УДК 519.11

Панова А. І.

ЕКСПОНЕНТА ГРОМОВА–ХАУСДОРФА МАЙЖЕ ЕКВІДИСТАНТНОГО ПРОСТОРУ

У статті охарактеризовано простір, що є експонентою Громова–Хаусдорфа простору з майже сталою метрикою. Показано, що всі різносторонні трикутники в цьому просторі є виродженими. Доведено, що група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа n-точкового майже еквідистантного простору ізоморфна S_{n-2} або ізоморфна S_2, або є тривіальною.

Ключові слова: метричний простір, експонента Громова–Хаусдорфа, група ізометрій.

Вступ

Одним з основних понять теорії метричних просторів є метрика Хаусдорфа між підпросторами метричного простору. Це поняття широко використовується в сучасній геометрії [1], [2] теорії фракталів [3] тощо. На початку 80-х р. минулого століття відомий французький математик М. Громов запропонував розглядати узагальнення метрики Хаусдорфа, впровадивши визначення відстані між довільними компактними метричними просторами [4]. Це поняття М. Громов використовував при доведенні того факту, що кожна група поліноміального росту є майже нільпотентною. Метрика Громова–Хаусдорфа застосовується також в асимптотичній геометрії, або геометрії великих розмірів, теорії многовидів, обчислювальній геометрії тощо.

Поняття експоненти Громова–Хаусдорфа введено у роботі [5]. У цій праці також розглянуто властивості експоненти Громова–Хаусдорфа для простору зі сталою метрикою.

Мета цього дослідження — характеризація експоненти Громова–Хаусдорфа простору з майже сталою метрикою. Опишемо деякі геометричні властивості цього простору та схарактеризуємо його групу ізометрій. Деякі результати вже анонсовано в [6].

Необхідні відомості

Нагадаємо потрібні нам далі означення.

Метричний простір (X, d) називається еквідистантним або простором зі сталою метрикою, якщо відстань між будь-якими двома різними точками цього простору є сталою, тобто існує таке $a > 0$, що для всіх $x, y \in X$ виконується рівність

$$d(x,y) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \neq y, \\ 0, & \text{якщо } x = y. \end{cases} \tag{1}$$

Простір (X, d) називатимемо простором із майже сталою метрикою, якщо в ньому всі відстані між різними точками, окрім однієї, рівні, тобто існують такі $z_1, z_2 \in X$, що

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) = b,$$

де $b \geqslant 0$ і $\forall x, y \in X, x \neq z_1, y \neq z_2$ виконується рівність

$$d(x, y) = d(y, x) = a,$$

де $a \geqslant 0$. Причому $a \geqslant b/2$.

Відстанню Хаусдорфа [7] між непорожніми замкненими підпросторами X, Y метричного простору (Z, ρ) називається число

$$d_H(X, Y) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{\rho(x, Y), \rho(X, y)\}.$$

Відстань Громова–Хаусдорфа d_{GH} визначається між двома довільними компактними метричними просторами.

Означення 1. *[4] Відстанню Громова–Хаусдорфа d_{GH} між двома компактними метричними просторами (X, d_X) і (Y, d_Y) називається точна нижня грань відстаней Хаусдорфа між образами X, Y при найможливіших ізометричних зануреннях цих просторів у довільні компактні метричні простори.*

Означення 2. *Нехай X і Y — дві множини. Відповідністю між X і Y називається множина $\Re \subset X \times Y$, що задовольняє таку умову: для кожної точки $x \in X$ існує принаймні одна така точка $y \in Y$, що $(x, y) \in \Re$, й аналогічно для кожної точки $y \in Y$ існує така $x \in X$, що $(x, y) \in \Re$. Якщо $(x, y) \in \Re$, казатимемо, що x і y «відповідають» одна одній.*

Іншими словами, відповідність — це таке відношення між точками з X і Y, що кожна точка з X чи з Y перебуває у відношенні хоча б з однією точкою другої множини.

Означення 3. *Нехай $\Re$ —- відповідність між метричними просторами X і Y. Його викривлення $dis\Re$ визначається рівністю*

$$dis\Re = sup(|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| : (x, y), (x', y') \in \Re),$$

де d_X, d_Y —- метрики просторів X і Y, відповідно.

Теорема 1. *[7] Для будь-яких метричних просторів X та Y виконується рівність*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf(dis\Re), \tag{2}$$

де інфімум береться за всіма можливими відповідностями $\Re$ між X та Y.

Зауважимо, якщо простори X та Y скінченні, то існує скінченна кількість відповідностей між X і Y, а тому у цьому випадку формулу 2 можна переписати так:

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\min(dis\Re).$$

Твердження 1. *Для просторів з однаковою кількістю точок ($|X| = |Y|$) можна шукати інфімум не за всіма можливими відповідностями $\Re$, а тільки за тими, для яких кожна точка з X чи з Y входить рівно в одну пару, що належить відношенню $\Re$. Такі відповідності називатимемо* однозначними.

Доведення. Зрозуміло, що це відношення насправді буде відповідністю, оскільки кожній точці $x \in X$ відповідає одна точка $y \in Y$.

Кількість елементів у такій відповідності $\Re$ мінімальна, оскільки неможливо викинути з $\Re$ жодної пари так, щоб $\Re$ не перестало бути відповідністю.

Жодна відповідність з більшого числа елементів не може мати меншого викривлення, оскільки додана до $\Re$ пара (x, y) утворює нові різниці з кожною з пар, що вже міститься в $\Re$, збільшуючи, множину різниць M на $|\Re|$ елементів. Тобто нова $M' \supset M$, з чого випливає, що $\sup M' \geqslant \sup M$.

Властивості експоненти Громова–Хаусдорфа простору з майже сталою метрикою

Нехай (X, d) — довільний n-точковий метричний простір, $B(X)$ — множина всіх непорожніх підмножин простору X. Відношення ізометричності є, очевидно, еквівалентністю на множині $B(X)$, яку ми позначатимемо символом $\sim$. Відстань Громова–Хаусдорфа (на відміну від відстані Хаусдорфа) залежить лише від класів еквівалентності $\sim$, до яких ці підпростори належать, і не залежить від вибору представників.

Означення 4. *[5] GH-експонентою простору (X, d) називається метричний простір, носієм якого є фактор–множина $B(X)/\sim$, а метрика індукується метрикою Громова–Хаусдорфа на $B(X)$.*

Позначатимемо GH-експоненту простору (X, d) символом $(2^X, D_{GH})$.

Твердження 2. *Потужність експоненти Громова–Хаусдорфа майже еквідистантного n-точкового простору рівна* $2 \cdot (n - 1)$.

Доведення. Потужністю експоненти Громова–Хаусдорфа n-точкового майже еквідистантного простору X є кількість різних (не ізометричних один одному) підпросторів простору X. Зрозуміло, що простори з різною кількістю точок не ізометричні. Ізометричними є підпростори з однаковою кількістю точок і сталою метрикою. Також ізометричні підпростори з однаковою кількістю точок і майже сталою метрикою. Крім того, всі одноточкові простори ізометричні. Отже, у простір 2^n увійде 1 одноточковий підпростір, 1 простір із майже сталою метрикою потужністю n і по парі підпросторів з потужністю, більшою від 1, але меншою від n. А тому потужність простору $B = (2^X, D_{GH})$ дорівнює $2 + 2 \cdot (n - 2) = 2 \cdot (n - 1)$.

Нехай (X, d) — простір із майже сталою метрикою. Далі в цій замітці точки експоненти Громова–Хаусдорфа простору (X, d) позначатимемо Y_k^a і Y_k^b — якщо підпростори мають сталу і майже сталу метрику відповідно, де k $(1 < k \leq n)$ дорівнює кількості точок у кожному з підпросторів. Оскільки одноточковий простір з точністю до ізометрії єдиний, то позначимо його Y_1.

Теорема 2. *Відстані між точками експоненти Громова–Хаусдорфа $(2^X, D_{GH})$ простору з майже сталою метрикою (X, d) вказано у табл. 1.*

Доведення. Опишемо, як шукати відстань між довільними точками простору $(2^X, D_{GH})$, використовуючи теорему 1.

Нехай $k, m < n$ і $k \neq 1$, як і раніше, вважатимемо, що у просторів зі сталою метрикою всі відстані між точками дорівнюють a, майже сталою — відстані a й одна відстань b. Розглянемо такі випадки:

1. *У підпросторах рівна кількість точок.* Оскільки підпростори не ізометричні, то один із них має сталу метрику, а інший — майже сталу. А тому, якщо побудувати однозначну відповідність між точками цих підпросторів, вона задасть таку відповідність між відстанями, що всім відстаням a відповідатиме a, крім однієї, якій відповідатиме b. Отже, відстань між підпросторами рівна $|b - a|/2$.

2. *У підпросторах кількість точок нерівна (k і m), але обидва мають сталу метрику.* Відповідність між точками тут неоднозначна, оскільки принаймні двом точкам із m-точкового простору відповідає одна й та сама точка з k-точкового простору. Отже, деякій кількості відстаней a відповідають відстані рівні 0. Тому відстань між такими підпросторами буде рівна $a/2$.

3. *k-точковий підпростір має сталу метрику, а m-точковий — майже сталу.*

А. Якщо $m - k = 1$, то рівно двом точкам із більшого простору доцільно ставити у відповідність одну точку з меншого простору, адже так буде рівно одна відстань, якій відповідає 0 (таких відповідностей хочеться мати якнайменше, оскільки різниця з 0 максимальна). Однак якщо це відстань a, то в більшому просторі лишається ще відстань b, що не утворює нульової різниці, оскільки вона відповідає a. Або ж можна поставити у відповідність кінцям відрізка довжиною b якусь одну точку з меншого простору, а між рештою точок побудувати однозначну відповідність, внаслідок чого утвориться тільки одна ненульова різниця між b і 0. Тобто при $m - k = 1$ відстань рівна $\min(\max(a/2, |b-a|/2), b/2) = \min(a/2, b/2)$.

Б. Якщо $m - k \neq 1$, то більше, ніж одній парі точок з більшого підпростору, доведеться поставити у відповідність одну точку з меншого простору, тобто більше, ніж одній відстані відповідатиме 0, а тому в будь-якому випадку серед цих відстаней буде a. Відстані ж b відповідає або 0, або a. Отже, відстань рівна $\min(\max(a/2, |b-a|/2), \max(b/2, a/2)) = \min(a/2, \max(b/2, a/2)) = a/2$.

4. *k-точковий підпростір має майже сталу метрику, а m-точковий — сталу.* Через різну кількість точок певним відстаням a з більшого простору відповідатимуть 0. Між k довільно обраними точками більшого простору і точками меншого підпростору можна побудувати однозначну відповідність, а тому відстані b відповідатиме a. Після того, як решті точок із більшого простору поставити у відповідність довільні точки з меншого простору, деяким відстаням a з більшого простору відповідатимуть 0, а тому відстань рівна $\max(a/2, |b-a|/2) = a/2$.

5. *У підпросторах кількість точок нерівна (k і m), але обидва мають майже сталу метрику.*

А. Якщо $m-k=1$, то тільки одній відстані відповідатиме 0. Однак якщо 0 відповідатиме відстані b з більшого простору, то b з меншого простору відповідатиме a. Якщо ж 0 відповідатиме відстані a, то можна побудувати відповідність між точками так, щоб b відповідало b, а решті a відповідали a. Отже, відстань рівна $\min(a/2, \max(b/2, |b-a|/2))$.

Б. Якщо $m - k \neq 1$, відстаней з більшого простору, яким відповідають 0, буде більше ніж одна, тому серед них точно буде хоч одна a. Якщо всі вони a, то решта відповідних відстаней утворюють нульові різниці. Якщо серед них є b, то b з меншого простору відповідає a, а тому відстань рівна $\min(a/2, \max(b/2, |b-a|/2, a/2)) = a/2$.

6. *Є 1-точковий підпростір і m-точковий.* Оскільки в першому підпросторі тільки 1 точка, то вона відповідає будь-якій точці з другого простору, тобто всім відстаням з більшого простору відповідають 0. Отже, відстань рівна:

А. $\max(a/2, b/2)$, якщо серед відстаней m-точкового простору є і b, і a, тобто якщо він — з майже сталою метрикою і містить більше 2 точок.

Б. $b/2$, якщо серед відстаней m-точкового простору є тільки b, тобто цей простір зі сталою метрикою і містить рівно 2 точки.

В. $a/2$, якщо серед відстаней m-точкового простору немає відстані b, тобто він — зі сталою метрикою.

Таблиця 1. **Відстані в експоненті Громова–Хаусдорфа простору з майже сталою метрикою**

№	Точки	$b-a \le a \le b$	$b \le a-b \le a$	$a-b \le b \le a$
1	Y_k^a і Y_k^b	$(b-a)/2$	$(a-b)/2$	$(a-b)/2$
2	Y_k^a і Y_n^a	$a/2$	$a/2$	$a/2$
3a	Y_k^a і Y_{k+1}^b	$a/2$	$b/2$	$b/2$
3b	Y_k^a і Y_n^b, $n-k>1$	$a/2$	$a/2$	$a/2$
4	Y_k^b і Y_n^a	$a/2$	$a/2$	$a/2$
5a	Y_k^b і Y_{k+1}^b	$a/2$	$(a-b)/2$	$b/2$
5b	Y_k^b і Y_n^b, $n-k>1$	$a/2$	$a/2$	$a/2$
6a	Y_1 і Y_k^b, $k>2$	$b/2$	$a/2$	$a/2$
6b	Y_1 і Y_2^b	$b/2$	$b/2$	$b/2$
6c	Y_1 і Y_k^a	$a/2$	$a/2$	$a/2$

Безпосередньо з теореми 2 отримаємо такі твердження.

Наслідок 1. *Діаметр експоненти Громова–Хаусдорфа* $(2^X, D_{GH})$ *простору з майже сталою метрикою* (X, d) *рівний* $\max(a/2, b/2)$.

Наслідок 2. *Усі різносторонні трикутники у просторі* $(2^X, D_{GH})$ *є виродженими.*

Доведення. Справді, у побудованому просторі є всього 3 різних відстані ($b/2$, $a/2$, $|b-a|/2$), які становлять сторони будь-якого різностороннього трикутника в $(2^X, D_{GH})$. Якщо $b \geqslant a$, то $\frac{b-a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. Якщо ж $b \leqslant a$, то $\frac{b-a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a}{2}$.

Група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа майже еквідистантного простору

Теорема 3. *Група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа* $(2^X, D_{GH})$ n*-точкового простору з майже сталою метрикою* (X, d):

- *ізоморфна групі* S_{n-2}, *якщо* $b - a \leqslant a \leqslant b$;
- *ізоморфна групі* S_2, *якщо* $D \leqslant d - D \leqslant d$;
- *є тривіальною, якщо* $d - D \leqslant D \leqslant d$.

Доведення. Нехай φ – довільна ізометрія простору $B = (2^X, D_{GH})$ (експоненти Громова–Хаусдорфа простору X з майже сталою метрикою). Опишемо дію φ на 2^X для різних випадків.

1. Припустимо, що $b - a \leqslant a \leqslant b$. Покажемо, що в цьому випадку група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа n-точкового простору з майже сталою метрикою ізоморфна групі S_{n-2}.

Із табл. 1 випливає, що тільки для одноточкового простору Y_1 існує більше одного простору Y_k^* такого, що $D_{GH}(Y_1, Y_k^*) = b/2$, а тому

$$\varphi(Y_1) = Y_1. \tag{3}$$

Із табл. 1 також випливає, що єдиною точкою Y_k^* простору 2^X такою, що для всіх $V \in 2^X$ $D_{GH}(Y_k^*, V) \neq (b-a)/2$, є простір Y_n^b. Отже,

$$\varphi(Y_n^b) = Y_n^b. \tag{4}$$

Для довільного k, $1 < k < n$, $1 < l < n$

$$\varphi(Y_k^a) \neq Y_l^b,$$

оскільки $D_{GH}(Y_1, Y_k^a) = a/2$, а $D_{GH}(Y_1, Y_l^b) = b/2$. Крім того, $D_{GH}(Y_k^b, Y_k^a) = (b-a)/2$, і для всіх $l \neq k$ виконуються рівності $D_{GH}(Y_k^a, Y_l^b) = a/2$ і $D_{GH}(Y_k^a, Y_l^a) = a/2$, а тому якщо $\varphi(Y_k^a) = Y_l^a$, то буде виконуватись рівність $\varphi(Y_k^b) = Y_l^b$.

Покажемо, що $\forall k, l \ 1 < k, l < n$ може виконуватися рівність

$$\varphi(Y_k^a) = Y_l^a. \tag{5}$$

Із (5) і доведеного вище випливає, що $\varphi(Y_k^b) = Y_l^b$. Враховуючи (3) і (4), це означає, що φ діє як перестановка на множині $Y_2^a, Y_3^a, ..., Y_{n-1}^a$, а образи елементів $Y_2^b, Y_3^b, ..., Y_{n-1}^b$ однозначно визначаються цією перестановкою.

Покажемо, що довільне відображення φ, для якого справедливі такі рівності:

$$\varphi(Y_1) = Y_1;$$
$$\varphi(Y_n^b) = Y_n^b;$$
$$\varphi(Y_k^a) = Y_l^a;$$
$$\varphi(Y_k^b) = Y_l^b$$

є ізометрією простору 2^X. Очевидно, що φ є бієкцією. Крім того, для будь-яких $k \neq l \neq m \neq j$ виконуються рівності

$$D_{GH}(\varphi(Y_1), \varphi(Y_k^a)) = D_{GH}(Y_1, Y_l^a) = \\ = a/2 = D_{GH}(Y_1, Y_k^a),$$

$$D_{GH}(\varphi(Y_1), \varphi(Y_k^b)) = D_{GH}(Y_1, Y_l^b) = \\ = b/2 = D_{GH}(Y_1, Y_k^b),$$

$$D_{GH}(\varphi(Y_k^a), \varphi(Y_k^b)) = D_{GH}(Y_l^a, Y_l^b) = \\ = (b-a)/2 = D_{GH}(Y_k^a, Y_k^b), \quad 1 < k < n,$$

$$D_{GH}(\varphi(Y_k^a), \varphi(Y_l^a)) = D_{GH}(Y_m^a, Y_j^a) = \\ = a/2 = D_{GH}(Y_k^a, Y_l^a),$$

$$D_{GH}(\varphi(Y_k^a), \varphi(Y_l^b)) = D_{GH}(Y_m^a, Y_j^b) = a/2 = \\ = D_{GH}(Y_k^a, Y_l^b),$$

$$D_{GH}(\varphi(Y_k^b), \varphi(Y_l^b)) = D_{GH}(Y_m^b, Y_j^b) = a/2 = \\ = D_{GH}(Y_k^b, Y_l^b).$$

Отже, φ зберігає відстані, а тому є ізометрією простору $(2^X, D_{GH})$.

2. Припустимо тепер, що виконуються нерівності $b \leqslant a - b \leqslant a$. Покажемо, що група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа n-точкового простору з майже сталою метрикою ізоморфна групі S_2.

З табл. 1 випливає, що тільки для одноточкового простору Y_1 існує рівно 1 простір (а саме Y_2^b), для якого виконується $D_{GH}(Y_1, Y_2^b) = b/2$, для решти просторів $Y_k^* \neq Y_2^b$: $D_{GH}(Y_1, Y_k^*) = a/2$. Для будь-якого простору Y_k^*, крім Y_1, $\exists Y_l^{**}$, такий, що: $D_{GH}(Y_k^*, Y_l^{**}) = (a-b)/2$, тому

$$\varphi(Y_1) = Y_1.$$

Крім того, якщо $\varphi(Y_2^b) \neq Y_2^b$, то $D_{GH}(\varphi(Y_1), \varphi(Y_2^b)) = D_{GH}(Y_1, Y_k^*) = a/2 \neq D_{GH}(Y_1, Y_2^b)$, де $Y_k^* \neq Y_2^b$. Таким чином, щоб φ була ізометрією, необхідно:

$$\varphi(Y_2^b) = Y_2^b.$$

Далі, за табл. 1 для простору Y_2^b існує 2 простори Y_k^* такі, що $D_{GH}(Y_2^b, Y_k^*) = (a-b)/2$. Це простори Y_2^a і Y_3^b. Однак, якщо $\varphi(Y_3^b) = Y_2^a$, то φ не є ізометрією, оскільки кількість просторів Y_k^*, для яких $D_{GH}(Y_3^b, Y_k^*) = (a-b)/2$, відрізняється від кількості просторів, для яких $D_{GH}(Y_2^a, Y_k^*) = (a-b)/2$. Тому:

$$\begin{aligned} \varphi(Y_2^a) &= Y_2^a; \\ \varphi(Y_3^b) &= Y_3^b. \end{aligned} \tag{6}$$

Тепер методом математичної індукції доведемо, що для того, щоб φ була ізометрією, необхідно, щоб для довільного k,$1 < k < n-1$ виконувалося наступне:

$$\begin{aligned} \varphi(Y_k^a) &= Y_k^a; \\ \varphi(Y_{k+1}^b) &= Y_{k+1}^b. \end{aligned} \tag{7}$$

Базою індукції є (6). Припустимо, що (7) виконується для всіх $k : 1 < k < l < n-1$. Покажемо, що тоді (7) виконується і для $k = l$. Із табл. (1) бачимо, що $D_{GH}(Y_l^b, Y_{l+1}^b) = D_{GH}(Y_l^b, Y_{l-1}^b) = D_{GH}(Y_l^b, Y_l^a) = (a-b)/2$. Оскільки за припущенням індукції $\varphi(Y_{l-1+1}^b) = Y_l^b$ і $\varphi(Y_{l-1}^b) = Y_{l-1}^b$, то необхідно показати, що при $\varphi(Y_{l+1}^b) = Y_l^a$ φ не є ізометрією. А це очевидно, якщо помітити, що $D_{GH}(Y_l^a, Y_j^*) = (a-b)/2$ тільки для одного простору Y_j^* (а саме для $Y_j^* = Y_l^b$), тоді як при $l+1 < n$ $D_{GH}(Y_{l+1}^b, Y_j^*) = (a-b)/2$ для 3 різних просторів: $Y_j^* \in Y_{l+1}^a; Y_{l+2}^b; Y_l^b$. Таким чином, ми показали, якщо φ є ізометрією, то обов'язково виконується $\varphi(Y_k^a) = Y_k^a$ і $\varphi(Y_{k+1}^b) = Y_{k+1}^b$.

Тепер зауважимо, що може виконуватися наступне: $\varphi(Y_{n-1}^a) = Y_n^b$. Покажемо, що відстані при цьому зберігаються. Справді, виконуються рівності:

$$\begin{aligned} D_{GH}(\varphi(Y_{n-1}^a), \varphi(Y_n^b)) &= D_{GH}(Y_n^b, Y_{n-1}^a) = \\ &= D_{GH}(Y_{n-1}^a, Y_n^b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{GH}(\varphi(Y_{n-1}^a), \varphi(Y_{n-1}^b)) &= D_{GH}(Y_n^b, Y_{n-1}^b) = \\ &= (a-b)/2 = D_{GH}(Y_{n-1}^a, Y_{n-1}^b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{GH}(\varphi(Y_n^b), \varphi(Y_{n-1}^b)) &= D_{GH}(Y_{n-1}^a, Y_{n-1}^b) = \\ &= (a-b)/2 = D_{GH}(Y_n^b, Y_{n-1}^b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{GH}(\varphi(Y_{n-1}^a), \varphi(Y_j^*)) &= D_{GH}(Y_n^b, Y_j^*) = \\ &= a/2 = D_{GH}(Y_{n-1}^a, Y_j^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{GH}(\varphi(Y_n^b), \varphi(Y_j^*)) &= D_{GH}(Y_{n-1}^a, Y_j^*) = \\ &= a/2 = D_{GH}(Y_n^b, Y_j^*), \end{aligned}$$

де $j \neq n-1$, $j \neq n$.

Отже, у цьому випадку є всього дві ізометрії: одна — тотожнє перетворення; для іншої $\varphi(Y_{n-1}^a) = Y_n^b$, $\varphi(Y_n^b) = Y_{n-1}^a$, а для всіх інших точок $\varphi(Y_j^*) = Y_j^*$.

3. Покажемо, що при $a - b \leqslant b \leqslant a$ група ізометрій експоненти Громова–Хаусдорфа n-точкового простору з майже сталою метрикою є тривіальною.

З табл. 1 випливає, що тільки для одноточкового простору Y_1 існує рівно 1 простір (а саме Y_2^b), для якого виконується $D_{GH}(Y_1, Y_2^b) = b/2$, а для решти просторів $Y_k^* \neq Y_2^b$: $D_{GH}(Y_1, Y_k^*) = a/2$. Крім того, для будь-якого неодноточкового простору Y_k^*, $\exists Y_l^{**}$ такий, що: $D_{GH}(Y_k^*, Y_l^{**}) = (a-b)/2$. Отже

$$\varphi(Y_1) = Y_1. \tag{8}$$

Крім того, якщо $\varphi(Y_2^b) \neq Y_2^b$, то $D_{GH}(\varphi(Y_1), \varphi(Y_2^b)) = D_{GH}(Y_1, Y_k^*) = a/2 \neq D_{GH}(Y_1, Y_2^b)$, де $Y_k^* \neq Y_2^b$. Таким чином, щоб φ була ізометрією, необхідно:

$$\varphi(Y_2^b) = Y_2^b. \tag{9}$$

Далі, якщо $\varphi(Y_2^a) \neq Y_2^a$, то $D_{GH}(\varphi(Y_2^b), \varphi(Y_2^a)) = D_{GH}(Y_2^b, Y_k^*) \neq D_{GH}(Y_2^b, Y_2^a) = (a-b)/2$, де $Y_k^* \neq Y_2^a$. Таким чином, щоб φ була ізометрією, необхідно:

$$\varphi(Y_2^a) = Y_2^a. \tag{10}$$

Також потрібно:

$$\varphi(Y_3^b) = Y_3^b, \tag{11}$$

оскільки якщо $\varphi(Y_3^b) = Y_k^* \neq Y_3^b$, то $D_{GH}(\varphi(Y_2^a), \varphi(Y_3^b)) = D_{GH}(Y_2^a, Y_k^*) \neq D_{GH}(Y_2^a, Y_3^b) = b/2$.

Тепер методом математичної індукції доведемо, що для того, щоб φ була ізометрією, необхідно, щоб $\forall k : 1 < k < n$ виконувалося наступне:

$$\begin{aligned} \varphi(Y_k^a) &= Y_k^a, \\ \varphi(Y_{k+1}^b) &= Y_{k+1}^b. \end{aligned} \tag{12}$$

Базою індукції є (9), (а (10) та (11) демонструють перший крок індукції). Припустимо, що (12) виконується для всіх k, $1 < k < l < n$. Покажемо, що тоді це виконується і для $k = l$. Із табл. 1 бачимо, що існує тільки один простір $Y_j^* = Y_l^a$, такий що $D_{GH}(Y_l^b, Y_j^*) = (a - b)/2$. Це означає, що при $\varphi(Y_l^a) = Y_j^* \neq Y_l^a$ (з урахуванням того, що за припущенням індукції $\varphi(Y_{l-1+1}^b) = Y_l^b$): $D_{GH}(\varphi(Y_l^b), \varphi(Y_l^a)) = D_{GH}(Y_l^b, Y_j^*) \neq D_{GH}(Y_l^b, Y_l^a) = (a - b)/2$. Тобто з того, що $\varphi(Y_l^b) = Y_l^b$ випливає: $\varphi(Y_l^a) = Y_l^a$. Далі з табл. 1 можна бачити, що існує тільки один простір $Y_j^* = Y_{l+1}^b$ такий, що $D_{GH}(Y_l^a, Y_j^*) = b/2$. Це означає, що при $\varphi(Y_{l+1}^b) = Y_j^* \neq Y_{l+1}^b$ (з урахуванням того, що $\varphi(Y_l^a) = Y_l^a$, як було щойно показано): $D_{GH}(\varphi(Y_l^a), \varphi(Y_{l+1}^b)) = D_{GH}(Y_l^a, Y_j^*) \neq D_{GH}(Y_l^a, Y_{l+1}^b) = b/2$. Тобто з того, що $\varphi(Y_l^a) = Y_l^a$, випливає, що $\varphi(Y_{l+1}^b) = Y_{l+1}^b$. Таким чином, ми показали, що з того, що φ — ізометрія і $\varphi(Y_l^b) = Y_l^b$, випливають рівності $\varphi(Y_l^a) = Y_l^a$ і $\varphi(Y_{l+1}^b) = Y_{l+1}^b$. Тобто рівність (12) виконується $\forall k : 1 < k < n$.

Очевидно, що завдяки виконанню (8) і (12) група ізометрій у цьому випадку буде тривіальною.

Список літератури

1. Gromov M. Metric structures Riemannian and non–Riemannian spaces / M. Gromov. — Birkhäser Boston Inc. : Boston, MA, 1999. — 585 p.
2. Fukaya K. Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications / K. Fukaya // Recent topics in differential and analytic geometry, Adv. Stud. Pure Math., Academic Press : Boston, MA — 1990. — Vol. 18. — P. 143–248.
3. Edgar G. A. Measure, topology and fractal geometry / G. A. Edgar. — New-York : Springer, 1990. — 232 p.
4. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps / M. Gromov // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1981. — № 53. — P. 53–73.
5. Олійник Б. В. Експонента Громова–Хаусдорфа скінченного метричного простору / Б. В. Олійник // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 53–57.
6. Панова А. І. Експонента Громова–Хаусдорфа майже еквіди стантних метричних просторів / А. І. Панова // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців : тези допов., 28–29 квітня 2011 р. Київ. — К. : Ін-т математики НАН України, 2011. — С. 122–123.
7. Бураго Д. Ю. Курс метрической геометрии / Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004 — 512 с.

A. Panova

THE GROMOV–HAUSDORFF EXPONENT OF A ALMOST EQUIDISTANCE SPACE

The article describes the features of a metric space constructed as the Gromov–Hausdorff exponent of a almost equidistance metric space. It is shown that all scalene triangles in this space are degenerate. It is proven that isometry group of the Gromov–Hausdorff exponent of a almost equidistance n-points space is either isomorphic to S_{n-2}, or isomorphic to S_2, or is trivial.

Keywords: metric space, Gromov–Hausdorff exponent, isometry group.

Матеріал надійшов 11.02.2012