УДК 517.9+519.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

В. Е. Капустян, И. С. Лазаренко

Нац. техн. ун-т Украины „КПИ"
Украина, 03057, Киев, просп. Победы, 37
e-mail: kapustyanv@ukr.net
lazarenko@ukr.net

We construct and substantiate a bounded optimal parametric control in the feedback form for a parabolic equation with non-local boundary conditions and semidefined functional.

Побудовано і обґрунтовано обмежене оптимальне параметричне керування у формі оберненого зв'язку для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами і напіввизначеного функціонала.

Введение. В работе [1] для одномерного уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями исследованы некоторые задачи с минимальной энергией, близкие по постановке к аналогичным задачам с локальными краевыми условиями [2]. При этом существенно используются представление классического решения краевой задачи в виде ряда по биортогональным системам Рисса и специальный вид нормы функций, эквивалентный L_2-норме. Последнее дало возможность в случае распределенного управления получить полное решение задачи с минимальной энергией. В работе [3] для указанных выше краевых задач для распределенного управления и специального критерия качества построено и обосновано решение задачи оптимальной стабилизации. В данной работе построено и обосновано ограниченное оптимальное параметрическое управление в форме обратной связи для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенного функционала.

Постановка задачи. Формальные построения. Пусть процесс описывается функцией $y(x,t)$, которая удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(x)u(t), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$y(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$y(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x}, \quad t > t_0, \tag{3}$$

где $\Pi = \{(x,t) : 0 < x1, t_0 < t \le T\}$, $g(x)$ — фиксированная функция.

Для краевой задачи (1)–(3) рассмотрим задачу оптимального управления в форме обратной связи: найти управление $|u^*[y^*(\cdot,t)]| \le 1$, доставляющее наименьшее значение функционалу

$$J(u) = 0,5 \left(\left(\int_0^1 q(x)(y(x,T) - \psi(x))\, dx \right)^2 + \gamma \int_0^T u^2(t)\, dt \right), \tag{4}$$

где $q(x), \psi(x)$ — заданные функции.

Системы функций

$$W_0 = \{X_0(x) = x,\ X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),\ k > 0\},$$

$$R_0 = \{Y_0(x) = 2,\ Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx),\ Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx),\ k > 0\}$$

являются биортогональными базисами Рисса в $L_2(0,1)$.

Задача (1) – (4) может быть сведена к одномерной задаче оптимального управления (для задач с локальными краевыми условиями см. [4]). С этой целью запишем разложение функции $q(x)$ по базису R_0:

$$q(x) = q_0 Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (q_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + q_{2k} Y_{2k}(x)), \tag{5}$$

где $q_i = (q, X_i), i = 0, 1, \ldots$.

Функции $g(x), \psi(x), y(x,t)$ запишем в виде рядов по базису W_0:

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + g_{2k} X_{2k}(x)), \tag{6}$$

$$\psi(x) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \psi_{2k} X_{2k}(x)), \tag{7}$$

$$y(x,t) = y_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + y_{2k}(t) X_{2k}(x)), \tag{8}$$

где $g_i = (q, Y_i), \psi_i = (\psi, Y_i), i = 0, 1, \ldots$, а коэффициенты разложения (8) имеют вид

$$y_0(t) = \varphi_0 + g_0 \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

$$y_{2k-1}(x) = \varphi_{2k-1} = \exp(-\lambda_k^2 (t - t_0)) + g_{2k-1} \int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k^2 (t-\tau)) u(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

$$y_{2k}(x) = \varphi_{2k} \exp(-\lambda_k^2 (t-t_0)) - 2\lambda_k \varphi_{2k-1}(t - t_0) \exp(-\lambda_k^2 (t - t_0)) +$$

$$+ g_{2k} \int\limits_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k^2(t-\tau))u(\tau)d\tau - 2\lambda_k g_{2k-1} \int\limits_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k^2(t-\tau))(t-\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Определим функции

$$\mathcal{A}(\varphi, t_0) = q_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{2k-1}(q_{2k-1} - 2\lambda_k(T-t_0)q_{2k}) + \varphi_{2k}q_{2k})\exp(-\lambda_k^2(T-t_0)),$$

$$\mathcal{B}(t) = q_0 g_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{2k-1}(q_{2k-1} - 2\lambda_k(T-t)q_{2k}) + g_{2k}q_{2k})\exp(-\lambda_k^2(T-t)), \tag{10}$$

$$\mathcal{C} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k\psi_k.$$

Предположим, что ряды из (10) сходятся равномерно. Тогда критерий (4) представим в виде

$$J(u) = 0,5\left(\left(\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int\limits_{t_0}^{T}\mathcal{B}(t)u(t)\,dt + \mathcal{C}\right)^2 + \gamma\int\limits_{0}^{T}u^2(t)\,dt\right). \tag{11}$$

Функционал (11) является строго выпуклым. Поэтому он достигает минимума в единственной точке $u^*(t) \in C(t_0, T)$, которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left[\left(\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int\limits_{t_0}^{T}\mathcal{B}(\tau)u^*(\tau)\,d\tau + \mathcal{C}\right)\mathcal{B}(t) + \gamma u^*(t)\right][u(t) - u^*(t)]\,dt \geq 0 \ \ \forall |u(t)| \leq 1. \tag{12}$$

Предположим, что $|u^*(t)| < 1$, $t \in [t_0, \zeta)$; $u^*(t) = 1$, $t \in [\zeta, T]$. Тогда из условия (12) находим програмное оптимальное управление

$$u^*(t) = -\frac{\mathcal{B}(t)\left(\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int_{\zeta}^{T}\mathcal{B}(\tau)\,d\tau + \mathcal{C}\right)}{\gamma + \int_{t_0}^{\zeta}\mathcal{B}^2(\tau)\,d\tau}, \quad t \in [t_0, \zeta),$$
$$\tag{13}$$
$$u^*(t) = 1, \quad t \in [\zeta, T] : \mathcal{B}(t)\left(\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int\limits_{\zeta}^{T}\mathcal{B}(\tau)\,d\tau + \mathcal{C}\right) + \gamma + \int\limits_{t_0}^{\zeta}\mathcal{B}^2(\tau)\,d\tau < 0,$$

а число ζ находится из уравнения

$$\mathcal{B}(\zeta)(\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int\limits_{\zeta}^{T}\mathcal{B}(\tau)\,d\tau + \mathcal{C}) + \gamma + \int\limits_{t_0}^{\zeta}\mathcal{B}^2(\tau)\,d\tau = 0. \tag{14}$$

Указанное выше управление будет иметь место, если выполняется условие (i): функция $\mathcal{B}(t)$ положительная, монотонно возрастающая и при этом $\mathcal{A}(\varphi, t_0) + \int_\zeta^T \mathcal{B}(\tau)d\tau + \mathcal{C} < < 0$ или функция $\mathcal{B}(t)$ отрицательная, монотонно убывающая и при этом $\mathcal{A}(\varphi, t_0) + + \int_\zeta^T \mathcal{B}(\tau)d\tau + \mathcal{C} > 0$.

Если функция $\mathcal{A}(\varphi, t_0)$ непрерывна относительно своих аргументов, то параметрическое синтезированное управление имеет вид [4]

$$u^*[t, y(\cdot, t)] = -\frac{\mathcal{B}(t)\left(\mathcal{A}(y(\cdot,t),t) + \int_\zeta^T \mathcal{B}(\tau)d\tau + \mathcal{C}\right)}{\gamma + \int_t^\zeta \mathcal{B}^2(\tau)d\tau}, \quad t \in [t_0, \zeta),$$
$$u^*[t, y(\cdot, t)] = 1, \quad t \in [\zeta, T], \tag{15}$$

а число ζ находится из уравнения

$$\mathcal{B}(\zeta)\left(\mathcal{A}(y(\cdot,t),t) + \int\limits_\zeta^T \mathcal{B}(\tau)d\tau + \mathcal{C}\right) + \gamma + \int\limits_t^\zeta \mathcal{B}^2(\tau)d\tau = 0. \tag{16}$$

Найденное выше оптимальное управление в форме параметрического синтеза нереализуемо, так как его составляющие представлены рядами. Поэтому рассмотрим приближенное управление вида

$$u^{(N)}[t, y^{(N)}(\cdot, t)] = -\frac{\mathcal{B}^{(N)}(t)\left(\mathcal{A}^{(N)}(y^{(N)}(\cdot,t),t) + \int_{\zeta^{(N)}}^T \mathcal{B}^{(N)}(\tau)d\tau + \mathcal{C}^{(N)}\right)}{\gamma + \int_t^{\zeta^{(N)}} (\mathcal{B}^{(N)})^2(\tau)d\tau}, \quad t \in [t_0, \zeta^{(N)}),$$
$$u^{(N)}[t, y^{(N)}(\cdot, t)] = 1, \quad t \in [\zeta^{(N)}, T], \tag{17}$$

причем число $\zeta^{(N)}$ находится из уравнения

$$\mathcal{B}^{(N)}(\zeta)\left(\mathcal{A}^{(N)}(y^{(N)}(\cdot,t),t) + \int\limits_\zeta^T \mathcal{B}^{(N)}(\tau)d\tau + \mathcal{C}^{(N)}\right) + \gamma + \int\limits_t^\zeta (\mathcal{B}^{(N)})^2(\tau)d\tau = 0. \tag{18}$$

В (17), (18) через $\mathcal{A}^{(N)}(\cdot,\cdot), \mathcal{B}^{(N)}(\cdot), \mathcal{C}^{(N)}$ обозначены конечные суммы для соответствующих рядов; число N взято таким, чтобы для указанных приближений рядов выполнялось условие (i), а $y^{(N)}(x,t)$ — классическое решение краевой задачи

$$\frac{\partial y^{(N)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 y^{(N)}}{\partial x^2} + g(x)u^{(N)}[t, y^{(N)}(\cdot, t)], \quad (x,t) \in \Pi, \tag{19}$$

$$y^{(N)}(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

$$y^{(N)}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y^{(N)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y^{(N)}(1,t)}{\partial x}, \quad t > t_0. \tag{21}$$

Обоснование результатов. Для того чтобы решение задачи (1)–(3) было классическим при непрерывном управлении, достаточно функции $\varphi(x)$, $g(x)$ выбирать из области определения оператора: $Ly = -y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y'(1)$. Тогда

$$|\mathcal{A}(\varphi,t_0)| \le q_0| \, |\varphi_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_{2k-1}|(|q_{2k-1}| + 2\lambda_k(T-t_0)|q_{2k}|) +$$

$$+ |\varphi_{2k}| \, |q_{2k}|)\exp(-\lambda_k^2(T-t_0),$$

$$|\mathcal{B}(t)| \le |q_0| \, |g_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|g_{2k-1}|(|q_{2k-1}| + 2\lambda_k(T-t)|q_{2k}|) + |g_{2k}| \, |q_{2k}|)\exp(-\lambda_k^2(T-t), \tag{22}$$

$$|\mathcal{C}| \le \sum_{k=0}^{\infty}|q_k| \, |\psi_k|.$$

Пусть функция $q(x)$ выбирается из области определения оператора: $L'y = -y''$, $y(0) = y(1)$, $y'(1) = 0$, а функция $\psi(x)$ принадлежит $L_2(0,1)$. Тогда будут сходиться указанные выше ряды, причем два первых ряда сходятся равномерно.

Для приближенного управления (17), (18) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть:*

1) функции $\varphi(x)$, $g(x)$ принадлежат области определения дифференциального оператора L, функция $q(x)$ принадлежит области определения дифференциального оператора L';

2) для рядов $(\mathcal{A}(\varphi,t_0), \mathcal{B}(t), \mathcal{C}$ и их приближений выполнено условие (i).

Тогда для любого достаточно малого числа $\eta > 0$ существует такое целое число $N > 0$, что имеют место неравенства

$$|\zeta - \zeta^{(N)}| < \eta,$$

$$|u^*[t,y^*(\cdot,t)] - u^{(N)}[t,y^{(N)}(\cdot,t)]| < \eta,$$

$$|y^*(x,t) - y^{(N)}(x,t)| < \eta,$$

$$|I(u^*) - I(u^N)| < \eta.$$

Доказательство проводится по схеме, приведенной в работе [5].

1. *Капустян В. Е., Лазаренко И. С.* Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. моделювання. — 2009. — **17**, № 8. — С. 47–60.

2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с.

3. *Капустян В. Е., Лазаренко И. С.* Оптимальная стабилизация распределенным управлением решений параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Компьютер. моделирование. — 2010. — № 2.

4. *Белозеров В. Е., Капустян В. Е.* Геометрические методы модального управления. — Киев: Наук. думка, 1999. — 260 с.

5. *Сукретна А. В., Капустян О. А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 10. — С. 1384–1394.

Получено 27.12.12