ПРОПЕДЕВТИКА ПОНЯТТЯ РЕКУРСІЇ ШЛЯХОМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Гроза В.А.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,
Лещинський О.Л.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету,
Томащук О.П.,
кандидат пед. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,
Тихонова В.В.,
викладач,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

Розглядається питання пропедевтики поняття рекурсії шляхом розв'язування нестандартних задач елементарної математики в процесі викладання дисципліни «Математика» майбутнім програмістам.

Рассматривается вопрос пропедевтики понятия рекурсии путем решения нестандартных задач элементарной математики в процессе преподавания дисциплины «Математика» будущим программистам.

Questions of propedeutics for the concept of recursion by solving nonstandard problems of elementary mathematics in the course of the discipline "Mathematics" for future programmers are investigated.

Ітерація – від людини
Рекурсія – від Бога
Л.Пітер Дойч

Викладання дисципліни «Математика» у вищих навчальних закладах (ВНЗ) І-ІІ рівнів акредитації повинно враховувати професійне спрямування підготовки студентів і формувати їх мислення в профільному напрямку. Зрозуміло, що з одного боку, зміст дисципліни «Математика» збігається з її змістом у загальноосвітніх навчальних закладах. З іншого боку, з перших днів навчання у ВНЗ студент орієнтується на здобуття обраної спеціальності. Викладання дисципліни «Математика» майбутнім програмістам повинно бути спрямоване на формування у них алгоритмічного мислення, структурного підходу до розв'язування математичних задач (зокрема, циклічного підходу, підходу з використанням умов-обмежень і розгалужень для знаходження можливих розв'язків задачі, рекурсійних підходів тощо). Одним із важливих методичних завдань є пропедевтика поняття рекурсії, яке широко використовується в практичному програмуванні.

З теорії програмування відомо, що коли функція викликає саму себе, то кажуть, що виникає рекурсія. Рекурсію можна розглядати як ще одну керуючу структуру: управління з точки рекурсійного виклику передається на початок функції. У дійсності рекурсія – це потужний інструмент для розробки програмного забезпечення, за допомогою якого значні за обсягом операції можуть бути записані кількома рядками програмного коду. Програмістам-професіоналам відомо, що рекурсією необхідно користуватися обережно і уважно. При використанні рекурсійного виклику система зберігає в стеку значення всіх автоматичних змінних функції та її параметрів. Після завершення рекурсійного виклику значення будуть відновленими і управління повертається на оператор, який стоїть безпосередньо за оператором виклику. Для розміщення в стеку автоматичних змінних і значень параметрів необхідні пам’ять і час на розрахунки.

Багато понять теорії програмування ґрунтуються на понятті рекурсії. У деяких випадках рекурсійна побудова алгоритму є найбільш природним і раціональним шляхом розв’язування поставленої задачі.

У процесі викладання дисципліни «Математика» можна використати певні методичні інструменти математичного характеру, які б формували у майбутніх програмістів відчуття рекурсійних відношень, уміння використовувати рекурсійні алгоритми в процесі розв’язування реальних задач. Одним із таких методичних інструментів може виявитися вивчення рівнянь вигляду $\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\right)\right)}_{k\ \text{разів}}=x$, де $k\in N$.

Студентів насамперед доцільно ознайомити з такою теоремою:

Теорема 1. Якщо функція $y=f\left(x\right)$ *зростає на множині P, то на цій множині рівняння*

$$f\left(x\right)=x \tag{1}$$

і

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x \tag{2}$$

є рівносильними.

Доведення. Нехай x_0 – довільний корінь рівняння (1), тобто $f\left(x_0\right)=x_0$. Тоді $f\left(f\left(x_0\right)\right)=f\left(x_0\right)=x_0$. Отже, число x_0 також є коренем рівняння (2).

Нехай x_0 – довільний корінь рівняння (2), тобто $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$. Доведемо, що число x_0 також є коренем рівняння (1), тобто доведемо, що виконується рівність $f\left(x_0\right)=x_0$.

Використаємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що $f\left(x_0\right)\neq x_0$. Тоді $f\left(x_0\right)>x_0$ або $f\left(x_0\right)<x_0$.

Нехай $f\left(x_0\right)>x_0$. Тоді, враховуючи, що функція f зростає на множині *P*, маємо $f\left(f\left(x_0\right)\right)>f\left(x_0\right)$. Але за припущенням $f\left(x_0\right)>x_0$. Отже, $f\left(f\left(x_0\right)\right)>x_0$. А це суперечить умові $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$.

Нехай $f\left(x_0\right)<x_0$. Тоді, враховуючи зростання функції f на множині *P*, одержимо $f\left(f\left(x_0\right)\right)<f\left(x_0\right)$. Але за припущенням $f\left(x_0\right)<x_0$. Отже, $f\left(f\left(x_0\right)\right)<x_0$. А це також суперечить умові $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$.

Отже, припущення є неправильним і $f\left(x_0\right)=x_0$, тобто число x_0 є коренем рівняння (1).

Природно поставити перед студентами запитання про справедливість відповідного твердження для випадку спадної функції $y=f\left(x\right)$. Виявляється, що відповідне твердження є неправильним. Можна запропонувати студентам самостійно підібрати приклад, який це підтверджує.

Після цього можна сформулювати узагальнену теорему:

Теорема 2. Якщо функція $y=f\left(x\right)$ *зростає на множині P, то при довільному* $k\in N$ *рівняння* $\underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(x\right)\right)\right)}_{k\ \text{разів}}=x$ і $f\left(x\right)=x$ *є рівносильними на множині P*.

Далі доцільно розглянути приклади на застосування сформульованих теорем.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases}x\ge 0,\\ x-1\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge 1,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[1;+\infty\right).$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x. \tag{3}$$

Розглянемо функцію $f\left(x\right)=1+\sqrt{x}$. Тоді рівняння (3) можна записати у вигляді $f\left(f\left(x\right)\right)=x$. Оскільки $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ для всіх $x\in\left(0;+\infty\right)$, то на інтервалі $\left(0;+\infty\right)$ функція f зростає. Тому згідно з теоремою 1 рівняння (3) рівносильне рівнянню $f\left(x\right)=x$, тобто $1+\sqrt{x}=x$. Розв'яжемо це рівняння. Увівши заміну $\sqrt{x}=t$, одержимо квадратне рівняння $t^2-t-1=0$, коренями якого є числа: $t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ і $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Повертаючись до заміни, одержимо два рівняння: $\sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ і $\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Перше рівняння не має розв'язків, а коренем другого рівняння є число $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Для самостійної роботи можна запропонувати студентам розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{a+\sqrt{x}}=x-a$, де a – параметр;

2) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=x-3$.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x-1 \Leftrightarrow 1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x. \tag{4}$$

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1+x^3}{2}$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді $f(f(x))=x$. Оскільки $f'(x)=\frac{3}{2}x^2\ge 0$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ і точки, в яких $f'(x)=0$, не утворюють проміжок ($f'(x)=0$ лише в одній точці $x=0$), то на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ функція f зростає. Тому згідно з теоремою 1 рівняння (4) рівносильне рівнянню $f(x)=x$, тобто $\frac{1+x^3}{2}=x$. Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{1+x^3}{2}=x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Далі можна розглянути рівняння з параметрами, які є узагальненнями розглянутого вище рівняння:

1) $x^3+a=b\sqrt[3]{bx-a}$, $b\ne 0$;

2) $x^n+a=b\sqrt[n]{bx-a},\ b\ne 0, n\in N, n\ge 2$.

Перетворимо рівняння $x^3+a=b\sqrt[3]{bx-a}$:

$$\frac{x^3+a}{b}=\sqrt[3]{bx-a} \Leftrightarrow \left(\frac{x^3+a}{b}\right)^3=bx-a \Leftrightarrow \frac{a+\left(\frac{x^3+a}{b}\right)^3}{b}=x.$$

Одержали рівняння вигляду $f(f(x))=x$, де $f(x)=\frac{a+x^3}{b}$.

Перетворимо рівняння $x^n+a=b\sqrt[n]{bx-a}$:

$$\frac{x^n+a}{b}=\sqrt[n]{bx-a}, \quad \left(\frac{x^n+a}{b}\right)^n=bx-a, \quad \frac{a+\left(\frac{x^n+a}{b}\right)^n}{b}=x.$$

Одержали рівняння вигляду $f(f(x))=x$, де $f(x)=\frac{a+x^n}{b}$. При парних значеннях n потрібно перевірити, чи всі знайдені корені є коренями заданого рівняння.

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=2x-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}+1=2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}+1\right)=x. \quad (5)$$

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)$. Тоді рівняння (5) можна записати у вигляді $f(f(x))=x$. Оскільки $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}>0$, то на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ функція f зростає. Тому згідно з теоремою 1 рівняння (5) рівносильне рівнянню $f(x)=x$, тобто $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)=x$. Розв'яжемо це рівняння. Нехай $\sqrt[3]{x}=t$. Тоді маємо:

$$2t^3-t-1=0 \Leftrightarrow t^3-t+t^3-1=0 \Leftrightarrow t(t-1)(t+1)+(t-1)\left(t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2+2t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Повертаючись до заміни, одержимо: $\sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 4. *Розв'язати рівняння* $\ln(1+\ln x)=x-1$.

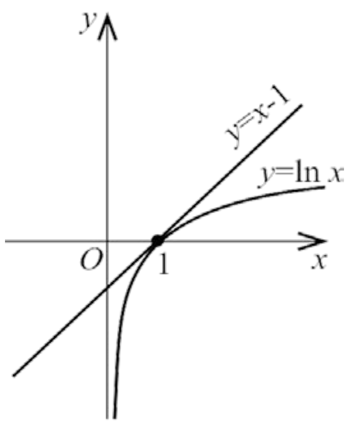
Розв'язання. Спочатку знайдемо ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} x>0, \\ 1+\ln x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \ln x>-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>\frac{1}{e}, \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{e};+\infty\right).$$

Задане рівняння запишемо у вигляді

$$1+\ln(1+\ln x)=x. \quad (6)$$

Розглянемо функцію $f(x)=1+\ln x$. Тоді рівняння (6) можна записати у вигляді $f(f(x))=x$. Оскільки $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ для всіх $x\in(0;+\infty)$, то на інтервалі $(0;+\infty)$ функція f зростає. Тому згідно з теоремою 1 рівняння (6) рівносильне рівнянню $f(x)=x$, тобто рівнянню $1+\ln x=x$. Розв'яжемо це рівняння: $1+\ln x=x \Leftrightarrow \ln x=x-1$. Використавши графічний метод розв'язування (мал. 1), встановлюємо, що $x=1$ – єдиний корінь рівняння $\ln x=x-1$, а, отже, корінь заданого рівняння (враховуючи, що $x=1$ належить ОДЗ заданого рівняння).



Мал. 1

Після цього можна перейти до розгляду систем рівнянь.

Приклад 5. *Розв'язати систему* $\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y, \\ y^3+2y^2+2y=z, \\ z^3+2z^2+2z=x. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система має вигляд: $\begin{cases} y=f(x), \\ z=f(y), \\ x=f(z), \end{cases}$ де $f(t)=t^3+2t^2+2t$.

Підставивши замість z в рівняння $x=f(z)$ вираз $z=f(y)$ одержимо рівняння $x=f(f(y))$. Підставивши в це рівняння замість y вираз $y=f(x)$ одержимо рівняння $x=f(f(f(x)))$. Оскільки $f(x)=x^3+2x^2+2x$ і $f'(x)=3x^2+4x+2>0$ для всіх $x\in\mathbf{R}$, то на множині всіх дійсних чисел функція f зростає. Тому згідно з теоремою 2 рівняння $f(f(f(x)))=x$ рівносильне рівнянню $f(x)=x$, тобто рівнянню $x^3+2x^2+2x=x$. Розв'яжемо це рівняння:

$$x^3+2x^2+2x=x \Leftrightarrow x^3+2x^2+x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Якщо $x=0$, то з першого рівняння заданої системи маємо: $y=0$, а з другого рівняння – $z=0$.

Якщо $x=-1$, то з першого рівняння системи одержуємо: $y=-1$, а з другого рівняння – $z=-1$.

Відповідь: $(0;0;0)$, $(-1;-1;-1)$.

Доцільно разом зі студентами дослідити, при яких значеннях параметра a систему рівнянь вигляду $\begin{cases} x^3+ax^2+ax=y, \\ y^3+ay^2+ay=z, \\ z^3+az^2+az=x, \end{cases}$ можна розв'язувати методом, розглянутим у прикладі 5. Для цього потрібно з'ясувати, при яких значеннях a функція $f(t)=t^3+at^2+at$ зростає на множині $\mathbf{R}$.

$$f'(t)=3t^2+2at+a,\ D=4a^2-4\cdot 3a=4a(a-3).$$

Функція $f(t)=t^3+at^2+at$ зростає на $\mathbf{R}$, коли для всіх $x\in\mathbf{R}$ виконується нерівність $f'(t)>0$. А це можливо лише тоді, коли $D=4a(a-3)<0$, тобто коли $a\in(0;3)$.

Для самостійної роботи студентам можна запропонувати подібне завдання: встановити, при яких значеннях параметрів a і b систему рівнянь вигляду $\begin{cases} x^3+ax^2+bx=y, \\ y^3+ay^2+by=z, \\ z^3+az^2+bz=x, \end{cases}$ можна розв'язувати методом, розглянутим у прикладі 5.

Також для самостійної роботи доцільно запропонувати студентам завдання: представити у вигляді рекурсійної функції систему:

$$\begin{cases} x_1^n + ax_1^{n-1} + ax_1^{n-2} + \ldots + ax_1 = x_2, \\ x_2^n + ax_2^{n-1} + ax_2^{n-2} + \ldots + ax_2 = x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^n + ax_n^{n-1} + ax_n^{n-2} + \ldots + ax_n = x_1. \end{cases}$$

Приклад 6. *Розв'язати систему* $\begin{cases} y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3y + 2 = 0, \\ x^3 - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Перетворимо задану систему:

$$\begin{cases} y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3y + 2 = 0, \\ x^3 - 3z + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 3x - 2, \\ z^3 = 3y - 2, \\ x^3 = 3z - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{3x-2}, \\ z = \sqrt[3]{3y-2}, \\ x = \sqrt[3]{3z-2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Система (7) має вигляд: $\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ x = f(z), \end{cases}$ де $f(t) = \sqrt[3]{3t-2}$.

Підставивши замість z в рівняння $x = f(z)$ вираз $z = f(y)$, одержимо рівняння $x = f(f(y))$. Підставивши в рівняння $x = f(f(y))$ замість y вираз $y = f(x)$, одержимо рівняння $x = f(f(f(x)))$. Оскільки функція $f(x) = \sqrt[3]{3x-2}$ зростає на множині $\mathbf{R}$, то згідно з теоремою 2 рівняння $f(f(f(x))) = x$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$, тобто рівнянню $\sqrt[3]{3x-2} = x$. Розв'яжемо це рівняння:

$$\sqrt[3]{3x-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x - 2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Якщо $x = 1$, то з першого рівняння системи (7) маємо: $y = 1$, а з другого рівняння – $z = 1$.

Якщо $x = -2$, то з першого рівняння системи (7) одержуємо: $y = -2$, а з другого рівняння – $z = -2$.

Відповідь: $(1;1;1)$, $(-2;-2;-2)$.

Приклад 7. *Розв'язати систему* $\begin{cases} \sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}} = x, \\ \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}} = y. \end{cases}$

Розв'язання. У першому рівнянні системи розглянемо його ліву частину як функцію від x з параметром y. Тоді, якщо прийняти $f(x) = \sqrt{y^2-7+x}$, то ліва частина першого рівняння системи має вигляд $f(f(x))$. Оскільки $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{y^2-7+x}} > 0$, то функція f зростає на своїй області визначення. Тому згідно з теоремою 1 перше рівняння системи рівносильне рівнянню $f(x) = x$, тобто рівнянню $\sqrt{y^2-7+x} = x$.

Аналогічно можна довести, що друге рівняння системи рівносильне рівнянню $\sqrt{x^2+2+y} = y$. Отже, задана система рівносильна системі:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2-7+x} = x, \\ \sqrt{x^2+2+y} = y. \end{cases} \tag{8}$$

Піднесемо обидві частини кожного із рівнянь системи до квадрату і потім додамо ліві і праві частини одержаних рівнянь:

$$\begin{cases} y^2-7+x = x^2, \\ x^2+2+y = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-7+x = x^2, \\ y^2+x^2-5+x+y = x^2+y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-7+x = x^2, \\ x = 5-y, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-7+5-y = (5-y)^2, \\ x = 5-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 27, \\ x = 5-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Шляхом перевірки переконуємося, що $(2;3)$ – розв'язок системи (8), а, отже, і розв'язок заданої системи рівнянь.

Відповідь: $(2;3)$.

Список використаної літератури

1. Уинер Р. – Язык Турбо Си: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 384 с.
2. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс математики: Решение задач: Учеб. пособ. для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.