Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2013, № 15.— С. 119–133.

УДК 510.22 + 517.5

Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями

І. О. Савченко
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних знакододатних рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин, а саме рядів, для яких виконуються наступні співвідношення між членами та залишками ряду: $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ нескінченну кількість разів. Обчислено міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича відповідних множин неповних сум.

Ключові слова: множина неповних сум (підсум) ряду, фрактал, міра Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Abstract. The paper highlights one class of convergent positive series with the essential overlaps of cylindrical sets, namely the series such that $a_n > r_n$ and $a_n < r_n$ infinity many, where a_n is a term and r_n is a remainder of the series. We study topological, metric, and fractal properties of the sets of incomplete sums (subsums) of such series. Lebesgue measure and Hausdorff-Besicovitch dimension of these incomplete sums are calculated.

Keywords: set of incomplete sums (subsums) of a series, a fractal, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch dimension.

Вступ

Розглядається збіжний знакододатний ряд

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n. \tag{1}$$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1).

Множину всіх неповних сум ряду (1) позначатимемо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x: \ x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Вивченням тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ науковці займаються майже століття (див. наприклад [5], [6], [8], [9], [13], [17], [4], [27]). І в цьому відношенні здобуто ряд загальних результатів, але опис її властивостей далекий до повного. Ще менш дослідженими є фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено (див. наприклад [1], [14], [20], [4], [6], [27]). На сьогодні все ще невідомі необхідні і достатні умови нуль-мірності (у розумінні міри Лебега), а також ніде не щільності множини неповних сум ряду (1).

В останній час акцентовано ведуться дослідження властивостей множини неповних сум (див. наприклад [2], [7], [12], [16], [18], [21], [20], [22]). В основному це дослідження окремих випадків, коли члени ряду утворюють послідовність, яка володіє деякою властивістю однорідності по n.

Тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів суттєво залежать від їх "швидкості збіжності". Наступні три факти про множину $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1), у якого $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ встановили С. Какея [8] в 1914 році (і незалежно Г. Горнич [6] в 1941 р.).

Теорема 1 (Kakeya-Hornich). *Множина $E\{a_n\}$ підсум ряду (1) є*

1) досконалою множиною;

2) скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$);

3) гомеоморфною класичній множині Кантора, якщо $a_n > r_n$ для всіх достатньо великих n.

Зауваження 1. *Наведене твердження не можна застосувати до дослідження топологічних властивостей множин підсум рядів, у яких послідовність членів (a_n) не є монотонною (нерівність $a_n \geq a_{n+1}$ не виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$). Наступні два приклади це підтверджують.*

Приклад 1. Для ряду

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + ... + \frac{1}{4^k} + \frac{2}{4^k} + ...$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів n. А множина підсум даного ряду є відрізком $[0, 1]$, оскільки кожне число x, що є підсумою даного ряду, можна подати у вигляді четвіркового ряду:

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + ... + \frac{\alpha_k}{4^k} + ..., \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Приклад 2. Для ряду

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + ...$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів, а нерівність $a_n < r_n$ – для всіх непарних. І тому теорема 1 (без врахування умови монотонності членів ряду) не дає достатньої інформації про множину підсум даного ряду. Проте, після упорядкування членів ряду, нерівність $a_n > r_n$ виконуватиметься для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому множина його підсум є ніде не щільною.

У тій же роботі [8] С. Какея висунув припущення, що при виконанні умови $a_n > r_n$ для нескінченної кількості n, множина $E\{a_n\}$ буде ніде не щільною (а, отже, гомеоморфною множині Кантора). Перший контрприклад навели в 1980 р. (без доведення) А.Д. Вайнштейн і Б.З. Шапіро [17]. Незалежно, Ф. Ференс [4] навів у 1984 р. інший приклад (з доведенням). Більш простий приклад представили Дж. Ґатрі і Дж. Німан [5]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + ... \,. \tag{2}$$

Для цього ряду, як і у прикладах із вище наведених робіт, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leq r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина T неповних сум ряду (2) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$, але не є скінченним об'єднанням відрізків. Множину T можна означити наступним чином

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C — класична множина Кантора, G_k — об'єднання всіх центральних третин, які видаляються з множини C на k-му кроці її побудови. В цій же роботі [5], автори сформулювали теорему, яку було остаточно довену в [10]. Наведемо її.

Теорема 2 (Guthrie-Nymann-Sáenz)**.** *Множина* $E\{a_n\}$ *неповних сум збіжного знакододатного ряду* (1) *є однією з наступних:*

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T *неповних сум ряду* (2)*.*

Ми цікавимось *тополого-метричними та фрактальними властивостями* множин неповних сум знакододатних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин індексів n. Даний випадок є найбільш загадковим і мало вивченим. Множина підсум ряду, що володіє такою властивістю, може бути як нуль-множиною Лебега, так і множиною додатньої міри (ніде не щільною множиною або множиною, що містить нескінченну кількість відрізків). Про це свідчать приклади ряду (2) і ряду

$$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4^2}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\frac{3}{4^3}+\dots\,. \tag{3}$$

Множина неповних сум ряду (3) є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\log_4(2+\sqrt{2})\approx 0,8858.$$

Наведений результат є наслідком теореми 4.

Об'єктом даної роботи є множина E_λ неповних сум ряду

$$a_1+a_2+a_1\lambda+a_2\lambda+a_1\lambda^2+a_2\lambda^2+\dots=\frac{a_1+a_2}{1-\lambda}, \tag{4}$$

де a_1, a_2, λ — дійсні числа, $a_1>a_2$, $\lambda\in(0,1)$.

Зауваження 2. *Згрупувавши попарно члени ряду* (4) *і врахувавши, що коефіцієнти* $\varepsilon_{2n-1}a_1+\varepsilon_{2n}a_2$ *при членах* λ^{n-1} *можуть набувати чотири значення, множину неповних сум ряду* (4) *запишемо у вигляді*

$$E_\lambda=\left\{x:\ x=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\lambda^{n-1},\quad \eta_n\in\{0,a_1,a_2,a_1+a_2\}\right\}.$$

Множина E_λ *досліджувалась у роботі* [14]*, у якій стверджується, що для майже всіх значень* $\lambda>\frac{1}{4}$ *вона матиме додатню міру Лебега (див. також теорему 2.1 роботи* [15]*). Також було встановлено інування такої щільної нуль-множини* M_0 *значень* $\lambda>\frac{1}{4}$*, що при кожному з них множина* E_λ *має нульову міру Лебега. Але явно вказати ці значення не вдалося.*

Зауваження 3. *Множина* E_λ *неповних сум ряду* (4) *є векторною (арифметичною) сумою* $E\{a_1q^{n-1}\}\oplus E\{a_2q^{n-1}\}$ *множин неповних сум рядів* $\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty}a_2q^{n-1}$*, тобто*

$$E_q=E\{a_1q^{n-1}\}\oplus E\{a_2q^{n-1}\}=\left\{x:\ x=a+b,\ \text{де}\ a\in E\{a_1q^{n-1}\},\ b\in E\{a_2q^{n-1}\}\right\}.$$

З теореми 1.1. роботи [11] *випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега) значень* $q\in(\frac{1}{4},1)$*, арифметична сума двох множин підсум геометричних рядів з членами* a_1q^{n-1} *та* a_2q^{n-1} *є множиною додатньої міри.*

Із зроблених вище зауважень і деяких стандартних міркувань (таких, як в теоремі 2 роботи [24]) випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Множина E_λ неповних сум ряду (4) є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, якщо $\lambda \in (0; \frac{1}{4})$;

2) відрізком $[0, \frac{a_1+a_2}{1-\lambda}]$, якщо $\lambda \in \Big[\max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\}; 1\Big)$;

3) множиною додатньої міри Лебега для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{4}; \max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\})$.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E_λ дорівнює

$$\alpha_0(E_\lambda) = -\log_\lambda 4$$

для майже всіх (у розумінні міри Лебега) значень $\lambda \in (0, \frac{1}{4})$ (для всіх $\lambda \in \Big(0; \min\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\}\Big)$).

Отже, залишається мало дослідженим проміжок значень

$$\lambda \in \left[\min\left\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\right\};\ \max\left\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\right\}\right) \equiv \widetilde{M},$$

при яких множина E_λ має складну геометрію. З однієї сторони, для майже всіх $\lambda \in \widetilde{M}$ множина E_λ має додатню міру Лебега, а з іншої сторони, існує така підмножина $M_0 \subset \widetilde{M}$, що для всіх $\lambda \in M_0$ множина E_λ має нульову міру Лебега. Основні труднощі при досліджені даної множини пов'язані з тим, що існує континуальна підмножина точок $x \in E_\lambda$, які мають континуальну кількість різних представлень у вигляді сум $x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n$, де $\omega_n \in \{0, 1\}$.

Основною задачею даної роботи є дослідження фрактальних властивостей множини підсум ряду (4) при $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2} \equiv q \in \widetilde{M}$, тобто ряду

$$a_1 + a_2 + a_1 q + a_2 q + a_1 q^2 + a_2 q^2 + ... = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}. \tag{5}$$

Дану множину неповних сум позначатимемо через E_q.

Легко бачити, що для членів ряду (5) виконується умова однорідності (по n):

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{6}$$

з якої випливає нерівність $a_{2n-1} < r_{2n-1}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. При певних співвідношеннях чисел a_1 і a_2, для всіх $n \in \mathbb{N}$, має місце одна з двох нерівностей $a_{2n-1} > r_{2n-1}$ або $a_{2n-1} \leq r_{2n-1}$.

Теорема 2 дає повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множини E_λ при конкретному фіксованому значенні $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}$, яке може бути більшим за $\frac{1}{4}$. Основний акцент зроблено на вивченні її фрактальних властивостей, чого не було зроблено у вище наведених роботах.

1. Множина неповних сум ряду

З метою вивчення властивостей множини E_q неповних сум ряду (5), корисними є поняття *циліндра* та *циліндричного відрізка.*

Означення **1.** Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – фіксований впорядкований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m},\ \sup \Delta'_{c_1...c_m}] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n,\ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

З означень випливають наступні *властивості циліндричних множин*:

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, $\inf \Delta_{c_1...c_m} = \inf \Delta'_{c_1...c_m}$, $\sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta'_{c_1...c_m}$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m 0} \cup \Delta'_{c_1...c_m 1}$.

3) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

4) Для довільної послідовності (c_m) нулів та одиниць має місце

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1...c_m} \equiv \Delta_{c_1...c_m...} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m = x \in E\{a_n\} \subset [0, r_0].$$

5) $E\{a_n\} \subset F_{m+1} \subset F_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, де $F_m = \bigcup\limits_{c_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,m}} \Delta_{c_1...c_m}$.

6) $E\{a_n\} = \lim\limits_{m\to\infty} F_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

7) Умова

$$\Delta_{c_1..c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1..c_{2n-2}1} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}0111} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}1000}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{7}$$

рівносильна рівності

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \,.$$

Доведення. Рівність (7) рівносильна рівності довжин

$$|\Delta_{c_1...c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1...c_{2n-2}1}| = |\Delta_{c_1...c_{2n-2}0111}|,$$

яка, згідно властивостей 3 і 6 циліндричних множин, записується у вигляді

$$r_{2n-1} - a_{2n-1} = r_{2n+2},$$

звідки

$$r_{2n-1} - r_{2n+2} = a_{2n-1} \Leftrightarrow a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = a_{2n-1}.$$

$\square$

Нагадаємо означення *$\alpha-$міри Хаусдорфа* і *розмірності Хаусдорфа-Безиковича* множини $E \subset \mathbb{R}^1$, які більш тонко характеризують "масивність" множин у випадку їх нуль-мірності (у розумінні міри Лебега).

Означення **2.** Нехай $0 < \alpha$ — фіксоване дійсне число, *α–мірною мірою (α–мірою) Хаусдорфа множини M* називається значення функції множини, визначеної рівністю

$$\mathcal{H}^\alpha(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(M) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\varepsilon^\alpha(M), \quad \text{де} \quad m_\varepsilon^\alpha(M) = \inf_{|M_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |M_j|^\alpha \right\}$$

і точна нижня грань визначається за всіма можливими не більш ніж зчисленними покриттями множини M відрізками M_i, діаметри $|M_i|$ яких не перевищують ε.

Невід'ємне число

$$\alpha_0(M) = \sup\{\alpha : \ \mathcal{H}^\alpha(M) = +\infty\} = \inf\{\alpha : \ \mathcal{H}^\alpha(M) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини M*.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича має наступні *властивості*:

1) Якщо $M_1 \subset M_2$, то $\alpha_0(M_1) \le \alpha_0(M_2)$;

2) $\alpha_0\left(\bigcup\limits_i M_i\right) = \sup\limits_i \alpha_0(M_i)$.

Теорема 4. *Множина E_q неповних сум ряду* (5) *є*

1) відрізком $[0, \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}]$, якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{2}),$$

якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \ 1)$.

Доведення. 1) Очевидно, що $a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} < r_{2n-1}$ для всіх номерів n. Нерівність $a_{2n} \le r_{2n}$ рівносильна нерівності $a_2 \le \frac{a_1^2-a_2^2}{2a_2}$, яка має місце при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \le r_n$, яка у випадку незростаючої послідовності (a_n) є необхідною і достатньою для того, щоб множина E_q була відрізком.

Зазначимо, що у випадку немонотонної послідовності (a_n) членів ряду (1), умова $a_n \le r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, є достатньою для того, щоб множина його неповних сум була відрізком, але, взагалі кажучи, не є необхідною.

2) Оскільки $a_{2n-1} > a_{2n}$ для всіх n, то послідовність (a_n) членів ряду (5) не є монотонною лише у випадку, коли $a_{2n} < a_{2n+1} \Leftrightarrow a_2 < \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1+a_2}$, що можливо при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \sqrt{2}-1) \subset (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Якщо ж $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, то послідовність членів ряду (5) є спадною і тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедливими є нерівності:

$$a_{2n} > r_{2n},\ \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}01} < \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}1},\ \max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}10} > \max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0},$$

з яких, враховуючи (7), випливає:

$$\Delta_{c_1 \ldots c_{2n-1}0} \cap \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-1}1} = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}00}; \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}01}) = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}10}; \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}11}) = \varnothing.$$

Таким чином, інтервали виду $\delta_{c_1 \ldots c_{2n-1} i_{2n}} \equiv (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-1}0}; \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-1}1})$ не містять точок даної множини. Кількість таких *суміжних з множиною* E_q *інтервалів рангу* $2n$ нас цікавитиме. Легко бачити, що

$$|\delta_{c_1 \ldots c_{2n-1} i_{2n}}| = a_{2n} - r_{2n} \equiv d_{2n} = \frac{3a_2^2 - a_1^2}{2a_2} \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

З метою дослідження властивостей даної множини, розглядатимемо циліндричні множини рангу $2n$ і виділимо їх два типи.

1) $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} \equiv \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}01} \cup \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}10}$ — множина, яка є об'єднанням двох циліндрів, які між собою перетинаються. Відповідний множині $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$ циліндричний відрізок позначатимемо через $\square_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} \equiv [\min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}01}, \max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}10}]$.

2) $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$ — циліндр, геометрично подібний всій множині E_q, $c \in \{0, 1\}$.

Множина $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$ є об'єднанням *двох* множин $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ccjj}$, де $j \in \{0, 1\}$, і *однієї* множини $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ccab}$:

$$\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc} = \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc00} \cup \square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ccab} \cup \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc11}, \tag{8}$$

а множина $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$ є об'єднанням *трьох* множин $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n}cc}$ і *двох* множин $\square'_{c_1 \ldots c_{2n}ab}$ наступного парного рангу:

$$\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} = \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}0100} \cup \square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}01ab} \cup \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}\bar{c}ccc} \cup \square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}10ab} \cup \Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}1011}. \tag{9}$$

Множина $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$ має *чотири* суміжні інтервали виду:

$$(\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0100}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0101}),\ (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0110}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0111}),$$

$$(\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}0111}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}1001}),\ (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}1010}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}1011}),$$

а множина $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$ має *два* суміжні інтервали виду:

$$(\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc00}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc01}) \text{ та } (\max \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc10}, \min \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc11})$$

рангу $2n + 2$.

Нехай x_n — кількість всіх циліндричних множин виду $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$, y_n — кількість всіх множин виду $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$, а z_n — кількість всіх суміжних з множиною E_q інтервалів рангу $2n$.

З рівностей (8) та (9) випливає, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \tag{10}$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \tag{11}$$

Оскільки множина $\Delta'_{c_1 \ldots c_{2n-4}cc}$ має *два* суміжні інтервали рангу $2n$, а множина $\square'_{c_1 \ldots c_{2n-4}ab}$ — *чотири*, то

$$z_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Оскільки циліндр другого рангу геометрично подібний множині E_q, то $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Результати занесемо у таблицю.

Крок n / кількість	x_n	y_n	z_n
0	1	0	0
1	2	1	2
2	7	4	8
3	26	15	30
...	...	...	...
n	$2x_{n-1} + 3y_{n-1}$	$x_{n-1} + 2y_{n-1}$	$2x_{n-1} + 4y_{n-1}$

Відшукаємо рекурентні співвідношення, якими пов'язані члени послідовностей (x_n), (y_n), (z_n). З рівностей (10), (11) отримаємо $x_{n+1} = y_{n+1} + x_n + y_n$, що рівносильно

$$x_{n+1} - x_n = y_{n+1} + y_n. \tag{13}$$

Перетворивши рівність (10), врахувавши (11), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + y_n = 2x_n + 2y_n + x_{n-1} + 2y_{n-1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(y_n + y_{n-1}).$$

Скориставшись рівністю (13), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1}) = 4x_n - x_{n-1}.$$

Аналогічно з рівностей (10), (11) маємо:

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} - 4y_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n =$$
$$= 2(x_{n-1} + 2y_{n-1}) + 2y_n - y_{n-1} = 4y_n - y_{n-1}.$$

Нескладно побачити, що z_{n+1} також виражається рекурентно:

$$z_{n+1} = 2x_n + 4y_n = 8x_n - 2x_{n-1} + 16y_n - 4y_{n-1} =$$

$$= 4 \cdot (2x_n + 4y_n) - (2x_{n-1} + 4y_{n-1}) = 4z_n - z_{n-1}.$$

Таким чином, отримано *зворотні послідовністі* виду

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \tag{14}$$

з різними початковими членами u_0 та u_1.

Від рекурентного задання послідовності $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ перейдемо до аналітичного. Відшукаємо формулу загального члена. Рівняння (14) є *лінійним різницевим другого порядку*, розв'язки якого будемо шукати серед показникових функцій виду $u_n = \lambda^n$. Зробивши підстановку, отримаємо

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + \lambda^n = 0,$$

скоротивши на λ^n, отримаємо рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

яке є *характеристичним* для різницевого рівняння (14). Воно має два дійсні корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. З теорії різницевих рівнянь відомо, що загальним розв'язком рівняння (14) є функція

$$u_n = C_1(2+\sqrt{3})^n + C_2(2-\sqrt{3})^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Підставивши в останню рівність початкові умови $\begin{cases} u_0 \equiv z_0 = 0, \\ u_1 \equiv z_1 = 2, \end{cases}$ отримаємо коефіцієнти $C_1^z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2^z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогічно, підставивши у рівність (15) умови $\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_1 = 2 \end{cases}$ і $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases}$ отримаємо $C_1^x = C_2^x = \frac{1}{2}$ і $C_1^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $C_2^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ відповідно.

Отже, шукані функції мають вигляд:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right), \tag{16}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right), \tag{17}$$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right). \tag{18}$$

Для знаходження міри Лебега даної множини знайдемо міру її доповнення, тобто обчислимо суму довжин усіх суміжних з E_q інтервалів:

$$\lambda(\overline{E_q}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n d_{2n} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right) q^{n-1} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \left(\frac{2+\sqrt{3}}{1-2q-\sqrt{3}q} - \frac{2-\sqrt{3}}{1-2q+\sqrt{3}q} \right) = \frac{a_2 - q(a_1+2a_2)}{1-q} \left(\frac{2}{1-4q+q^2} \right).$$

Підставивши значення $q = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$, отримаємо: $\lambda(\overline{E_q}) = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} = |E_q|$. Таким чином, міра доповнення множини дорівнює її діаметру. Отже, $\lambda(E_q) = 0$.

Позначимо через $\mathcal{A}_n$ сімейство всіх відрізків $\Box_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$ та $\Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$ рангу $2n$, тобто,

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \Box_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} \wedge \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc},\ c_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,...,2n-2 \right\},$$

а через $\mathcal{A}$ — сімейство всіх можливих таких відрізків, тобто

$$\mathcal{A} = \left\{ \Box_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} \wedge \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc},\ n \in \mathbb{N},\ c_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,...,2n-2 \right\}.$$

Легко бачити, що система $\mathcal{A}_n$ покриває множину E_q скінченною кількістю відрізків, які між собою не перетинаються. Для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини E_q розглядатимемо її покриття лише відрізками з сімейства $\mathcal{A}$. Кількість всіх відрізків множини $\mathcal{A}_n$ виражається за формулами (16) та (17), а довжини відповідних відрізків становлять

$$|\Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}| = r_{2n} = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} q^n,$$

$$|\Box_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}| = 2r_{2n} - r_{2n+2} = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2} q^n \equiv \varepsilon_n.$$

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце

$$m^{\alpha}_{\varepsilon_n}(E_q) \le x_n \cdot |\Box_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}|^{\alpha} + y_n \cdot |\Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}ii}|^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \right) \left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} q^n \right)^{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \right) \left(\frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2} q^n \right)^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n (A_1 q^n)^{\alpha} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n (A_1 q^n)^{\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n (A_2 q^n)^{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n (A_2 q^n)^{\alpha} =$$

$$= (2+\sqrt{3})^n \left(\frac{1}{2}(A_1 q^n)^{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_2 q^n)^{\alpha} \right) + (2-\sqrt{3})^n \left(\frac{1}{2}(A_1 q^n)^{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(A_2 q^n)^{\alpha} \right) =$$

$$= (2+\sqrt{3})^n q^{\alpha n} \left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} + \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}} \right) + (2-\sqrt{3})^n q^{\alpha n} \left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} - \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= B_1 \left((2+\sqrt{3}) q^{\alpha} \right)^n + B_2 \left((2-\sqrt{3}) q^{\alpha} \right)^n = B_1 \left(1 + \frac{B_2}{B_1} (2-\sqrt{3})^{2n} \right) \cdot \left((2+\sqrt{3}) q^{\alpha} \right)^n,$$

де $A_1 = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}$, $A_2 = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}$, $B_1 \equiv B_1(\alpha) = \frac{A_1^\alpha}{2} + \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}}$, $B_2 \equiv B_2(\alpha) = \frac{A_1^\alpha}{2} - \frac{A_2^\alpha}{2\sqrt{3}}$.

Отже,

$$H^\alpha(E_q) \leq \lim_{n\to\infty}\left(B_1\left(1+\frac{B_2}{B_1}(2-\sqrt{3})^{2n}\right)\cdot\left((2+\sqrt{3})q^\alpha\right)^n\right) = B_1\lim_{n\to\infty}\left((2+\sqrt{3})q^\alpha\right)^n.$$

Якщо $(2+\sqrt{3})q^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > \log_q(2-\sqrt{3}) \equiv \alpha_0$, то $H^\alpha(E_q) = 0$. А тому $H^\alpha(E_q) = 0$ для всіх $\alpha > \alpha_0$. Таким чином,

$$H^{\alpha_0}(E_q) \leq B_1(\alpha_0) = \frac{A_1^{\alpha_0}}{2} + \frac{A_2^{\alpha_0}}{2\sqrt{3}} \quad \text{і} \quad \alpha_0(E_q) \leq \alpha_0 = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}).$$

Доведемо тепер нерівність $\alpha_0(E_q) \geq \alpha_0$. Для цього покажемо, що $H^{\alpha_0}(E_q) \geq C > 0$, де C – деяка константа. Оскільки множина E_q — компактна, то для знаходження величини $m_\varepsilon^\alpha(E_q)$ достатньо розглядати її скінченні ε-покриття $\{E_k\}$ відрізками $E_i = [a_i, b_i]$. І нехай

$$m_\varepsilon^\alpha(E_q) \equiv \sum_{i=1}^{k}|E_i|^\alpha.$$

Для кожної множини E_i з даного покриття існує номер n_i рангу відрізка із $\mathcal{A}_{n_i}$ такий, що

$$\min\{|\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}|, |\Box_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}|\} = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^{n_i} \leq |E_i| < |\Box_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}| = \varepsilon_{n_i-1} < \varepsilon.$$

Піднесемо до степеня $\alpha_0 = \log_q(2-\sqrt{3})$ і запишемо систему для кожного E_i:

$$\begin{cases} (\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^{n_1})^{\alpha_0} = A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_1} \leq |E_1|^{\alpha_0}, \\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_2} \leq |E_2|^{\alpha_0}, \\ \ldots \\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_k} \leq |E_k|^{\alpha_0}. \end{cases}$$

Підсумувавши по k, отримаємо

$$\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}\right)^{\alpha_0}\cdot\sum_{i=1}^{k}(2-\sqrt{3})^{n_i} \leq \sum_{i=1}^{k}|E_i|^{\alpha_0} = m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q). \tag{19}$$

Оскільки $|E_i| < |\Box_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}|$ і довжини циліндричних відрізків $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ менші за довжини інтервалів $\delta_{c_1\ldots c_{2n_i-3}i_{2(n_i-1)}}$ при $\frac{a_2}{a_1} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (не складно показати), а множина $\Box'_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}$, згідно (9), належить об'єднанню *трьох* відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ та *двох* відрізків виду $\Box_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}$, то кожний відрізок E_i може мати спільні точки не більше, як з *п'ятьма* відрізками рангу $2n_i$, які належать сім'ї $\mathcal{A}_{n_i}$.

Три відрізки виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ разом з двома відрізками виду $\Box_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}$ містять 12 відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2n_i}cc}$ і 7 відрізків виду $\Box_{c_1\ldots c_{2n_i}ab}$, тому відрізків рангу $2(n_i+1)$ із сім'ї $\mathcal{A}_{n_i+1}$, з якими може мати спільні точки E_i, не більше 19.

Враховуючи формули (8), (9), (10), (11), встановлюємо, що кількість відрізків f_m рангу $2j = 2(n_i + m)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ з сім'ї $\mathcal{A}_{n_i+m}$, з якими може мати спільні точки відрізок E_i визначається також зворотною послідовністю

$$f_{m+2} = 4f_{m+1} - f_m, \quad \text{де } f_0 = 5, \ f_1 = 19.$$

Шляхом аналогічних, як при виведенні формул (15), (16), (17), (18) міркувань, встановлюємо, що

$$f_m \equiv f_{n_i}(j) = \frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^m - \frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^m =$$
$$= \frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{j-n_i} - \frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{j-n_i}, \quad j \geq \max_i\{n_i\}.$$

Згідно з (16) і (17), запишемо кількість всіх відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}ii}$ та $\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ довільного рангу $2j$:

$$x_j + y_j = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^j - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^j.$$

Ця сума не перевищує суми $\sum_{i=1}^k f_{n_i}(j)$, оскільки кожен відрізок E_i покриття $\{E_k\}$ має спільні точки принаймні з одним відрізком рангу $2j$ із покриття $\mathcal{A}_{n_i}$. Тому має місце нерівність

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^j + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^j \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{j-n_i} - \frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{j-n_i}\right),$$

що рівносильно

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \leq \sum_{i=1}^k (2-\sqrt{3})^{n_i} - \frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \cdot \sum_{i=1}^k (2+\sqrt{3})^{n_i}$$

або

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}} + \frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\sum_{i=1}^k (2+\sqrt{3})^{n_i}\right) \leq \sum_{i=1}^k (2-\sqrt{3})^{n_i}.$$

Використовуючи останню нерівність, оцінимо ліву частину нерівності (19):

$$A_1^{\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} + A_1^{\alpha_0} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}} + \frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\sum_{i=1}^k (2+\sqrt{3})^{n_i}\right) \leq m_\varepsilon^\alpha(E_q)$$

Перейшовши до границі при $j \to \infty$, отримаємо

$$0 < \frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}\right)^{\alpha_0} \leq m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q).$$

Таким чином, для довільного ε-покриття $\{E_k\}$ множини E_q відрізками E_i, величина $m_{\varepsilon}^{\alpha_0}(E_q)$ обмежена знизу константою. Перейшовши до границі ($\varepsilon \to 0$), отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} m_{\varepsilon}^{\alpha_0}(E_q) = H^{\alpha_0}(E_q).$$

Отже, $\alpha_0(E_q) \geq \alpha_0$ і тому розмірність Хаусдорфа-Безиковича даної множини дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}).$$

$\square$

Література

[1] *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // Bull. Sci. Math. — 2008. — **132**, no. 8. — P. 711–727.

[2] *Banakh T., Bartoszewitcz A., Głąb S., Szymonik E.* Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 // Colloq. Math. — 2012. — **129**. — P. 75–85.

[3] *Falconer K. J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Chichester: Wiley, 1990. — 290 p.

[4] *Ferens F.* On the range of purely atomic probability measures // Colloq. Math. — 1984. — **77**. — P. 261–263.

[5] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Studia Math. — 1988. — **55**, no. 2. — P. 323–327.

[6] *Hornich H.* Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen // Studia Math. Phys. — 1941. — **49**. — P. 316–320.

[7] *Jones R.* Achievement Sets of Sequences // Amer. Math. Monthly — 2011. — **118**. — P. 508–521.

[8] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–163.

[9] *Menon P. K.* On a class of perfect sets // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**. — P. 706–711.

[10] *Nymann J. E., Sáenz R. A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. — 2000. — **83**. — P. 323–327.

[11] *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1998. — **350**, no. 10. — P. 4065–4087.

[12] *Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Yu.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — **13** (29), №1-2. — P. 205–224.

[13] *Šalát T.* Absolut konvergente Reihen und Hausdorffsche Mass // Чехосл. мат. ж.— 1959. — **9** (84). — P. 372–389.

[14] *Solomyak B.* Measure and dimension for some fractal families // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1998. — **124**. — P. 531–548.

[15] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Annals of Mathematics.— 1995. — **142**. — P. 611–625.

[16] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування. — Киев: Наук. думка, 2013. — 288с.

[17] *Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З.* О строении множества $\overline{\alpha}$-представимых чисел // Изв. вузов. Матем. — № 5, 1980. — С. 8–11.

[18] *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 216–232.

[19] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.

[20] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2008. — **79**. — С. 34–49.

[21] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.

[22] *Корсунь Н. О., Працьовитий М. В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009, № 10. — С. 28–39.

[23] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

[24] *Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013, № 14. — С. 227–239.

[25] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48-54.

[26] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

[27] *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств // Чехословацкий математический журнал, Прага. — 1961. — **11 (86)**, — С. 24-56.