УДК 517.9

Т.І. Вдовенко, М.Є. Дудкін

СТРОГО СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

For a rank one strong singular perturbation of a self-adjoint operator by nonsymmetric potential, we present a construction and investigated the corresponding eigenvalue problem. Namely we consider the perturbations of the form $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\delta_1\rangle\delta_2$, where A is a selfadjoint semi-bounded operator and $\delta_1 \neq \delta_2$, $\delta_1,\delta_2 \in \mathcal{H}_{-2}$. Such perturbation has an application in the theory of differential equations with retarded argument. The corresponding differential equations are the result of model control theory, particularly in electrical circuits. Examination conducted by methods of the theory of operators, including the application of the theory of extensions of densely defined symmetric operators to self-adjoint. Because the result is not self-adjoint operator, in considering building involved two symmetric operators, which is a narrowing of the original operator. This restrictions generated by different vectors of negative space $\delta_1,\delta_2 \in \mathcal{H}_{-2}$. The presence of different vectors is the main difference between the proposed materials from previous studies in which perturbed operator was also self-adjoint. Also, the hallmark of previous publications is the fact that we consider a perturbation class $\mathcal{H}_{-2}$. In a previous publication perturbation class was considered $\mathcal{H}_{-1}$. The description problem is solved similarly to how the case was solved in a strictly singular perturbation symmetric potentials. Description is given by language of perturbed and unperturbed resolvents of operators, which are combined in a formula similar to Krein's formula. Also in the paper we investigate the dot point, which appears by the operator $\tilde{A}$.

Keywords: singular perturbation, Krein's formula, self-adjoint operator, operator spectrum.

Вступ

У світовій математичній літературі налічується декілька тисяч праць, присвячених дослідженню і вивченню формального виразу

$$-\Delta + \alpha\delta(x - x_0), \qquad (1)$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа, $\delta(x - x_0)$ — функція, зосереджена в точці $x_0 \in \mathbb{R}$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ — константа зв'язку. Найбільша кількість посилань із зазначеної теми зібрана в монографіях [1, 2]. Оригінальний підхід до врахування сингулярних збурень методом шкали гільбертових просторів наведений у [3].

У цій роботі пропонується до розгляду вираз типу (1), але змінений і записаний у вигляді

$$-\tilde{\Delta} f = -\Delta f + \alpha f(x_1)\delta(x - x_2),\ x_1 \neq x_2,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

який розуміється як δ-збурення із запізненням, якщо $x_1 < x_2$, або із упередженням, якщо $x_1 > x_2$. Відзначимо, що у випадку $x_1 = x_2$ ми залишаємося у рамках класичної теорії. Загальна теорія диференціальних рівнянь із аргументом, який відхиляється, наведена, наприклад, у [4].

Постановка задачі

Завдання роботи — означити і дослідити сингулярні збурення вигляду

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2,\ \omega_1,\omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}\backslash\mathcal{H}_{-1}, \qquad (2)$$

де $\tilde{A} = A$ — самоспряжений напівобмежений знизу оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_{-2}$ — простори з A-шкали (шкали, побудованої за оператором A) і $\alpha \in \mathbb{C}\bigcup\infty$.

Також інтерес викликають пряма і обернена задачі на власні значення для збуреного оператора

$$\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi,\ \tilde{A}^*\psi = \mu\psi,$$

де, очевидно, взагалі $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ і $\varphi \neq \psi$. При дослідженнях істотно використовується техніка, розвинена в [1, 5, 6] та відображена в [1, 2]. Близькі задачі розглядалися в [7].

Попередні відомості

Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$ на множині $\operatorname{Dom} A = \mathfrak{D}(A)$ задано напівобмежений знизу самоспряжений оператор $A = A^*$. У роботі $\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ позначатимуть відповідно спектр, точковий спектр і резольвентну множину оператора.

Щільно визначений у $\mathcal{H}$ лінійний замкнений оператор $\tilde{A} \neq A$ називається сингулярно-сингулярно збуреним ((*s*,*s*)-збуреним) відносно A, якщо обидві множини

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\}$$

і

$$\mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^* f\}$$

є щільними в $\mathcal{H}$. Цей факт позначається $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{s,s}(A)$.

Взагалі оператор $\tilde{A}$ не є самоспряженим. Але зрозуміло, що із кожним оператором $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{s,s}(A)$ пов'язана пара щільно визначених симетричних операторів $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D}$ і $\dot{A}_* := A \restriction \mathfrak{D}_*$ із ненульовими індексами дефекту $\boldsymbol{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim\ker(\dot{A} \mp z)^* \neq 0$ і $\boldsymbol{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = \dim\ker(\dot{A}_* \mp z)^* \neq 0$. У цій публікації ми обмежуємося випадком $\boldsymbol{n}^{\pm}(\dot{A}) = \boldsymbol{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = 1$ і основною множиною буде $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{s,s}(A)$.

Позначимо через $\{\mathcal{H}_k(A)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$, простори з A-шкалою гільбертових просторів, де $\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}|A|^{\frac{k}{2}}$, $k > 1$, визначені нормою $\|\varphi\|_k = \|(|A| + I)^{\frac{k}{2}}\varphi\|$ (I — одиничний оператор), $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ — дуальний простір — простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}_k$, отриманий як поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{\frac{k}{2}} f\|$, $f \in \mathcal{H}$. Вважаємо $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0$. Позначимо $\langle \cdot,\cdot \rangle$ спарення просторів $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$. Скалярний добуток у $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$ позначається як $(\cdot,\cdot)_{\pm k}$.

Продовження за неперервністю оператора A на $\mathcal{H}$ розуміється як оператор з $\mathcal{H}$ у $\mathcal{H}_{-2}$ і тимчасово позначається $\mathbf{A}$.

У цій роботі ми розглядаємо лише випадок, коли вектори ω_1, ω_2 належать до $\mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}$. Такий випадок ми називаємо сильно сингулярними збуреннями і позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ss,ss}(A)$. Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \backslash \mathcal{H}_0$, то відповідні збурення називаються слабо сингулярними і позначаються $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$.

Означення. [8] Оператор $V = \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ в A-шкалі з областю визначення $\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+1}$ і областю значень $\mathfrak{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-1}$ разом із самоспряженим напівобмеженим оператором A утворює узагальнену суму $\tilde{A} = A \tilde{+} V$, якщо

$$\tilde{A}\varphi := (A \tilde{+} V)\varphi = \mathbf{A}\varphi + V\varphi,$$

$$\varphi \in \mathfrak{D}(A \tilde{+} V) := \{\varphi \in \mathfrak{D}(V) \mid \mathbf{A}\varphi + V\varphi \in \mathcal{H}\},$$

тобто

$$\tilde{A}f = (\mathbf{A}f + \alpha\langle f, \omega_1\rangle\omega_2) \restriction \mathcal{H}, \ f \in \mathcal{H}_{+1}.$$

Відомо, що кожний оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{ws,ws}(A)$ має зображення

$$\tilde{A} = A \tilde{+} \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2,$$

де $\alpha \in \mathbb{C} \cup \infty$ і $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \backslash \mathcal{H}_0$.

Проте такого зображення немає у випадку $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{ss,ss}(A)$.

Опис сильно сингулярних рангу один збурень несиметричним потенціалом

Деякий опис сильно сингулярних рангу один збурень несиметричним потенціалом можливий мовою резольвент збуреного і незбуреного операторів.

Теорема 1. Для резольвент $R_z = (A - z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$ операторів $A = A^* > c > 1$ і $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ss,ss}(A)$ відповідно в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ виконується формула типу Крейна:

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z, \ z, \xi, \zeta \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A}),$$

де

$$n_z = (A - \xi)(A - z)^{-1}n_\xi, \ m_z = (A - \zeta)(A - z)^{-1}m_\zeta$$

і $n_z, m_z \in \mathcal{H} \backslash \mathcal{H}_{+1}$ та

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}}).$$

Вектори n_z, m_z пов'язані з ω_1, ω_2 виразами

$$n_z = R_z\omega_1, \ m_z = R_z\omega_2.$$

Зазначимо, що теорема не дає зв'язку між α і b_z. При доведенні ми зустрічаємо вираз

$$-b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle\omega_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle,$$

у якому не визначений доданок $\langle\omega_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle$, оскільки $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}$.

Для усунення такого недоліку існує багато різних методів. Ми використаємо метод, який у класичному випадку запропонований у [6].

У цьому випадку нам потрібно розширити оператор $T = \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ до прямої суми $\mathcal{H}_2$ і $A^{-1}\omega_1$ (або $A^{-1}\omega_2$), тобто для областей

$$\mathfrak{D}_1 = \mathcal{H}_2 \dot{+} \{cA^{-1}\omega_1\}, \; \mathfrak{D}_2 = \mathcal{H}_2 \dot{+} \{cA^{-1}\omega_2\}.$$

Щоб зробити це, ми повинні мати значення формального вигляду $\langle A^{-1}\omega_2, \omega_1 \rangle$ з $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}$. Іншими словами, нам потрібно розширити функціонал $F_1(g) = \langle g, \omega_1 \rangle$, $\omega_1 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}$, який визначений для всіх $g \in \mathcal{H}_2$, щоб функціонал був визначений як пряма сума $\mathcal{H}_2 \dot{+} \{cA^{-1}\omega_1\}$. Або те саме, що розширити функціонал $F_2(g) = \langle \omega_2, g \rangle$, $\omega_2 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}$, який визначений для всіх $g \in \mathcal{H}_2$, щоб функціонал був визначений як пряма сума $\mathcal{H}_2 \dot{+} \{cA^{-1}\omega_2\}$.

Кращий спосіб зробити це – покласти $F_1(A^{-1}\omega_1) = \gamma$, де γ – фіксоване дійсне число. Для такого розширення функціоналу ми використаємо позначення $\langle \cdot, \omega_1 \rangle^{|\gamma|}$, тобто $\langle g, \omega_1 \rangle^{|\gamma|} = \langle g, \omega_1 \rangle$, і $\langle g, \omega_1 \rangle^{|\gamma|} = \gamma$, якщо $g \in A^{-1}\omega_1 \in \mathcal{H} \backslash \mathcal{H}_{-1}$.

Для спряженого оператора покладаємо $F_2(A^{-1}\omega_2) = \overline{\gamma}$ із аналогічними позначеннями $\langle \cdot, \omega_2 \rangle^{|\overline{\gamma}|}$, тобто $\langle g, \omega_2 \rangle^{|\overline{\gamma}|} = \langle g, \omega_2 \rangle$, і $\langle g, \omega_2 \rangle^{|\overline{\gamma}|} = \gamma$, якщо $g \in A^{-1}\omega_2 \in \mathcal{H} \backslash \mathcal{H}_{-1}$. Тоді аналог (2) можна записати у такий спосіб:

$$\tilde{A} = A \tilde{+} \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle^{|\gamma|} \omega_2, \; \alpha \in \mathbb{R}^1, \; \omega \in \mathcal{H}_{-2}, \tag{3}$$

де $\tilde{+}$ зазвичай означає

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \{g \in \mathcal{H} : Ag + \alpha \langle g, \omega_1 \rangle^{|\gamma|} \omega_2 \in \mathcal{H}\}. \tag{4}$$

Звичайно, побудова збуреного оператора $\tilde{A}$ за формулою (3) змістовна і для деякого $\omega \in \mathcal{H}_{-1}$.

Проте для довільного γ отриманий оператор буде відрізнятися від наведеного згідно з (2). Але якщо покласти $\gamma = \langle A^{-1}\omega_2, \omega_1 \rangle$, то, очевидно, (3) збігається з (2). Таке значення γ (якщо $\omega_1 \in \mathcal{H}_{-1}$) називатимемо, наслідуючи [6], природнім. Відзначимо, що інше (не натуральне) значення γ у виразі (3) з $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}$ також дає той же оператор $\tilde{A}$, що визначений (2), але якщо, крім того, змінюємо в (3) константу зв'язку α на $\alpha(\gamma) = [\alpha^{-1} + \langle A^{-1}\omega_2, \omega_1 \rangle - \gamma]^{-1}$.

Зауважимо також, що співвідношення (3) можна записати у вигляді

$$\tilde{A} = A \tilde{+} \alpha T R^{|\gamma|}, \tag{5}$$

де вводиться така ж регуляризація $R^{|\gamma|}$, що переводить $\mathfrak{D}_1$ у $\mathcal{H}_2$. Насправді, $R^{|\gamma|}$ розуміється як неортогональна проекція $R^{|\gamma|} : \mathfrak{D}_1 \to \mathcal{H}_2$, однозначно визначена дією на елемент $A^{-1}\omega_1$:

$$R^{|\gamma|} A^{-1}\omega_1 = \gamma A^{-2}\omega_1, \; \|\omega\|_{-2} = 1,$$

з

$$R^{|\gamma|} \varphi = \varphi, \; \varphi \in \mathcal{H}_2.$$

Отже, у випадку сильно сингулярного збурення рангу один класу $\mathcal{P}^{1,1}_{ss,ss}(A)$, тобто якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}(A)$, маємо зображення (3)–(5). Крім того, оператор $\tilde{A}$ є сингулярним збуренням рангу один оператора A класу $\mathcal{P}^{1,1}_{ss,ss}$ тоді і тільки тоді, коли існують числа α, γ і вектори $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}_{-1}(A)$ такі, що адитивне зображення (3)–(5) виконується для оператора $\tilde{A}$. У цьому випадку співвідношення між резольвентною константою зв'язку $b = b_0$ та α і γ задається таким чином:

$$\alpha = -[b + \gamma]^{-1}.$$

Спектральні властивості строго сингулярних збурень рангу один несиметричним потенціалом

Зауважимо, що неперервний спектр $\sigma_c(A)$ оператора A не змінюється при скінченновимірних збуреннях $\sigma_c(A) = \sigma_c(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n,n}_{s,s}(A)$, $n < \infty$.

Теорема 2. Нехай (ss, ss)-збурення $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ набуває, порівняно із A, нового власного значення $\lambda \in \mathbb{C}$, тобто $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A})$, $\lambda \notin \sigma_p(A)$, тоді для відповідних власних векторів $\varphi, \psi : A\varphi = \lambda\varphi$ і $A\psi = \overline{\lambda}\psi$ виконуються співвідношення

$$(\lambda - z) b_z (\varphi, n_{\overline{z}}) = 1, \; \varphi = (A - z)(A - \lambda)^{-1} m_z;$$

$$(\overline{\lambda} - \overline{z}) \overline{b}_z (\psi, m_z) = 1, \; \psi = (A - \overline{z})(A - \overline{\lambda})^{-1} n_{\overline{z}}.$$

Також виконується і обернене твердження.

Теорема 3. Для заданого самоспряженого напівобмеженого оператора $A = A^*$ у сепарабельному гільбертовому просторі H та числа $\lambda \in \mathbb{C}$ і векторів $\varphi, \psi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{+1}$ знайдеться єдиний оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,\mathrm{w}\,s}(A)$, такий, що $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ і $\tilde{A}\psi = \bar{\lambda}\psi$.

Оператор $\tilde{A}$ визначається виразом

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})\, m_z ,$$

із

$$m_z = (A - \lambda)(A - z)^{-1}\varphi , \; n_{\bar{z}} = (A - \bar{\lambda})(A - \bar{z})^{-1}\psi$$

і

$$b_z^{-1} = (\lambda - z)(\varphi, n_{\bar{z}}) , \; (\bar{b}_z^{-1} = (\bar{\lambda} - \bar{z})(\psi, m_z)) .$$

Доведення теорем 2 і 3 виходить за обсяги публікації і буде наведено в наступних публікаціях.

Висновки

Визначений сильно сингулярно рангу один збурений несамоспряжений оператор при збуренні несиметричним потенціалом. Визначення подано у формі резольвент із використанням додаткового природного параметра.

Розв'язані пряма й обернена задачі на власне значення для такого сорту збурених операторів.

Наведений опис має застосування для диференціальних рівнянь із сингулярними потенціалами, які відображають фізичні якості запізнення або упередження.

Перспективними дослідженнями є розгляд (опис) збурень рангу один із несиметричним потенціалом змішаного характеру, тобто коли вектори належать різним класам збурень (сильному, слабкому або взагалі регулярному збуренню), що вимагає комбінації різних технік. Маючи такий опис, можна приступати до досліджень збурень вищого рангу, що є найбільш загальною задачею.

Список літератури

1. *S. Albeverio and P. Kurasov*, "Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrцdinger type operators", in London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, vol. 271, xiv+429 pp.
2. *S. Albeverio et al.,* Solvable models in quantum mechanics, 2nd ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005, xiv+488 pp.
3. *Кошманенко В.Д., Дудкін М.Е.* Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. – К.: Ін-т математики НАНУ, 2013. – 320 с.
4. *T. Kato and J.B. McLeod*, "The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 77, pp. 891–937, 1971.
5. *V. Koshmanenko*, Singular quadratic forms in perturbation theory (translated from the 1993 russian original by P.V. Malyshev and D.V. Malyshev), Mathematics and its Applications, vol. 474, pp. viii+308, 1999.
6. *L.P. Nizhnik*, "On rank one singular perturbations of selfadjoint operators", Ibid, vol. 7, no. 3, pp. 54–66, 2001.
7. *M.M. Malamud and V.I. Mogilevskii*, "Kreĭn type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations", Methods Funct. Anal. Topology, vol. 8, no. 4, pp. 72–100, 2002.
8. *T.V. Karataeva and V.D. Koshmanenko*, "Generalized sum of operators", Math. Notes, vol. 66, no. 5-6, pp. 556–564, 2000.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
5 лютого 2014 року