УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ МЕР СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А. А. Мартынюк

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

We develop the first Lyapunov method using matrix-valued auxiliary functions, and formulate theorems on stability and asymptotic stability with respect to two measures for a system with an aftereffect due to an impulsive perturbation.

Для класу систем рівнянь із післядією при імпульсних збуреннях розвинено прямий метод Ляпунова на основі матричних допоміжних функцій і сформульовано теореми про стійкість та асимптотичну стійкість відносно двох мір.

Введение. Общие методы нелинейной механики разрабатывались ранее и разрабатываются в настоящее время в соответствии с запросами инновационной техники и технологий. В результате этого разработаны методы анализа систем дифференциальных уравнений, которые применяются при описании динамики спутников и стратосферных автоматических лабораторий, виброударных механизмов и систем с ударными взаимодействиями, проблем динамики популяций при внезапных возмущениях среды обитания и других реальных объектов и процессов. Первоначальное рассмотрение этих проблем проводилось в контексте с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией уравнений с импульсными возмущениями.

Работами А. Д. Мышкиса, А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка было положено начало интенсивному исследованию систем дифференциальных уравнений с импульсными возмущениями. Фундаментальные результаты, полученные при этом, подытожены в ряде обзоров и книг, среди которых основное место занимает монография [1].

Дальнейшее развитие математического моделирования процессов с импульсными возмущениями связано с учетом последействия в рассматриваемых системах. Это привело к необходимости исследования систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Эти системы, как правило, состоят из следующих компонент: системы функционально-дифференциальных уравнений, которая описывает процесс между импульсами; системы разностных уравнений, отображающей поведение системы в моменты импульсного возмущения, и критерия, устанавливающего условия возврата системы к непрерывному состоянию.

Одним из вопросов динамического анализа импульсных уравнений является проблема устойчивости. Решение этой проблемы основано как на теории первого приближения, т. е. на построении фундаментальной матрицы решений для линейного приближения, так и на идеях прямого метода Ляпунова.

Одним из направлений развития прямого метода Ляпунова является построение теории устойчивости движения относительно двух мер. Основные методы исследования такого рода устойчивости движения некоторых классов систем уравнений изложены во многих статьях и подытожены в монографиях (см. [2, 3] и приведенную там библиографию). Для импульсных систем с последействием соответствующая теория находится в процессе становления (см. [4–7]). Напомним, что понятие устойчивости относительно двух мер было введено А. М. Ляпуновым [11] и развито А. А. Мовчаном [12] применительно к абстрактным процессам, включая системы с распределенными параметрами. Для импульсных систем без последействия это понятие впервые встречается в работе [13]. Условия асимптотической устойчивости относительно двух мер импульсной системы при структурных возмущениях получены в статье [14].

Целью данной работы является получение достаточных условий устойчивости систем с последействием и импульсными возмущениями относительно двух мер. Методом анализа является прямой метод Ляпунова на основе матричнозначных вспомогательных функций.

1. Постановка задачи. Пусть задана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

$$x(\sigma) = \varphi(s) \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \quad \sigma \geq t_0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R}_+ \times PC \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$, $PC = PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных справа функций $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}_+ \times S(H) \to \mathbb{R}^n$, $S(H) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < H\}$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать уравнения возмущенного движения при импульсных возмущениях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x_t), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(t, x(t^-)), \quad t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}_+, \end{aligned} \tag{3}$$

где $I_k : \mathbb{R}_+ \times S(H) \to \mathbb{R}^n$, $\Delta x = x(t) - x(t^-)$, $t_0 < \tau_k < \tau_{k+1}$, $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $k \in \mathbb{N}_+$, $\mathbb{N}_+$ — множество всех положительных чисел.

Пусть $|\varphi| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$, и $x_t(s) = x(t+s)$ при $-\tau \leq s \leq 0$, dx/dt обозначает правую производную вектора состояния системы $x(t)$.

Движение системы (1) корректно определено при начальном состоянии (2), если вектор-функция $x(t) : [\sigma - \tau, \beta) \to \mathbb{R}^n$ для некоторого значения β $(0 < \beta \leq +\infty)$ непрерывна при $t \in [\sigma - \tau, \beta) \setminus \{\tau_k, \ k = 1, 2, \ldots\}$, ее значения $x(\tau_k^+)$, $x(\tau_k^-)$ существуют, выполняется соотношение $x(\tau_k^+) = x(\tau_k)$ для любого $\tau_k \in [\sigma - \tau, \beta)$ и $x(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1).

Далее будем применять меры $\rho(t, \varphi)$ и $\rho_0(t, \varphi)$, определенные на множестве функций

$$\mathcal{M} = \left\{ \rho \in C([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,x)} \rho(t, x) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \rho_0 \in C([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) : \rho_0(t, \varphi) = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \rho(t + s, \varphi(s)) \right\}.$$

В терминах двух приведенных мер сформулируем необходимые для дальнейшего определения.

Определение 1. *Импульсная система с последействием (3) называется:*

(S_1) эквиустойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, как только $\rho_0(t_0, \varphi) < \delta$, где $x(t)$ — любое решение системы (3);

(S_2) равномерно устойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если величина δ в определении S_1 не зависит от t_0;

(S_3) равномерно асимптотически устойчивой относительно двух мер $\rho \in \mathcal{M}$ и $\rho_0 \in \mathcal{M}_0$, если выполняются условия определения S_2 и для каждого $\gamma > 0$ и $t \geq t_0$ существуют $\eta = \eta(\gamma) > 0$ и $T = T(\gamma) > 0$ такие, что $\rho(t, x(t)) < \gamma$ при всех $t \geq t_0 + T$, как только $\rho_0(t_0, \varphi) < \eta$.

Заметим, что, конкретизируя выбор мер при рассмотрении задач об устойчивости, получаем различные частные случаи, например устойчивость нулевого решения, устойчивость относительно части переменных, устойчивость относительно инвариантного множества и другие.

2. Теоремы об устойчивости. Для построения подходящей функции Ляпунова для системы (3) в работах [6, 7] предложено декомпозировать систему (1) на две подсистемы с последующим построением элементов матричнозначной вспомогательной функции. При этом рассматривается функция

$$V(t, x, \theta) = \theta^T U(t, *)\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

где

$$U(t, *) = \begin{pmatrix} v_{11}(t, x_1) & v_{12}(t, x_1, x_2) \\ v_{21}(t, x_2, x_1) & v_{22}(t, x_2) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $v_{11}(t, x_1) : \mathbb{R}_+ \times S(H_1) \to \mathbb{R}_+$, $v_{22}(t, x_2) : \mathbb{R}_+ \times \times S(H_2) \to \mathbb{R}_+$ и $v_{12}(t, x_1, x_2) = v_{21}(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$, $S(H_1) = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : \|x_1\| < H_1\}$, $S(H_2) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} : \|x_2\| < H_2\}$, $H_1, H_2 > 0$.

На основе функции (4) приведем некоторые утверждения об устойчивости движения относительно двух мер системы (3).

Теорема 1. *Пусть для системы с последействием (3) при импульсных возмущениях построена функция (4) и выполняются следующие условия:*

1) существуют функции сравнения $w, \overline{w}_i$ из K-класса и постоянные симметрические матрицы $A_i(\theta)$, $i = 1, 2$, такие, что при $\rho(t, \varphi(0)) < H$, $H = \text{const} > 0$, $\rho(t_0, \varphi(0)) \leq \leq (\rho_0(t_0, \varphi))$ выполняется неравенство

$$\overline{w}_1^T(\rho) A_1(\theta) \overline{w}_1(\rho) \leq V(t, \varphi(0), \theta) \leq \overline{w}_2^T(\rho_0) A_2(\theta) \overline{w}_2(\rho_0),$$

где $\varphi \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$;

2) существуют постоянные $b_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, такие, что

$$V(t, x + I_k(x), \theta) \leq (1 + b_k) V(\tau_k^-, x, \theta)$$

при $\rho(t,x) < H$;

3) существуют постоянная симметрическая (2×2)*-матрица* A_3 *и функции сравнения* $\overline{w}_3$ *из* K*-класса такие, что*

$$D^+V(t,x(t),\theta)\big|_{(3)} \le \overline{w}_3^T(\rho)A_3\overline{w}_3(\rho), \quad \rho(t,x(t)) < H,$$

и

$$V(t,x(t),\theta) \ge V(s,x(s),\theta) \quad \textit{при} \quad t \ge s;$$

4) существует постоянная $H_0 \in (0,H)$ *такая, что* $\rho(\tau_k, x+I_k(x)) < H$ *при любых* $\rho(\tau_k,x) < H_0$, $k\in\mathbb{N}_+$;

5) матрицы $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ *положительно определенные, а матрица* A_3 *отрицательно полуопределенная.*

Тогда состояние $x = 0$ *системы (3) равномерно* (ρ_0,ρ)*-устойчиво.*

Доказательство. Условия 1, 3, 5 теоремы 1 выполняются вслед за оценками

$$\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\rho) \le V(t,\varphi(0),\theta) \le \lambda_M(A_2(\theta))w_2(\rho_0),$$

где w_i, принадлежащие K-классу, такие, что $w_1(\rho) \le \overline{w}_1^T(\rho)\overline{w}_1(\rho)$, $w_2(\rho_0) \ge \overline{w}_2^T(\rho_0)\overline{w}_2(\rho_0)$ и

$$D^+V(t,x(t),\theta)\big|_{(2)} \le \lambda_M(A_3)w_3(\rho),$$

где $w_3(\rho) \ge \overline{w}_3^T(\rho)\overline{w}_3(\rho)$, w_3 принадлежит K-классу.

Согласно условию 2 теоремы 1 имеем $1 \le \psi < +\infty$, где $\psi = \prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$. Для заданного значения $\varepsilon \in (0,H_0)$ выберем $\delta > 0$ так, что $\psi\lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta) < \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\varepsilon)$ и $w(\delta) < \varepsilon$. Теорема 1 будет доказана, если при выполнении ее условий при $\rho_0(t_0,\varphi) < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\rho(t,x(t)) < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0$$

для любого решения $x(t)$ системы (3).

Покажем вначале, что для значений $t\in[t_0,t_1)$ справедлива оценка

$$\rho(t,x(t)) < \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть неравенство (5) не выполняется. Тогда найдется $t^* \in (t_0,t_1)$ такое, что $\rho(t^*,x(t^*)) = \varepsilon$ и $\rho(t,x(t)) < \varepsilon$ при всех $t\in[t_0,t^*)$. Поскольку $\varepsilon < H_0 < H$, по условию 1 теоремы 1 получаем

$$V(t^*,x(t^*),\theta) \ge \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\rho(t^*,x(t^*))) = \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\varepsilon) > \psi\lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta) \ge$$
$$\ge \lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta) \ge V(s,x(s),\theta) \quad \text{при всех} \quad s\in[t_0-\tau,t_0]. \tag{6}$$

Пусть $m(t) = \sup_{s\in[t_0-\tau,t]} V(s,x(s),\theta)$. Из оценки (6) следует, что

$$m(t^*) > \lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta) \ge m(t_0).$$

Это неравенство возможно, если существует $\hat{t} \in [t_0, t^*]$ такое, что $D^+m(\hat{t}) > 0$, где $D^+m(\hat{t}) = \limsup_{\alpha\to 0^+} \dfrac{1}{\alpha}[m(\hat{t}+\alpha) - m(\hat{t})]$. Покажем, что при всех $t \in [t_0, t^*]$ имеет место соотношение $D^+m(t) = 0$. Действительно, для $t \in [t_0, t^*]$ выполняется неравенство $m(t) \geq V(t, x(t), \theta)$ согласно определению $m(t)$. Если $m(t) > V(t, x(t), \theta)$, то вследствие непрерывности функции $V(t, x(t), \theta)$ найдется $\beta > 0$ такое, что $V(t+\gamma, x(t+\gamma), \theta) \leq m(t)$ при $0 < \gamma < \beta$. Тогда $m(t+\gamma) = m(t)$ при $0 < \gamma < \beta$, откуда $D^+m(t) = 0$. Если $m(t) = V(t, x(t), \theta)$, то $V(t, x(t), \theta) > V(s, x(s), \theta)$ при $t \geq s$ и согласно условиям 3, 5 теоремы 1 имеем $D^+V(t, x(t), \theta) \leq 0$ и $\rho(t, x(t)) \leq \varepsilon < H_0 < H$ при всех $t \in [t_0, t^*]$. Отсюда следует, что $V(t+\gamma, x(t+\gamma), \theta) \leq V(t, x(t), \theta)$, и для достаточно малого $\gamma > 0$ получаем $m(t+\gamma) \leq m(t)$. Но в этом случае $D^+m(t) \leq 0$, что вместе с неравенством $D^+m(t) \geq 0$ приводит к заключению, что $D^+m(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, t^*]$. Это противоречит условию $D^+m(\hat{t}) > 0$ для $\hat{t} \in [t_0, t^*]$ и поэтому справедлива оценка (5). Поскольку $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tau_1)$, соотношение $D^+m(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1)$ следует из того, что $D^+m(t) = 0$ при $t \in [t_0, t^*]$. Поэтому

$$V(t, x(t), \theta) \leq m(t) = m(t_0) \leq \lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta)$$

и далее

$$\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\rho(t_1, x(t_1))) \leq V(t_1, x(t_1), \theta) \leq (1+b_1)V(t_1^-, x(t_1^-), \theta) \leq$$
$$\leq (1+b_1)\lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta) < \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что $\rho(t_1, x(t_1)) < \varepsilon$.

Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно показать, что

$$\rho(t, x(t)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [\tau_1, \tau_2).$$

Переходя к пределу в соотношении

$$V(\tau_k, x(\tau_k), \theta) \leq (1+b_k)V(\tau_k^-, x(\tau_k^-), \theta) \leq (1+b_k)\ldots(1+b_1)\lambda_M(A_2(\theta))w_2(\delta)$$

при $k \to \infty$, находим

$$\rho(t, x(t)) < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Далее установим условия равномерной асимптотической устойчивости импульсной системы (3) относительно двух мер.

Теорема 2. *Предположим, что движение системы (3) равномерно устойчиво относительно двух мер. Пусть выполняются условия:*

1) существуют функции сравнения $\overline{w}_i$ из K-класса, $i = 1, 2$, и постоянные симметрические (2×2)-матрицы $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ такие, что для функции (4) справедливы оценки

$$\overline{w}_1^T(\rho)A_1(\theta)\overline{w}_1(\rho) \leq V(t, x, \theta) \leq \overline{w}_2^T(\rho)A_2(\theta)\overline{w}_2(\rho),$$

как только $\rho(t, x) < H$, $H = \mathrm{const} > 0$;

2) существуют функции $\psi_k \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\psi_k(s) \geq s$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что*

$$V(\tau_k, x + I_k(x), \theta) \leq \psi_k(V(\tau_k^-, x, \theta)),$$

как только $\rho(t, x) < H$, *функции* $\psi_k(s)/s$ *не убывают при* $s > 0$ *и при любом* $\varkappa > 0$ *существует постоянная* $Q > 0$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\psi_k(\varkappa)/\varkappa - 1] = Q < +\infty;$$

3) существуют симметрическая (2×2)*-матрица* $A_3(t)$, *момент* t^*, *функции сравнения* $\overline{w}_3$ *из* K*-класса и функции* $g_i(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, *такие, что*

$$D^+ V(t, x(t), \theta)\big|_{(2)} \leq -\overline{w}_3^T(\rho) A_3(t) \overline{w}_3(\rho) + g^T(t) g(t)$$

для значений $t \geq t^*$, *как только* $\rho(t, x) < H$ *и* $P(V(t, x(t), \theta)) > V(t + s, x(t + s), \theta)$, $-\tau \leq s \leq 0$, *где* $P \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $P(s) > 0$ *при* $s > 0$;

4) для заданного $\eta > 0$ *существует функция* w *из* K*-класса такая, что*

$$\overline{w}_3^T(\rho) A_3(t) \overline{w}_3(\rho) \geq \lambda_m(t) w(\eta) \geq 0$$

при $\rho(t, x) \geq \eta$, *где* $\lambda_m(t) = \lambda_m(A_3(t))$ — *минимальное собственное значение матрицы* $A_3(t)$;

5) при любых значениях $\eta > 0$ *из условия 4 и функциях* $g(t)$ *из условия 3 выполняются соотношения*

$$\lim_{p \to \infty} \inf_{t \geq 0} \int_t^{t+p} \lambda_m(s)\, ds = \infty$$

и

$$\int_0^{\infty} g^T(s) g(s) ds = \Theta < +\infty.$$

Тогда если матрицы $A_1(\theta)$, $A_2(\theta)$ *и* $A_3(t)$ *положительно определенные, то движение системы (3) равномерно асимптотически устойчиво относительно мер* (ρ_0, ρ).

Доказательство. Преобразуем вначале некоторые условия теоремы 2 к виду, удобному для дальнейших построений. Из условия 1 получаем

$$\lambda_m(A_1(\theta)) w_1(\rho) \leq V(t, x, \theta) \leq \lambda_M(A_2(\theta)) w_2(\rho), \tag{7}$$

где $w_1(\rho) \leq \overline{w}_1^T(\rho) \overline{w}_1(\rho)$ и $w_2(\rho) \geq \overline{w}_2^T(\rho) \overline{w}_2(\rho)$ при $\rho(t, x) < H$, w_1, w_2 принадлежат K-классу Хана. Из того, что движение системы (3) равномерно устойчиво относительно двух мер ρ_0 и ρ, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, не зависящее от t_0, такое, что $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, как только $\rho_0(t_0, \varphi) < \delta$. Из оценки (7) для любого значения $t \geq t_0$ получаем оценку

$$V(t, x(t), \theta) < \lambda_M(A_2(\theta)) w_2(\varepsilon).$$

Далее для любого значения $\beta \in (0,\varepsilon)$ выберем $\gamma > 0$ из условия

$$0 < 2\gamma < \min\{\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\beta), \quad \inf[P(s)-s]\}, \quad \Phi_1(\beta) \le s \le \Phi_2(\varepsilon),$$

где $\Phi_1(\beta) = \dfrac{1}{2}\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\beta)$, $\Phi_2(\varepsilon) = \lambda_M(A_2(\theta))w_2(\varepsilon)$. Из условия 2 теоремы 2 следует, что существует $k^* \in \mathbb{N}_+$ такое, что

$$\sum_{k=k^*}^{\infty}[\psi_k(\varkappa)/\varkappa - 1] < \frac{\gamma}{2\Phi_2(\varepsilon)}.$$

Из условия 5 теоремы 2 следует, что существует значение времени $\hat{t} > 0$ такое, что

$$\int\limits_{t_0+\hat{t}}^{\infty} g^T(s)g(s)\,ds < \frac{1}{2}\gamma.$$

Из условий 1, 5 следует, что существует $\tilde{t} > 0$ такое, что при $\eta = \lambda_M^{-1}(A_2(\theta))\times$ $\times w_2^{-1}(\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\beta))$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{t}^{t+\tilde{t}} \lambda_m(s)\,ds > \Theta + \Phi_2(\varepsilon)(1+Q)$$

при всех $t \ge \tilde{t}$.

Пусть n — первое положительное число, для которого

$$\Phi_2(\varepsilon) \le 2\Phi_1(\beta) + n\gamma.$$

Нетрудно показать, что при любом $i = 1,2,\ldots,n$ справедлива оценка

$$V(t,x(t),\theta) \le \Phi_2(\varepsilon) + (n-i)\gamma \tag{8}$$

при всех $t \ge t_0 + t_{k^*} + \hat{t} + i(\tilde{t}+\tau)$. Действительно, для любого $t \in [\tau_k+\tau, \tau_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$P(V(t,x(t),\theta)) > V(t,x(t),\theta) + 2\gamma \ge \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\beta) + (n-k-2)\gamma + 2\gamma \ge$$
$$\ge 2\Phi_1(\beta) + (n-k)\gamma \ge V(t+s, x(t+s), \theta)$$

при любом $s \in [-\tau, 0]$. Согласно условиям 3, 4, для величины η, определенной выше, получаем

$$D^+V(t,x(t),\theta) \le -\lambda_m(t)w(\eta) + g^T(t)g(t) \tag{9}$$

при всех $t \in [\tau_k + \tau, \tau_{k+1}]$. Отсюда, интегрируя неравенство (9) от $\tau_k + \tau$ до τ_{k+1}, находим

$$V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1}), \theta) \leq \Phi_2(\varepsilon)(1+Q) - w(\eta) \int\limits_{\tau_k+\tau}^{\tau_k+\tau+\tilde{t}} \lambda_m(s)ds + \Theta < 0.$$

Это неравенство противоречит оценке (7), поэтому неравенство (8) выполняется.

Аналогично можно показать, что для всех $t > t^* \in [\tau_k + \tau, \tau_{k+1}]$ справедлива оценка

$$V(t, x(t), \theta) < 2\Phi_1(\beta) + (n-k-1)\gamma.$$

Поэтому

$$\lambda_m(A_1(\theta))w_1(\rho(t, x(t))) \leq V(t, x(t), \theta) \leq \lambda_m(A_1(\theta))w_1(\beta)$$

при всех $t \geq \tau_n = t_0 + t^*$, т. е.

$$\rho(t, x(t)) \leq \beta \quad \text{при всех} \quad t \geq \tau_N = t_0 + t^*,$$

где $t^* = t_{k^*} + \hat{t} + n(\tilde{t} + \tau)$ не зависит от t_0.

Теорема 2 доказана.

3. Заключительные замечания. Разработка теории устойчивости движения импульсных систем с последействием (см. [4–10] и приведенную там библиографию), в том числе устойчивости относительно двух мер, представляет интерес как в теоретическом, так и прикладном аспектах. Среди задач прикладного характера выделим две: проблему устойчивости энергосистем при наличии последействия в системе управления и импульсном возмущении номинального режима и проблему синхронизации энергосистем [15]. Теоремы 1, 2, а также результаты статей [5–7], основанные на матричнозначных вспомогательных функциях, имеют некоторый потенциал для приложений при решении указанных двух проблем.

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
2. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. — New York: Marcel Dekker, 1989. — 305 p.
3. *Вуйичич В. А., Мартынюк А. А.* Некоторые задачи механики неавтономных систем. — Белград; Киев: Мат. ин-т САНУ, 1991. — 109 с.
4. *Liu X., Wang Q.* On stability in terms of two measures for impulsive systems of functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 2006. — **326**. — P. 252–265.
5. *Мартынюк А. А., Иванов И. Л.* О связной устойчивости импульсных крупномасштабных систем с запаздыванием // Доп. НАН України. — 2012. — № 7. — С. 60–66.
6. *Мартынюк А. А.* О стабилизации движения импульсной системы с последействием // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 62–65.
7. *Мартынюк А. А., Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Робастная устойчивость движения импульсной системы с последействием // Доп. НАН України. — 2012. — № 8. — С. 47–51.
8. *Bo Wu, Jing Han, Xiushan Cai.* On the practical stability of impulsive differential equations with infinite delay in terms of two measures // Abstr. and Appl. Anal. — 2012. — **2012**. — Article ID 434137. — 8 p.
9. *Stamova I. M.* Razumikhin-type theorems on stability in terms of two measures for impulsive functional differential systems // Note Mat. — 2006. — **26**, № 2. — P. 69–80.

10. *Fu X., Zhang L.* Razumikhin-type theorems on boundedness in terms of two measures for functional differential systems // Dynam. Syst. Appl. — 1997. — **6**. — P. 589 – 598.

11. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Л.; М.: ОНТИ, 1935. — 386 с.

12. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. математика и механика.— 1960. — **24**, № 6. — С. 988 – 1001.

13. *Leela S.* Stability of differential systems with impulsive perturbations in terms of two measures // Nonlinear Anal. — 1977. — **1**, № 6. — P. 667 – 677.

14. *Martynyuk A. A., Stavroulakis I. P.* Stability analysis with respect to two measures of impulsive systems under structural perturbations // Ukr. Math. J. — 1999. — **51**, № 11. — P. 1476 – 1484.

15. *Pavella M., Ernst D., Ruiz-Vega D.* Transient stability of power systems. A unified approach to assessment and control. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — 225 p.

Получено 15.03.13