}$ і $Z''_n Q_n^{\perp}$ скінчені. Як і в доведенні твердження 1, розглянемо послідовність $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральних ортопроекторів таких, що $Z_n = Z'_n Z''_n$ для кожного $n \in \boldsymbol{N}$. Тоді маємо

$$Z_n R_n^{\perp} = Z_n(P_n^{\perp} \vee Q_n^{\perp}) \le Z'_n P_n^{\perp} \vee Z''_n Q_n^{\perp},$$

звідки $Z_n R_n^{\perp}$ – скінчений ортопроектор для кожного $n \in \boldsymbol{N}$.

Отже, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\boldsymbol{H})$ є локально вимірним відносно M підпростором.

Нехай $\xi \in D$. Тоді для деякого $n \in \boldsymbol{N}$

$$\xi \in R_n(\boldsymbol{H}) = P_n(\boldsymbol{H}) \cap Q_n(\boldsymbol{H}).$$

Звідси

$$TR_n\xi = TP_nR_n\xi = TP_n\xi = P_nTP_n\xi.$$

Тому

$$\|TR_n\xi\|_{\boldsymbol{H}} = \|P_nTP_n\xi\|_{\boldsymbol{H}} \le \|P_nTP_n\|_M \|\xi\|_{\boldsymbol{H}} \le n\|\xi\|_{\boldsymbol{H}},$$

звідки

$$\|TR_n\|_M \le n.$$

Аналогічно,

$$\|SR_n\|_M \le n.$$

Наслідок 2. Для будь-яких $k, n = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\|T^kR_n\|_M \le n^k,\ \|S^kR_n\|_M \le n^k.$$

Доведення. Згідно із зауваженням 1, оператори T^k комутують з кожним ортопроектором $P_n = E_T([-n;n])$ для будь-яких $k, n \in \boldsymbol{N}$. Отже, маємо

$$\|T^kR_n\|_M = \|T^kP_nR_n\|_M =$$
$$= \|\underbrace{(TP_n)(TP_n)\ldots(TP_n)}_{k}R_n\|_M \le$$
$$\le \underbrace{\|TP_n\|_M\|TP_n\|_M \ldots \|TP_n\|_M}_{k} \le n^k.$$

Аналогічно, для оператора S маємо

$$\|S^kR_n\|_M \le n^k.$$

Зауваження 2. Для кожного вектора $\xi \in D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\boldsymbol{H})$ знайдеться такий номер n, що для будь-якого $k = 1, 2, \ldots$ мають місце оцінки

$$\|T^k\xi\|_{\boldsymbol{H}} \le C_\xi^k \|\xi\|_{\boldsymbol{H}} = n^k \|\xi\|_{\boldsymbol{H}};$$
$$\|S^k\xi\|_{\boldsymbol{H}} \le C_\xi^k \|\xi\|_{\boldsymbol{H}} = n^k \|\xi\|_{\boldsymbol{H}}.$$

Тому $\xi \in H_b(T,S)$, тобто $D \subset H_b(T,S)$, де $H_b(T,S)$ – множина сумісних обмежених векторів операторів T і S відповідно.

Сильна антикомутація операторів в *-алгебрі $LS(M)$

Нехай оператори $T, S \in LS(M)$.

Теорема 4. Для будь-яких локально вимірних операторів $T, S \in LS(M)$ лінійний підпростір $D = D(TS) \cap D(ST)$ – локально вимірний.

Доведення. Якщо $T, S \in LS(M)$, то $D(T)$ і $D(S)$ локально вимірні, звідки (теорема 2) підпростори $T^{-1}(D(S))$ і $S^{-1}(D(T))$ – локально вимірні. Тому $D(TS) = D(S) \cap S^{-1}(D(T))$ і $D(ST) = D(T) \cap T^{-1}(D(S))$. Звідси $D = D(TS) \cap \cap D(ST)$ – локально вимірний підпростір.

Зауважимо, що $D(TS) \cap D(ST) \subseteq D(T) \cap \cap D(S)$.

Теорема 5. Нехай оператори T і S – локально передвимірні відносно алгебри фон Неймана M, D – локально вимірний підпростір в $\boldsymbol{H}$ такий, що

1) $D \subseteq D(T) \cap D(S)$;

2) $T : D \to D$, $S : D \to D$;

3) $TS\xi = -ST\xi$ для кожного вектора $\xi \in D$.

Тоді $T \cdot S = -S \cdot T$.

Доведення. Оператори T і S локально передвимірні, тоді оператори TS і ST також локально передвимірні.

Оскільки $S : D \to D$, то для будь-якого елемента $\xi \in D$ маємо $S\xi \in D$, звідки $S\xi \in D(T)$, тобто $\xi \in D(TS)$. Таким чином, $D \subseteq D(TS)$. Аналогічно доводиться, що $D \subseteq D(ST) = = D(-ST)$. Крім того, $TS\xi = -ST\xi$ для будь-якого елемента $\xi \in D$.

Отже, $TS = -ST$ на локально вимірному підпросторі D. Тоді (теорема 2)

$$\overline{TS} = -\overline{ST},$$

або

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Теорема 6. Для того, щоб два самоспряжених локально вимірних оператора $T, S \in LS(M)$ антикомутували, необхідно і достатньо, щоб вони антикомутували як елементи *-алгебри $LS(M)$.

Доведення. Необхідність. Нехай самоспряжені локально вимірні оператори T і S антикомутують. Тоді вони антикомутують на щільній в $\boldsymbol{H}$ інваріантній множині Φ сумісних цілих векторів операторів T і S. Нехай $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda \in \boldsymbol{R}}$ і $\{F_S(\mu)\}_{\mu \in \boldsymbol{R}}$ – спектральні сім'ї ортопроекторів цих операторів. Так само, як і в доведенні теореми 3, побудуємо локально вимірний підпростір $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\boldsymbol{H})$, такий, що $D \subset H_b(T, S)$.

Тоді $TS\xi = -ST\xi$ для будь-якого $\xi \in D$. Оскільки оператори TS і $-ST$ збігаються на локально вимірному підпросторі D, то

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Достатність. Нехай T і S – два самоспряжених лінійних оператора, що антикомутують в *-алгебрі $LS(M)$:

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
[T^2, S^2] &= T^2 \cdot S^2 - S^2 \cdot T^2 = \\
&= T \cdot T \cdot S \cdot S - S \cdot S \cdot T \cdot T = \\
&= T \cdot (-S \cdot T) \cdot S - S \cdot (-T \cdot S) \cdot T = \\
&= -T \cdot S \cdot T \cdot S + S \cdot T \cdot S \cdot T = \\
&= -T \cdot S \cdot T \cdot S + (-T \cdot S) \cdot (-T \cdot S) = \\
&= -(T \cdot S)^2 + (T \cdot S)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Отже, самоспряжені оператори $T^2, S^2 \in \in LS(M)$ комутують як елементи алгебри $LS(M)$. Звідки оператори T^2, S^2 сильно комутують (див. [6]). Тому має місце така рівність:

$$\overline{H_b(T^2) \cap H_b(S^2)} = \boldsymbol{H},$$

де $H_b(T^2)$ і $H_b(S^2)$ – множини сумісно обмежених векторів операторів T^2 і S^2 відповідно, але

$$H_b(T^2) = H_b(T), \quad H_b(S^2) = H_b(S).$$

Тоді маємо

$$\overline{H_b(T) \cap H_b(S)} = \boldsymbol{H},$$

тобто інваріантна відносно операторів T і S множина

$$H_b(T) \cap H_b(S) \subseteq H_c(T) \cap H_c(S) \subseteq D(T) \cap D(S)$$

щільна в $\boldsymbol{H}$. Оскільки

$$T \cdot S = -S \cdot T,$$

то для будь-якого $\xi \in H_b(T) \cap H_b(S)$ має місце така рівність:

$$TS\xi = -ST\xi.$$

Таким чином, згідно із теоремою 1, оператори T і S антикомутують.

Висновки

Основним результатом цієї роботи є теорема про те, що два самоспряжених локально вимірних оператора $T, S \in LS(M)$ антикомутують тоді й тільки тоді, коли вони антикомутують як елементи *-алгебри $LS(M)$.

Цей результат може бути використаний для опису самоспряжених відображень базису комутативної $\times Z_2^m$ градуйованої алгебри Лі.

1. *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка. – 1984. – 232 с.
2. *E. Kamei*, “Operators with skew commutative cartesian parts”, Math. Japonica, vol. 25, no. 4, pp. 431–432, 1980.
3. *I.E. Segal*, “A non commutative extension of abstract integration”, Ann. Math., no. 57, pp. 401–457, 1953.
4. *S. Sankaran*, “The *-algebra of unbounded operators”, J. London Math. Soc., vol. 34, pp. 337–344, 1959.
5. *F.J. Yeadon*, “Convergence of measurable operators”, Proc. Camb. Phil. Soc., no. 74, pp. 257–268, 1973.
6. *Муратов М.А.* К вопросу о коммутируемости локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Уч. зап. Таврич. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2006. – 19(58), № 2. – С. 52–62.
7. *Муратов М.А., Самойленко Ю.С.* О коммутируемости измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Уч. зап. Таврич. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2007. – 20(59), № 1. – С. 70–79.
8. *F.-H. Vasilescu*, “Anticommuting self-adjoint operators”, Rev. Roum. Math. Pures Appl., vol. 28, no. 1, pp. 77–91, 1983.
9. *Ахрамович М.В.* Об антикоммутируемости измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Уч. зап. Таврич. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – 25(64), № 2. – С. 1–14.
10. *E. Nelson*, “Analytic vectors”, Ann. Math., 1959, vol. 70, no. 3, pp. 572–615.
11. *Муратов М.А., Чилин В.И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2007. – 69. – 390 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
20 вересня 2012 року