УДК 517.91

КОЛЕКТИВНА ДИНАМІКА ТА БІФУРКАЦІЇ У СИМЕТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ ФАЗОВИХ ОСЦИЛЯТОРІВ. I

О. А. Бурилко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: burylko@yahoo.co.uk

The present paper is a brief review of the history and development of the famous Kuramoto model of coupled phase oscillators. We consider several systems that are generalizations of the classical Kuramoto model, which are given on symmetric oscillatory networks with different functions of interaction between the elements. We describe the collective dynamics and bifurcations of transitions between different modes of the interacting elements, namely: partial and full synchronizations, the global anti-phase mode, a slow switching mode between clusters, and chimera states. We show the interconnection between symmetries of networks and the existence of invariant manifolds of the system, cluster states and more complicated collective modes. In part II, we will consider several models with non-global symmetric coupling.

Наведено короткий огляд історії виникнення та розвитку знаменитої моделі Й. Курамото зв'язаних фазових осциляторів. Розглянуто декілька систем, що є узагальненнями класичної моделі Курамото, заданих на симетричних осциляторних мережах при різних функціях взаємодії між елементами. Описано колективну динаміку та біфуркації переходів між різними режимами взаємодіючих елементів: повну та часткову синхронізації, режим глобальної антифази, режим повільного перемикання між кластерами та химерні стани. Показано взаємозв'язок симетрій мережі з існуванням інваріантних многовидів системи, кластерних станів та більш складних колективних режимів. У частині II даної роботи буде розглянуто декілька моделей з неглобальним симетричним зв'язком.

1. Вступ. Перші експерименти, що засвідчили протифазову синхронізацію двох годинникових маятників, були проведені знаменитим фізиком Х. Гюйгенсом у XVII ст. [1, 2]. Близько двох з половиною століть ніяких суттєвих досягнень в отриманні нових експериментальних даних і теоретичних обґрунтувань синхронізації не було. Винятком можна вважати лише помічені біологами синхронізації спалахів світлячків та циркадних ритмів у рослин. Сплеск наукового інтересу до синхронізації почався наприкінці XIX — на початку XX ст. з виникненням електродинаміки та успіхами в дослідженні взаємодії нейронів. Це можна пояснити автоколивною природою колективної поведінки взаємодіючих об'єктів, теоретичного розуміння якої у попередній період часу ще не було. Подальші поштовхи до розвитку теорії синхронізації та колективної динаміки були спричинені винаходом комп'ютерів та появою кібернетики, радіофізики, розвитком теорії коливань, появою теорії біфуркацій, успіхами у дослідженні людського мозку та появою математичних нейронних моделей (моделі Ходжкіна – Хакслі, в першу чергу), різноманітними біологічними спостереженнями колективної динаміки живих організмів, винайденням коливних хімічних реакцій, лазерів, появою приладів, що стимулюють роботу серця та мозку, комп'ютерних та штучних нейронних мереж. Серед учених, які зробили значний внесок у становлення теорії синхронізації, варто згадати Релея, Ван-дер-Поля, Андронова, Вітта, Віннера. В середині XX ст. з'явилося розуміння складності колективної динаміки взаємодіючих об'єктів та необхідність створення математичних моделей, які б описували спільні риси синхронізації навіть незалежно від природи та складності взаємодіючих об'єктів та були якомога простішими та зручними для подальшого аналітичного вивчення. Першу вагому спробу здійснив А. Вінфрі [4, 5] у середині 1960-х років, запропонувавши модель взаємозв'язаних осциляторів. Іншим значним проривом у теорії синхронізації можна вважати запропоновану японським фізиком Й. Курамото модель зв'язаних фазових осциляторів у 1975 р. [6]. Широке визнання вченими різних природничих спеціальностей та шалену популярність *модель Курамото* (МК) отримала після виходу його книги [7] у 1984 р. Популярною МК стала саме завдяки своїй простоті, зручності для дослідження та можливості опису структурно дуже відмінних між собою режимів колективної динаміки, таких як повна синхронізація, часткова синхронізація, протифазна синхронізація, хвилі обертання, довготривала синхронізація з перемиканням, химерні стани і т. п. І при цьому в класичній МК кожен осцилятор описується всього одним рівнянням, у якому також вказується спосіб його взаємодії з іншими осциляторами. Іншим важливим моментом для моделі є її гнучкість: можливість легко описувати різні сітки взаємодій, легко ускладнювати способи взаємодії, наприклад, ускладнюючи функцію взаємодії, узагальнюючи опис власних частот осциляторів або вводячи адаптацію чи пластичність (записуючи додаткові рівняння для опису залежності сили взаємодії елемента від його поточної фази).

Важливий внесок у розвиток та популярність МК вніс, на думку автора, С. Строгатц, який є також співавтором кількох теорій стосовно вказаної моделі (зокрема, теорії Ватанабе – Строгатца), а також автором чисельної кількості статей та книги про синхронізацію [8]. Також слід відмітити книгу А. Піковського, М. Розенблюма та Ю. Куртца [2], в якій детально викладено історію синхронізації, її фізичну мотивацію, математичний опис та перспективи застосування в різних галузях природознавства.

Дослідження МК та її застосування приводять до появи нових типів моделей колективної динаміки та нових математичних теорій. Відмітимо, зокрема, МК з запізненням [9 – 14], осциляторну модель з центральним елементом [15 – 19], осциляторні мережі з хабами [20 – 23], МК з пластичністю [24 – 26], МК з адаптацією [27 – 29], різницеву МК [14, 30], нескінченновимірні МК [31 – 35], ланцюгові та кільцеві осциляторні моделі [36 – 43], МК з випадковими розподілами частот та шумом [31, 35, 44 – 46], МК з нелінійними фазовими зсувами [47 – 49], МК зі зворотним впливом [10, 50, 51], МК з інерцією [9, 31, 52 – 54] та МК на мережах, заданих специфічними графами [55, 57 – 59]. Крім зазначеної вище теорії Ватанабе – Строгатца, відмітимо також анзац Отта – Антонсена [60], теорію Хонг – Строгатца [61, 62], а також численні дослідження (які можна вважати окремою теорією) про режими повільного перемикання та гетероклінічні структури в системах типу Курамото [11, 55, 57, 63 – 65].

Дуже важливими в теорії синхронізації є виявлені Й. Курамото та Д. Баттогтохом когерентно – некогерентні стани [39], які пізніше Д. Абрамс та С. Строгатц назвали "химерними станами" або просто "химерами" [36, 66]. Крім своєрідної структури, химерні режими цікаві тим, що спочатку вони були описані математичними рівняннями і лише згодом (приблизно через десятиріччя) підтверджені численними фізичними експериментами.

Відмітимо, що за допомогою МК та подібних моделей були отримані значні результати при дослідженні таких режимів, як "змагання без переможців", "переможець отримує все", "змагання за синхронізацію". Також за допомогою системи Курамото можуть бути змодельовані певні ситуації в теорії ігор та теорії конфліктів.

Оскільки варіації МК дозволяють легко конструювати системи з наперед заданими симетріями, вони дозволяють виявляти взаємозалежність між симетріями системи та її інваріантними множинами, а також приводять до знаходження та дослідження нових типів біфуркацій. Також моделі типу Курамото широко використовуються для виділення та дослідження фазової синхронізації у системах більш складної природи, коли один вузол задається багатьма диференціальними рівняннями. Особливо такі методи ефективні для дослідження різних типів синхронізації в нейронних мережах.

На даний момент існують тисячі статей, присвячених різноманітним варіаціям та узагальненням МК, а також дослідженням синхронізації та колективної динаміки зв'язаних осциляторів та нейронів. Великі огляди даної тематики можна знайти, зокрема, в роботах [2, 31, 35, 42, 55, 59, 67 – 74]. У даному контексті також слід особливо відзначити монографії [2, 5, 8, 75 – 79].

Відмітимо, що МК (та її узагальнення) мережі одновимірних фазових осциляторів є часто перехідним етапом для дослідження мереж більш складних багатовимірних елементів. Зокрема така система може бути отримана як усереднення більш складної системи зі збереженням певних властивостей колективної поведінки [80 – 85]. Стандартна МК виникла як фазова частина зв'язаних комплекснозначних систем Стюарта – Ландау [7]. Мотивацією Й. Курамото для створення моделі слугували спостереження поведінки хімічних та біологічних осциляторів. Після виникнення МК знайшла своє широке застосування при дослідженнях нейронних мереж, надпровідникових з'єднань Джозефсона, масивах лазерів та моделюванні багатьох інших складних систем взаємодіючих елементів. Незважаючи на те що для моделювання окремих елементів мережі в більшості прикладних випадків застосовуються багатовимірні системи з дуже складною індивідуальною поведінкою, для моделювання їхньої колективної поведінки може бути достатньо вивчення лише їхньої фазової (у певному розумінні) синхронізації. Одним зі способів дослідження синхронізації даних є виділення фаз сигналів за допомогою перетворення Гільберта [86], що дає змогу подальшого їхнього дослідження у вигляді осциляторних систем.

У даній роботі ми коротко оглянемо моделі взаємодіючих осциляторів, що базуються на МК. Також, використовуючи в основному попередні власні результати, покажемо, як різноманітні типи зв'язків впливають на утворення різних типів колективної динаміки в системі та на біфуркаційні переходи між різними режимами. Також покажемо, як симетрії взаємодії між елементами та функції зв'язків у моделях впливають на утворення різних типів синхронізації. У цій частині огляду ми розглянемо найбільш популярні моделі ідентичних осциляторів із глобальним зв'язком, а саме: стандартну МК, модель Курамото – Сакагучі (з одногармонічним зв'язком та фазовим зсувом), модель Піковського – Розенблюма (з нелінійним фазовим зсувом, залежним від параметра порядку), модель Гансела – Мато – Моньє (з двогармонічним зв'язком) та узагальнену модель Даідо/Хонг – Строгатца (з притягувальними та відштовхувальними елементами і фазовим зсувом).

У другій частині цієї роботи буде розглянуто моделі ідентичних осциляторів із симетричними графами взаємодії, а саме: модель із центральним елементом, модель із циркулянтним зв'язком, модель нерозрізнюваних осциляторів, моделі з блочно-симетричними зв'язками. У цій частині основною метою буде показати наявність колективних динамік із певними особливостями (взаємодія між елементами спеціально будується таким чином, щоб були ті чи інші особливі типи розв'язків).

2. Моделі фазових осциляторів типу Курамото. ***2.1. Опис системи.*** Розглянемо модель N зв'язаних фазових осциляторів типу Курамото:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi) = \mathbb{T}^1$ — фазові змінні, ω_i — власні частоти осциляторів, K_{ij} — параметри (сили) зв'язків між осциляторами, $\Gamma_{ij}(x)$ — гладкі 2π-періодичні функції зв'язку. Наголосимо на тому, що кожна змінна θ_i пробігає одновимірне коло, і отже, фазовим простором системи є тор $\mathbb{T}^N$. Для наочності можемо уявляти N точок, які рухаються в одному напрямку по колу з власними кутовими швидкостями ω_i у випадку, коли система не зв'язана (коли всі $K_{ij} = 0$), і мають спільну колективну динаміку у випадку наявності зв'язків. Наявність зв'язків у системі та залежність окремих фазових точок одна від одної може спричиняти досить складну загальну поведінку. Зокрема згадані фазові точки під дією колективного впливу одна на одну можуть: рухатися не лише в одному напрямку, а й коливатися досить різноманітним чином, збиратися в групи (кластери) і рухатися разом протягом певного часу або перманентно, рухатися протягом довгого часу разом із якоюсь групою, а потім за короткий час перейти в іншу групу, коливатися хаотично і т. д. Параметр K_{ij} (який також може бути не постійним $K_{ij}(t)$) вказує на силу впливу j-го осцилятора на i-й. Рівність будь-якого з параметрів K_{ij} нулю означає відсутність зв'язків між відповідними осциляторами. Система є досить загальною, частіше, як правило, використовується одна функція зв'язків $\Gamma_{ij}(x) = g(x)$. Стандартна МК (з чого все починалось) описує систему глобально зв'язаних осциляторів із однією функцією зв'язку $\Gamma_{ij}(x) = -\sin x$ та однаковими силами взаємодії $K_{ij} = K$ для всіх значень індексів. Природно також починати дослідження системи Курамото у випадку *ідентичних фазових осциляторів*, тобто коли $\omega_i = \omega,\ i = 1, \ldots, N$, оскільки така система є максимально симетричною. Випадок ідентичних осциляторів є найбільш досліджуваним для будь-яких способів взаємодії, дає можливість отримати вагомі аналітичні результати, на відміну від неідентичних випадків. Тим більше неочікуваними часто є результати (як правило, спочатку отримані за допомогою комп'ютерної симуляції) різноманітних режимів, які здаються дуже несиметричними в симетричних умовах взаємодії (такі як перемикання між кластерами чи химерні стани). Варіюючи елементи матриці взаємодії між осциляторами K_{ij}, функції зв'язку $\Gamma_{ij}(x)$ та власні частоти ω_i, можна створити ситуацію, коли система (1) має ту чи іншу наперед задану симетрію. Часто симетрії в подібних системах є добре прихованими і можуть бути виявлені лише при детальному дослідженні. Виявляється, що симетрії в системі часто приводять до виникнення інваріантних многовидів, які, в свою чергу, відповідають різноманітним кластерам (частковій синхронізації кількох осциляторів). Також велика кількість симетрій може привести до існування многовидів, цілком заповнених особливими точками чи сім'єю періодичних розв'язків, які розсипаються при найменшому порушенні симетрії. Відмітимо також, що певні біфуркації в системі також можливі лише при наявності певних симетрій, зокрема локальних транскритичної та вилкової біфуркацій (замість більш типової сідло-вузлової біфуркації в несиметричних ситуаціях) та різноманітних гетероклінічних біфуркацій.

У даній роботі ми коротко опишемо кілька випадків, коли симетрії в системі (1) приводять то різних типів синхронізації, а також до певних типів біфуркацій.

2.2. Система у фазових різницях. Спочатку відмітимо, що праві частини загальної системи (1) залежать від фазових різниць $\theta_i - \theta_j$, що свідчить про наявність у системи симетрії фазового зсуву $\mathbb{T}^1$ вздовж кола, який задається дією $\theta_i \mapsto \theta_i + \varepsilon$. Це означає, що для дослідження різноманітних видів колективної динаміки можна зафіксувати один осцилятор і далі розглядати систему з фазовими змінними, яка має меншу на одиницю вимірність. Зокрема ми фіксуємо перший осцилятор і вводимо фазові різниці

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Таким чином, від системи (1) переходимо до допоміжної системи у фазових різницях

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(K_{1,j}\Gamma_{1,j}(\varphi_{j-1}) - K_{i+1,j}\Gamma_{i+1,j}(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1})\right), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

де $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1},\ i = 1, \ldots, N-1$, та $\varphi_0 = 0$. Остання система "поглинає" вказану симетрію. Цілий одновимірний інваріантний многовид синхронізації $\theta_i = \theta,\ i = 1, \ldots, N$, для системи (1) стискається в одну точку $\varphi_i = 0,\ i = 1, \ldots, N-1$, для нової системи. Недоліками нової системи є відсутність або прихованість однієї із симетрій та більш складна її права частина. Перевагами є те, що певні особливі множини зменшують свою вимірність на одиницю (не завжди, залежно від ситуації), що має певні спільні риси з дослідженням перерізів Пуанкаре при описі певних розв'язків динамічної системи. Так, зокрема, замість дослідження періодичних розв'язків часто можна обмежитися розглядом положень рівноваги, а замість дослідження квазіперіодичних траєкторій — періодичними орбітами. В останніх випадках дослідження стійкості та біфуркаційний аналіз значно спрощуються. Для зручності досліджень для редукції системи (1) крім фазових різниць (2) можна користуватися будь-яким набором з $N-1$ лінійно незалежних фазових різниць $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, оскільки динаміки різних зведених систем є топологічно еквівалентними між собою.

Інколи для опису динаміки системи (1) зручно переходити до нових змінних (2), залишаючи N-те рівняння в системі. Зокрема, невироджена заміна змінних,

$$\overline{\Phi}^T = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Phi^T \end{pmatrix} = S_N \Theta^T, \qquad S_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

зводить систему (1), записану у векторній формі як $d\Theta/dt = F(\Theta)$, до системи $d\overline{\Phi}/dt = \overline{G}(\overline{\Phi})$, що є розширенням системи $d\Phi/dt = G(\Phi)$, $\overline{\Phi} = (\theta_1, \Phi)$ за допомогою рівняння $d\theta_1/dt = F_1(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \overline{F}_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$. Зв'язок між власними значеннями λ лінеаризованої системи *ідентичних осциляторів* (1) та лінеаризації її редукції (3) можна записати у вигляді [37]:

$$\det(A - \lambda I_N) = -\lambda \det(B - \lambda I_{N-1}),$$

де

$$A = A(\Theta_0) = \left.\frac{\partial F(\Theta)}{\partial \Theta}\right|_{\Theta=\Theta_0}, \qquad B = B(\Phi_0) = \left.\frac{\partial G(\Phi)}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=\Phi_0},$$

I_N — квадратна одинична матриця розміру N.

2.3. Позначення та означення. Одним із важливих понять для розуміння та оцінювання ступеня синхронізації в системах зв'язаних фазових осциляторів є поняття *параметра порядку* Курамото. Комплексне середнє поле

$$Z(t) = R(t)e^{\imath\psi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\imath\theta_j(t)},$$

де $\imath = \sqrt{-1}$, будемо називати комплексним параметром порядку, а його амплітуду $R(t)$ — параметром порядку (у різних джерелах параметром порядку називають або Z, або R). Позначимо

$$\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N), \quad \overline{\Theta}_{ij} = \lim_{t\to\infty} |\theta_i(t) - \theta_j(t)|, \quad \Omega_{ij} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} |\theta_i(t) - \theta_j(t)|.$$

Далі надамо означення (інколи з короткими поясненнями) різних найбільш важливих типів синхронізації в системі (1).

Два осцилятори θ_i та θ_j є *фазово синхронізованими*, якщо $\overline{\Theta}_{ij} = 0$.

Два осцилятори θ_i та θ_j є *частотно синхронізованими*, якщо $\Omega_{ij} = 0$.

Два осцилятори θ_i та θ_j є *десинхронізованими* (у будь-якому розумінні), якщо $\Omega_{ij} \neq 0$.

Система має *повну синхронізацію* Θ_{sync}, коли всі її осцилятори є синхронізованими між собою, тобто

$$\Theta_{\text{sync}} = (\theta, \ldots, \theta). \tag{4}$$

Легко перевірити, що повна синхронізація еквівалентна тому, що $R = R(\Theta_{\text{sync}}) = 1$.

Одночасна синхронізація m осциляторів ($m \geq 2$) у системі називається або *m-кластером,* або просто *кластером*.

Назвемо *k-кластерним станом* таке розбиття множини осциляторів $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$, при якому вся множина їхніх індексів розбита на підмножини таким чином:

$$\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{A}_j, \quad \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_i = \varnothing \quad \text{для} \quad j \neq i,$$

що будь-які осцилятори θ_i та θ_m є рівними, якщо їхні індекси належать одній підмножині $\mathcal{A}_j$, та не дорівнюють один одному, якщо їхні індекси належать різним підмножинам.

Величиною кожного кластера a_j є число індексів відповідної множини $a_j = |\mathcal{A}_j|$, $\sum_{j=1}^{k} a_j = N$.

Два осцилятори є *фазово замкнутими*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \le C < 2\pi$. Осцилятори θ_i та θ_j знаходяться у *антифазі*, якщо $\Theta_{ij} = \pi$.

Система має стан *рівномірно розподілених фаз* Θ_{splay} (або *хвилі обертання*), якщо $\Theta_{i,i+1} = m \cdot 2\pi/N,\ i = 1, \ldots, N$ (індекс i береться за модулем N), або (в іншому записі)

$$\Theta_{\text{splay}} = \left(\theta, \theta + m\frac{2\pi}{N}, \theta + m\frac{2\cdot 2\pi}{N}, \ldots, \theta + m\frac{(N-1)2\pi}{N}\right), \quad m = 1, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Параметр порядку $R(\Theta_{\text{splay}}) = 0$.

Система має стан *глобальної антифази*, якщо $R = 0$ (попередній стан є частковим випадком цього). З означення параметра порядку випливає, що стан повної антифази задається $(N-2)$-вимірною множиною $\mathcal{M}^{(N)} \in \mathbb{T}^N$:

$$\mathcal{M}^{(N)} = \left\{ (\theta_1, \ldots, \theta_N) \colon \sum_{j=1}^{N} e^{\imath\theta_j} = 0 \right\}. \tag{6}$$

Будемо вважати, що оригінальна система (1) має режим *повільного (гетероклінічного) перемикання* між кластерами, коли відповідна їй система у фазових різницях (3) має гетероклінічний цикл, сідлові точки якого відповідають кластерним режимам. Варіацією режиму повільного перемикання можна вважати також режим, що відповідає граничному циклу системи (3), близькому до згаданого гетероклінічного циклу і утвореного після його зникнення унаслідок біфуркації. Ми не даємо тут більш чіткого математичного означення, щоб не звузити дане поняття, яке використовується значною кількістю авторів у дещо різних контекстах з метою опису деяких фізичних чи нейронних явищ (див., зокрема, [63, 64, 85, 87 – 90]). Ідея даного означення полягає у тому, що фазова траєкторія дуже довго знаходиться у околі сідла (сідло-вузла), що відповідає кластеризації певної кількості (не всіх) осциляторів, а потім за дуже короткий час дана траєкторія "перебігає" до іншого сідла, що також відповідає кластеру, але уже з іншим набором осциляторів. Поняття слабкого перемикання може бути і більш загальним, зважаючи на те, що гетероклінічні цикли можуть мати своїми вузлами не тільки сідла, а й сідлові граничні цикли або сідлові хаотичні орбіти.

У даному списку режимів синхронізації відсутній так званий "химерний стан" або когерентно-некогерентний режим, який є мабуть одним з найбільш цікавих та досліджуваних режимів колективної взаємодії у системах зв'язаних елементів. Химерні стани не можуть виникати у системах глобально зв'язаних фазових осциляторів, тому у цій частині роботи ми не будемо його описувати, а зробимо це у наступній частині, де будуть розглядатися симетричні неглобальні мережі взаємодії. Крім того, історія виникнення химер, їхнього означення та мереж, для яких вони можуть існувати, вимагає більш детальної дискусії.

Відмітимо, що в означеннях кожного з описаних вище режимів ми не вимагали його стійкості або стійкості відповідної траєкторії системи, що відповідає певному режиму. Стійкість кожного з таких режимів може бути предметом окремого дослідження. Але, якщо не вказується зворотне, ми вважаємо, що режим існує, якщо він асимптотично стійкий. Можуть бути й інші режими, зв'язані з елементами синхронізації в системі (як, наприклад, хаотична синхронізація), але їхні означення є досить складними та неоднозначними.

Зробимо декілька зауважень відносно окремих означень. Фазова синхронізація є більш слабким поняттям, ніж частотна. Осцилятори, які знаходяться у протифазі, є частотно синхронізованими. Система може мати декілька кластерів (груп синхронізованих осциляторів), які при цьому можуть бути фазово замкненими між собою, а можуть і не бути такими (обертатися по колу так, щоб їхня різниця долала бар'єр 2π). Параметр порядку R може бути константою (наприклад, у режиму повної синхронізації чи повної протифази), так і бути функцією, залежною від часу $R = R(t)$ (як будь-якого режиму, що має принаймні два десихронізовані осцилятори). Складні колективні динамічні режими можуть бути у певному розумінні суперпозиціями більш простих колективних режимів, як, наприклад, хаотична синхронізація [91, 92], гетероклінічні химери [93 – 95] чи хаотичні химери [96, 97]. Усі означення, зроблені для фазових осциляторів, мають свої природні аналоги для більш складних зв'язаних динамічних систем (наприклад, моделей нейронних мереж).

3. Системи глобально зв'язаних ідентичних осциляторів. Математичне задання мереж динамічно взаємодіючих між собою елементів (осциляторів, нейронів тощо) завжди має *три основні складові*:

1. Опис динаміки *індивідуального* (не зв'язаного з іншими) *вузла* за допомого рівнянь або систем рівнянь.

2. Опис *архітектури взаємодії між окремими елементами мережі*, що найчастіше можливо за допомогою графу зв'язків.

3. Опис *впливу одного елемента на інший у кожній ланці зв'язки*, що відбувається за допомогою додаткових виразів у правих частинах системи індивідуального елемента або за допомогою додаткових рівнянь чи систем рівнянь.

Складна система взаємодіючих елементів завжди має важливі особливості колективної динаміки, якщо якась із описаних вище складових 1 – 3 має симетрії. Зокрема, характерною особливістю симетричних мереж є наявність різноманітних кластерів та інваріантних множин динамічних моделей. Симетрійні властивості часто суттєво спрощують аналітичне дослідження відповідних систем та надають можливості для різноманітної їхньої редукції. Очевидно, що найбільшу можливість редукції надає система, у якої симетрії присутні у кожній з описаних складових 1 – 3. У даній роботі ми розглядаємо системи, що мають симетрії в описі індивідуальних вузлів та зв'язків між вузлами, а також повну або часткову симетрію мережі взаємодії. У подальшому буде показано, як наявність таких симетрій у осциляторних систем приводять до існування інваріантних областей чи замкнутих множин, що містять розв'язки певного типу. Наявність певних симетрій у системі часто є необхідною умовою для існування гетероклінічних циклів або багато-параметричних сімей періодичних чи квазіперіодичних розв'язків.

Розглянемо найбільше розповсюджений випадок моделі *глобально зв'язаних осциляторів з однією і тою ж функцією взаємодії* $\Gamma_{ij}(x) = g(x)$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Будемо говорити, що система описує *ідентичні осцилятори*, якщо всі власні частоти є рівними:

$$\omega_i = \omega, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

Умова (8) говорить про те, що всі вузли системи є повністю однаковими (складова 1 із наведеного вище опису взаємодії). У ідентичності вузлів осциляторів система (7) є максимально симетричною, оскільки має глобальний граф ідентичних зв'язків кожного елементу з кожним та однаковий вплив будь-якого i-го елемента на j-й елемент, що задається виразом: $Kg(\theta_i - \theta_j)/N$. В подальшому у даній роботі ми будемо порушувати лише симетрію графу взаємодії, що задається матрицею сил зв'язків $K = (K_{ij})_{i,j=1}^{N}$. Також у пп. 3.5 буде показано, що симетрія функції взаємодії $g(x)$ суттєво впливає на динаміку системи і може зробити її градієнтною або гамільтоновоподібною.

Система ідентичних осциляторів може бути одразу ж спрощеною. За допомогою заміни $\theta_i \to \theta_i - \omega t$ можна прибрати параметр ω з системи і далі за допомогою шкалування часу, не обмежуючи загальності, можна зробити параметри зв'язку K будь-якою константою, зокрема ми покладемо $K = N$. Тоді система (7) набуває вигляду

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Системі (7) відповідає редукована зі змінними (2) система вигляду

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + g(0) - g(-\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N-1}(g(\varphi_j) - g(\varphi_j - \varphi_i)), \quad i = 1, \ldots, N = 1, \tag{10}$$

А умові ідентичності осциляторів (2) відповідає умова

$$\Delta_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N - 1. \tag{11}$$

Система (7), (8) і, отже, (9) має симетрію перестановок $\mathbf{S}_N$. Це приводить до інваріантності будь-яких кластерів $\theta_i = \theta_j,\ i \neq j$, оскільки $\sum_{j=1}^{N} g(\theta_j - \theta_j) = 0$. У кластер можуть зібратися від двох до N осциляторів. Кластер не руйнується, якщо початкові умови починаються з нього. N-кластер є повною синхронізацією системи. Кластери можуть бути як атракторами, так і репелерами чи мати сідлову структуру стійкості. Для системи у фазових різницях вказані кластери відповідають інваріантним прямим чи гіперплощинам. Інваріантні гіперплощини вимірності $N-2$ розділяють весь фазовий простір $\mathbb{T}^{N-1}$ системи (10), (11) на $(N-1)!$ інваріантних симетричних регіонів, які містять фазово замкнуті траєкторії (траєкторія не може покинути регіон, з якого стартувала). Один з інваріантних регіонів системи (10) описується виразом

$$\mathcal{C} = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1} : 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{N-1} < 2\pi\}, \tag{12}$$

інші регіони отримуються за допомогою перестановок індексів [80, 98]. Порушення ідентичності власних частот (наприклад, за допомогою збурень) призводить до втрати симетрії системи і руйнування згаданих інваріантних регіонів. У останньому випадку можуть з'являтися фазово незамкнуті траєкторії (наприклад, у [99, 100] досліджується екстремальна чутливість траєкторій до таких збурень). Крім інваріантних многовидів, які відповідають кластерам, симетрія $\mathbf{S}_N$ може бути причиною довгострокової синхронізації з перемиканням, що відповідає гетероклінічним траєкторіям у фазовому просторі $\mathbb{T}^{N-1}$ системи (3). Такі гетероклінічні траєкторії можуть мати різні власні симетрії, які є підмножинами симетрії $\mathbf{S}_N$. Наприклад, можуть існувати $\mathbf{Z}_N$-симетричні гетероклінічні цикли або гетероклінічні цикли, що базуються на сідлах з $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ ізотропією. Існування таких циклів залежить від функції зв'язку системи та дуже часто від парності кількості осциляторів [55, 80, 89, 99, 101].

У випадку, коли функція зв'язку $g(x) = -\sin(x-\alpha)$, де α — параметр, система (7) має назву *моделі Курамото – Сакагучі* [56]. Для такої моделі розроблена теорія Ватанабе – Строгатца [49, 83], яка добре описує динаміку цієї системи всередині інваріантних регіонів, редукуючи її до тривимірної динаміки. Використання теорії, представленої у роботі [102], дозволяє описувати також кластерні розв'язки, що знаходяться на границях інваріантних областей. Теорія Ватанабе – Строгатца узагальнюється і працює для більш складної системи з нелінійним фазовим зсувом $\alpha{=}\alpha(\mathrm{R},\beta)$ у функції взаємодії. При наявності другої гармоніки у функції $g(x)$ динаміка системи може бути суттєво складнішою. Зокрема, у роботах [94, 103] було встановлено, що система чотирьох ідентичних осциляторів має *хаотичні траєкторії* у випадку, коли $g(x)$ має третю та четверту гармоніки. Це приклад хаосу з максимально можливою кількістю симетрій. Динаміку, стійкість та біфуркації системи (7) було детально розібрано у роботах [99, 101, 104] (та багатьох інших) у випадку, коли $g(x) = -\sin(x-\alpha) + r\sin(2x-\beta)$, де $\alpha,\ \beta,\ r$ — параметри, тобто у *моделі Гансела – Мато – Моньє* [64, 105]. Типовими режимами для моделей такого типу є різноманітні режими повільного перемикання між осциляторами. Загальні властивості розв'язків системи (7) добре описуються у випадку довільної кількості гармонік функції взаємодії $g(x)$, але за умов, що ця функція є парною або непарною. У цих випадках система може бути градієнтною або консервативною. Порушення глобальної симетрії зв'язків системи веде до руйнування певних кластерних режимів та відповідних інваріантних множин системи. При цьому, збереження часткових симетрій перестановок між елементами системи також зберігає і її кластерні режими (як це буде продемонстровано в пп. 3.6). Також відмітимо, що парновимірні симетрично зв'язані системи мають більш різноманітну множину колективних режимів та більшу кількість різних біфуркацій порівняно з непарновимірними системами.

3.1. Стандартна модель Курамото. Першою природно розглянути класичну модель з найпростішим зв'язком, яку запропонував саме Й. Курамото [6, 7], і яку ми будемо називати *стандартною МК*. Тобто ми розглядаємо систему глобально зв'язаних фазових осциляторів (7) з позитивною (притягувальною) силою зв'язку $K > 0$ та функцією взаємодії:

$$g(x) = -\sin x. \tag{13}$$

Як і в даному випадку системи з найпростішою функцією (13), так і в подальшому для більш складних функцій та більш нетривіальних графів взаємодії, описуючи особливі режими системи (7) (або (9)) зі змінними θ_i, будемо описувати відповідні розв'язки системи у фазових різницях (3) зі змінними φ_i. Система (9) має такі режими:

Стійкий стан повної синхронізації $\Theta_{\rm sync}$, що відповідає стійкій особливій точці $\Phi_{\rm sync} = (0,\ldots,0)$ системи (10).

Положення повної антифази $\mathcal{M}^{(N)}$, що задається співвідношенням (6). Даному $(N-2)$-вимірному інваріантному многовиду $\mathcal{M}^{(N)}$ відповідає $(N-3)$-вимірний інваріантний многовид

$$\overline{\mathcal{M}}^{(N)} = \left\{ (\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1})\colon \sum_{j=1}^{N-1} e^{\imath\varphi_j} = -1 \right\},$$

що цілком складається з особливих точок системи (10). Кожна точка інваріантного многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ є стійкою всередині цього многовиду та вона є відштовхуючою у двох трансверсальних до $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ напрямках. Тобто даний многовид є репелером системи.

Сідлові точки S_{ij} системи у фазових різницях (10), що мають i координат рівних 0 та j координат рівних π, $i \neq 0$. Таких сідлових точок, очевидно, система має $2^N - 1$. У випадку парної кількості N осциляторів сідла S_{ij} належать $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ та є виродженими, якщо $i = N/2-1$, $j = N/2$. Нестійкі многовиди $W^u(S_{ij})$ прямують до $\Phi_{\rm sync}$, а стійкі $W^s(S_{ij})$ — до $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ при зворотному часі.

Система у фазових різницях (10) не має жодних інших особливих множин (граничних циклів, наприклад), усі її неособливі траєкторії починаються на $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ та закінчуються у $\Phi_{\rm sync}$. Відмітимо, що при $K < 0$ динаміка системи описується таким же чином для зворотного часу. Тобто у цьому випадку єдиним атрактором є множина антисинхронних станів, а єдиним репелером є стан повної синхронізації. Випадок $K = 0$ є біфуркаційним.

Незважаючи на те, що дана стаття присвячена опису систем з симетричними зв'язками, у даному випадку наведемо короткі відомості про глобально зв'язані *неідентичні* осцилятори. Тобто вважаємо, що рівність (8) не виконується. Інакше кажучи, вважаємо, що $\omega_i = \omega + \delta_i$, $i = 1,\ldots,N$, де δ_i є збуреннями власних частот від режиму їхньої повної ідентичності. Позначимо різниці власних частот $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1}$, $i = 1,\ldots,N-1$, для редукованої системи (3). Очевидно, що випадок ідентичних частот для (1) відповідає $\Delta_i = 0$, $i = 1,\ldots,N-1$, для редукованої системи. Спочатку зафіксуємо параметр $K > 0$ та будемо змінювати власні частоти оригінальної системи (принаймні деякі з $\delta_i \neq 0$), що відповідає зміні Δ_i від нуля для системи (10). Що буде відбуватись з описаними вище особливими режимами системи ідентичних осциляторів? Інваріантний $(N-3)$-вимірний многовид $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ "розсипається" при найменшому збуренні будь-якого параметра Δ_i від нуля. Майже всі точки цього многовиду зникають і залишаються лише $N-1$ ізольованих особливих точок, близьких до точок рівномірного розподілу фаз

$$\Phi_{\rm splay} = \left(\frac{2m\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2(N-1)m\pi}{N} \right), \quad m = 1,\ldots,N-1, \tag{14}$$

де індекси беруться по модулю N, для системи (3), (11). Тобто випадок $\Delta_i = 0$, $i = 1,\ldots,N-1$, є біфуркаційним, і дана біфуркація є виродженою. Очевидно, що інші 2^N гіперболічних точок Φ_{syn} та S_{ij} не змінять свою стійкість при невеликих збуреннях Δ_i.

Отже, при змінах частотних різниць ми будемо спостерігати рух $2^N + N - 1$ згаданих вище точок у фазовому просторі. При подальшій зміні параметрів особливі точки будуть підходити близько одна до одної, біфуркувати та зникати. Частіше за все будуть відбуватися сідло-вузлові біфуркації двох точок або, при наявності додаткової симетрії, вилкові біфуркації. Загальна картина біфуркацій може бути доволі складною, оскільки тут ми не прив'язуємось до якогось конкретного розподілу частот та до їхніх усіляких варіацій. Послідовність біфуркацій (можливо, не лише локальних) приводить до послідовності зникнення особливих точок, останньою з яких зникне стійка точка, що почала свій рух з початку координат при $\Delta_i = 0$. У параметричному $(N-1)$-вимірному просторі параметрів Δ_i буде деяка $(N-2)$-вимірна сферо-подібна поверхня, що відповідає біфуркації зникнення стійкої точки. Відмітимо, що параметр порядку R стійкої точки рівномірно спадає від одиниці, при русі вздовж довільної прямої у параметричному просторі від початку координат. У разі існування цієї точки (частотної синхронізації) її параметр порядку R є константою для довільних параметрів. Після зникнення останнього положення рівноваги залишаються режими, що відповідають різній кластеризації за винятком повної синхронізації. При останній біфуркації має виникнути принаймні два кластери з різними середніми частотами Ω_i. При подальшій зміні частот більші кластери будуть розщеплюватись на менші, аж до повного розщеплення на N окремих осциляторів з різними середніми частотами. При русі по прямій від початку координат у параметричному Δ_i-просторі ми будемо спостерігати розгалужене дерево середніх частот (як, наприклад, на малюнку 1 у [106]). Більш традиційний підхід вивчення біфуркаційних переходів між кластерними режимами полягає у фіксуванні конкретного розподілу частот (з природничих, ймовірнісних чи симетрійних міркувань) і зміні єдиного параметра сили зв'язку K [7, 35, 107, 108]. Тоді важливою задачею є знаходження біфуркаційного значення $K_c = K_c(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ (залежного від даного розподілу) такого, що при $K = K_c$ зникає частотна синхронізація всіх осциляторів і починається кластеризація (біфуркація розщеплення частот). Найбільш популярним є зображення біфуркаційної діаграми у (K, R)-параметричній площині (див., наприклад, рис. 3 у [35]) або $(K, \overline{\omega}_i)$ біфуркаційна діаграма, де $\overline{\omega}_i$ є середніми частотами осциляторів, набутих під дією векторного поля системи (див., наприклад, малюнок 1 у [106]). При $K \geq K_c$ існує режим повної частотної синхронізації з середньою частотою $\Omega = \overline{\omega}_i,\ i = 1, \ldots, N$, параметр порядку якого R збільшується зі збільшенням значення K. При $K < K_c$ існують лише кластери (осцилятори, середні частоти яких співпадають), кількість яких (унаслідок біфуркацій розділення частот) збільшується при зменшенні значення K. При $K = 0$ всі осцилятори мають індивідуальну поведінку, а їхні середні частоти співпадають з власними: $\overline{\omega}_i = \omega_i,\ i = 1, \ldots, N$. Наявність певних симетрій у розподілі власних частот (наприклад, частоти рівновіддалені від середнього значення або рівномірно розподілені на відрізку) також веде до існування квазіперіодичних інваріантних многовидів та фазового хаосу [109, 110]. Відмітимо, що важливу роль у розумінні колективної поведінки осциляторів у кластерах та кластерів між собою відіграють числа обертання (співвідношення обмотки) [106, 111, 112].

3.2. Модель Курамото – Сакагучі. Систему глобально зв'язаних фазових осциляторів (7) з функцією взаємодії вигляду

$$g(x) = -\sin(x - \alpha), \tag{15}$$

де $\alpha \in \mathbb{T}$ є параметром фазового зсуву, розглянуто та детально досліджено в роботі Х. Сакагучі та Й. Курамото [56]. Модель (7), (15) привертає увагу багатьох дослідників, оскільки має дуже широкий спектр застосувань у різних галузях науки. Дослідження явищ колективної динаміки може бути застосоване в описі взаємодії найпростіших частинок, масивів з'єднань Джозефсона, електрохімічних осциляторів, масивів лазерів, нейронних мереж та взаємодії живих організмів. Системи зв'язаних осциляторів із фазовим зсувом на неглобальних (особливо симетричних) сітках є також дуже корисними для чисельних застосувань і тому є досить популярними. Особливу увагу привертають такі моделі на кільцевих мережах, циркулянтних мережах та мережах нерозрізнюваних елементів, оскільки вони є джерелом появи дуже цікавих режимів колективної взаємодії, таких як химерні стани та консервативно-дисипативні просторові режими [36, 37, 39, 93, 113].

У роботі С. Ватанабе та С. Строгатца [82, 83] показано, яким чином динаміка надпровідникових масивів Джозефсона може бути описаною за допомогою моделі Курамото – Сакагучі та сформульовано теорію (теорія Ватанабе – Строгатца), яка дозволяє суттєво редукувати цю систему для подальшого вивчення. Основний результат даної теорії полягає в тому, що N-вимірна система глобально зв'язаних ідентичних осциляторів (9), (15) може бути зведеною до тривимірної системи

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{\rho}}{dt} &= K\sin\alpha\frac{(1-\widetilde{\rho}^2)^{3/2}}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})} + K\cos\alpha\frac{1-\widetilde{\rho}^2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\widetilde{\rho}-\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})},\\
\widetilde{\rho}\frac{d\widetilde{\Psi}}{dt} &= K\sin\alpha\frac{(1-\widetilde{\rho}^2)^{1/2}}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\widetilde{\rho}-\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})} - K\cos\alpha\frac{1-\widetilde{\rho}^2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})}, \quad (16)\\
\widetilde{\rho}\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt} &= K\sin\alpha\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\widetilde{\rho}-\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})} - K\cos\alpha\frac{(1-\widetilde{\rho}^2)^{1/2}}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin(\psi_i-\widetilde{\Psi})}{1-\widetilde{\rho}\cos(\psi_i-\widetilde{\Psi})},
\end{aligned}$$

де $\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Phi}$ є "глобальними фазами", а $\widetilde{\rho} \in [0,1]$ є "амплітудою". Дана редукція виконується за допомогою заміни змінних

$$\theta_i(t) = \widetilde{\Phi}(t) + 2\arctan\left[\sqrt{\frac{1+\widetilde{\rho}(t)}{1-\widetilde{\rho}(t)}}\tan\left(\frac{1}{2}\psi_i - \widetilde{\Psi}(t)\right)\right], \quad i = 1,\ldots,N, \qquad (17)$$

де ψ_i — константи, що задовольняють умови $\sum_{i=1}^{N}\cos\psi_i = \sum_{i=1}^{N}\sin\psi_i = 0$. Теорія стверджує, що множина констант ψ_i разом із розв'язками системи (16) описують розв'язки системи (9) за допомогою перетворення (17). У роботах [82, 83] показано, яким чином співвідносяться початкові умови $\widetilde{\rho}(0)$, $\widetilde{\Psi}(0)$, $\widetilde{\Phi}(0)$ та константи ψ_i нової системи з початковими умовами $\theta_i(0)$ оригінальної.

Незважаючи на всю красу та ефективність теорії Ватанабе – Строгатца, вона має певне обмеження у застосуванні, пов'язане з сингулярністю заміни змінних та умовами щодо ψ_i. Обмеження полягає у тому, що дана теорія не може бути застосованою на множині нульової міри, що включає в себе всі розв'язки, що відповідають кластерним станам $\theta_i = \theta_j$, $i \neq j$. Іншими словами Теорія Ватанабе – Строгатца може бути ефективно застосована лише всередині канонічних інваріантних областей $\mathcal{C}$. Оскільки особливі режими та їхні локальні біфуркації відбуваються саме на кластерних розв'язках, то виникла необхідність розробки альтернативної теорії, яка б доповнювала теорію Ватанабе – Строгатца та заповнювала її прогалини. У роботі [102], зокрема, було запропоновано методи дослідження, що полягають у переході від оригінальної системи до системи у фазових різницях і подальшому описі всіх можливих положень рівноваги та їхніх стійкостей та біфуркацій. Даний метод дозволив описувати не лише локальні біфуркації положень рівноваги, а й глобальні (появи гетероклінічних циклів), частиною яких вони є. Об'єднуючи обидві теорії, можна показати, що особливі режими системи Курамото – Сакагучі, записаної у фазових різницях, є такими:

Початок координат $\Phi_{\mathrm{sync}} = (0, \ldots, 0)$, що відповідає *режиму повної синхронізації* оригінальної системи Θ_{sync}, який є стійким при $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. При $\alpha = \pm\pi/2$ ця точка втрачає свою стійкість внаслідок N одночасних транскритичних біфуркацій. Параметри порядку $R(\Phi_{\mathrm{sync}}) = 1$.

$(N-3)$-вимірний *антифазний інваріантний многовид* $\mathcal{M}^{(N)}$, що *повністю складається з особливих точок*. Кожна точка многовиду є нейтрально стійкою у $N-2$ напрямках в середині самого многовиду для будь-яких α. У двох трансверсальних до многовиду напрямках вона є стійкою при $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Многовид втрачає свою стійкість внаслідок виродженої біфуркації Андронова – Хопфа при $\alpha = \pm\pi/2$. Параметр порядку $R(\mathcal{M}^{(N)}) = 0$.

Двокластерні стани $\Theta_{p,N-p}$, які для системи у фазових різницях належать одновимірним інваріантним многовидам, що описуються виразом

$$\mathcal{P}_2 = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \colon \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p \\ \neq \varphi_{p+1} = \varphi_{p+2} = \ldots = \varphi_{N-1} = 0,\ p = 1, \ldots, N-1\}. \tag{18}$$

Двокластерні стани є сідловими точками на інваріантних многовидах для довільних параметрів α та мають ізотропію $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$, $p \neq N/2$. Дані сідлові точки на вказаних многовидах мають координати

$$\varphi_j = \begin{cases} \overline{\varphi}(p,\alpha), & \alpha \in [0,\, \pi/2) \cup [\pi,\, 3\pi/2)\,, \\ -\overline{\varphi}(p,\alpha), & \alpha \in [\pi/2,\, \pi) \cup [3\pi/2,\, 2\pi)\,, \end{cases} \tag{19}$$

де

$$\overline{\varphi}(p,\alpha) = \arccos\left(-\frac{2p(N-p) + \big(N^2 - 2p(N-p)\big)\cos(2\alpha)}{N^2 + 2p(N-p)(\cos(2\alpha) - 1)}\right).$$

Параметр порядку двокластерного стану залежить від положення відповідної точки на многовиді і має вигляд

$$R(\mathcal{P}_2, \varphi_j) = \frac{1}{N}\sqrt{N^2 + 2p(p-N)(1 - \cos\varphi_j)},$$

а фаза середнього поля — відповідно $\psi = \psi(\mathcal{P}_2, \varphi_j) = \varphi_j/2$.

Інваріантний многовид з симетрією $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$ для системи з парною кількістю осциляторів, що складається повністю з особливих точок при критичних значеннях параметра

$\alpha = \pm\pi/2.$ Кожна точка многовиду є нейтрально стійкою всередині многовиду і сідловою у трансверсальних напрямках. Кожні дві симетричні сідлові точки формують гетероклінічні цикли, що складаються також зі стійких та нестійких одновимірних інваріантних многовидів цих сідел.

$(N-2)$-параметричні *множини граничних циклів*, що заповнюють канонічні інваріантні області $\mathcal{C}$ при $\alpha = \pm\pi/2$. Параметри порядків кожної з орбіт є змінними функціями $R = R(t) = R(\xi(t)) \in (0,1)$, де $\xi(t)$ є періодичною функцією, що відображає положення фазової точки на періодичній орбіті. Параметр порядку $R(t)$ залежить від амплітуди періодичної орбіти, яка у свою чергу, залежить від близькості до точок многовиду $\mathcal{M}^{(N)}$. $R(t)$ коливається близько до нуля, якщо орбіта знаходиться в околі точки з $\mathcal{M}^{(N)}$, і $R(t)$ може мати максимальні значення близькі до одиниці, у разі великих амплітуд і близькості частин орбіти до кластерних многовидів.

Неперервні *сім'ї гетероклінічних траєкторій* на границях інваріантних областей $\mathcal{C}$, що разом утворюють гетероклінічні цикли при $\alpha = \pm\pi/2$. Параметри порядку таких циклів також є функціями $R = R(t) \in (0,1]$. Значення 1 функція $R(t)$ досягає лише у точці Φ_{sync} найбільшого гетероклінічного циклу, який складається з N двокластерних інваріантних многовидів $\mathcal{P}_2$ і проходить через вказану вище точку (яка є у цей момент виродженим сідлом).

З описаного вище видно, що система не має жодних k-кластерів для $k \geq 3$. При $\alpha = \pm\pi/2$ відбуваються транскритичні біфуркації двокластерних сідел зі стійким (нестійким) вузлом, який перманентно знаходиться у початку координат (тобто відповідає синхронному режиму). Дані біфуркації змінюють стійкість синхронного режиму на протилежний. Одночасно з транскритичними біфуркаціями відбуваються вироджені біфуркації Андронова – Хопфа у точках антифазового многовиду $\mathcal{M}^{(N)}$, які також змінюють стійкість многовиду на протилежну. Біфуркація Андронова – Хопфа вироджена у даному випадку і не приводить до утворення граничних циклів після (чи до) біфуркації. Стійкості синхронного і антифазного режимів є протилежними при $\alpha \neq \pm\pi/2$. У моменти $\alpha = \pm\pi/2$, коли відбуваються одночасно дві вище згадані біфуркації, кожна з $(N-1)!$ інваріантних областей (12) цілком заповнена періодичними орбітами, а $(N-2)$-вимірні межі цих областей $\partial\mathcal{C}$ заповнені гетероклінічними траєкторіями, що разом утворюють гетероклінічні цикли. Отже, різні інваріантні регіони розділені між собою $(N-2)$-параметричними сім'ями гетероклінічних циклів.

3.3. Система з нелінійною функцією зв'язків. Розглянемо запропоноване А. Піковським та М. Розенблюмом узагальнення моделі Курамото – Сакагучі з нелінійним фазовим зсувом [47 – 49]. Тобто розглянемо системи (9) та (10) з функцією зв'язку

$$g(x-\alpha) = -\sin(x - \alpha(R,\beta)), \tag{20}$$

що має фазовий зсув α, який вже є не константою, а гладкою функцією, залежною від параметра порядку R та векторного параметра $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m),\ m \geq 1$. У згаданих роботах Піковського та Розенблюма було не лише обґрунтовано фізичну мотивацію застосування моделі саме такого типу, а і запропоновано узагальнення теорії Ватанабе – Строгатца для цієї системи. Згідно узагальненій теорії система з нелінійним фазовим зсувом також може бути редукована до тривимірної системи вигляду (16) разом з $N-3$ константами руху ψ_j. Очевидно, що редукована система залежна від нелінійного фазового зсуву $\alpha(R, \beta)$ має складнішу динаміку, ніж аналогічна редукція системи Курамото – Сакагучі. Також відмітимо, що теорія Піковського – Розенблюма працює як для скінченно-, так і для нескінченномірних систем. Як і для моделі Курамото – Сакагучі, дана модель має проблеми при застосуванні її на кластерних многовидах. Тому й система Піковського – Розенблюма вимагає додаткових досліджень за допомогою альтернативних методів. У роботі [102] було описано положення рівноваги системи у фазових різницях (10). Опираючись на цю роботу та результати теорії Ватанабе – Строгатца [47, 49, 83], опишемо всі можливі атрактори оригінальної системи (9), (20) та біфуркації переходів між ними.

Отже, дана система має такі атрактори:

Режим повної синхронізації $\Theta_{\rm sync}$, який є стійким при $\alpha(1, \beta) \in (-\pi/2 + 2\pi l,\ \pi/2 + 2\pi l)$, $l \in \mathbb{Z}$. Даний режим відповідає початку координат $\Phi_{\rm sync}$ системи у фазових різницях. При $\alpha(1, \beta) = \pm\pi/2$ точка $\Phi_{\rm sync}$ втрачає свою стійкість внаслідок одночасних транскритичних біфуркацій, що відбуваються вздовж інваріантних двокластерних многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p},\ p = 1, \ldots, [N/2] - 1$. У випадку парної кількості осциляторів $N = 2p$, разом з транскритичною біфуркацією відбувається вилкова біфуркація вздовж многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$.

Многовид $\mathcal{M}^{(N)}$ (6), що описує режим глобальної антифази. Відповідний інваріантний многовид для системи (10), (20) є $(N-3)$-вимірною множиною у фазовому просторі $\mathbb{T}^{N-1}$, яка цілком складається з положень рівноваги. Даний інваріантний многовид є нейтральним у $N-3$ внутрішніх для себе напрямках для будь-яких значень параметрів системи. Даний многовид є стійким у двох трансверсальних до себе напрямках, коли $\alpha(0, \beta) \in (\pi/2 + 2\pi l,\ 3\pi/2 + 2\pi l),\ l \in \mathbb{Z}$. У випадках, коли $\alpha(0, \beta) = \pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$, відбувається біфуркація Андронова – Хопфа одночасно у всіх точках многовиду. Внаслідок цієї біфуркації утворюються $(N-3)$-параметричні сім'ї (многовиди) граничних циклів (ілюстрації біфуркацій можна побачити на малюнках у [102]).

Двокластерні стани $\Theta_{p,N-p}$, що мають ізотропію $S_p \times S_{N-p},\ p \neq N/2$. В роботі [102] доведено, що будь-які k-кластери для $k \geq 3$ неможливі для цієї системи для довільних функцій $\alpha(R, \beta)$. Двокластерним станам $\Theta_{p,N-p}$ оригінальної системи (9) відповідають положення рівноваги системи (10), які знаходяться на одно-вимірних інваріантних многовидах $\mathcal{P}_2$ (18). Кількість положень рівноваги на кожному з таких многовидів залежить від кількості нулів функції $\alpha(R, \beta)$, коли змінні φ_i належать згаданому вище многовиду. Дані атрактори (положення рівноваги) з'являються та зникають внаслідок сідло-вузлових біфуркацій на вказаних многовидах, а також при транскритичних біфуркаціях двокластерних положень рівноваги зі синхронним положенням рівноваги у початку координат. У випадках парних розмірностей разом з транскритичними біфуркаціями відбуваються також вилкові біфуркації сідлових точок на одновимірних інваріантних многовидах, які мають симетрії $S_{N/2} \times S_{N/2}$. Дослідити стійкість та біфуркації всередині кожного з інваріантних многовидів $\mathcal{P}_2$ можна, використавши співвідношення (19) для конкретних значень функції $\alpha(R, \beta)$.

Гетероклінічні цикли системи (10), (20), які відповідають режиму довгострокової синхронізації кластерів з перемиканням. Гетероклінічні цикли (які можуть бути не лише стійкими) утворюються з сідлових двокластерних точок та їхніх одновимірних інваріантних многовидів. Гетероклінічні та гомоклінічні цикли у даної системи можуть бути трьох видів. Дані цикли можуть мати симетрію Z_N або $S_{N/2} \times S_{N/2}$ в залежності від базових сідлових точок. Під час згаданої транскритичної біфуркації точка Φ_{sync} є виродженим (напівстійким у кожному напрямку) сідлом і також базою для N симетричних гомоклінічних циклів (кожен такий цикл складається з точки Φ_{sync} та петлі, утвореної інваріантним многовидом $\varphi_i = 0,\ i \neq j$; оскільки фазовий простір є тором $\mathbb{T}^{N-1}$, то кожен описаний інваріантний многовид зв'язує точку Φ_{sync} саму з собою вздовж змінної φ_j: $W^u(\Phi_{\text{sync}}) = W^s(\Phi_{\text{sync}})$. Відмітимо, що під час біфуркацій при $\alpha(1,\beta) = \pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$, гетероклінічні цикли утворюють $(N-3)$-параметричні сім'ї у випадках $N \geq 4$.

Сім'ї періодичних орбіт для системи у фазових різницях, що утворюють є $(N-2)$-вимірні інваріантні многовиди у середині інваріантної області $\overline{C} \setminus \overline{\mathcal{M}}^{(N)}$. Кожна траєкторія є нейтрально-стійкою вздовж $N-3,\ N \geq 4$ напрямків всередині многовиду та може мати іншу стійкість у трансверсальному до многовиду напрямку. Позначимо $\mathcal{L}_s,\ \mathcal{L}_u$ та $\mathcal{L}_n$ відповідно стійкі, нестійкі та нейтральні у трансверсальному напрямку множини циклів. Існування даних траєкторій добре описуються згаданою теорією Ватанабе – Строгатца. При певних умовах, зокрема коли $\alpha(R,\beta) = \pm\pi/2$, *весь фазовий простір,* крім $(N-2)$-вимірних гіперплощин $\varphi_i = 0,\ \varphi_i = \varphi_j$ та інваріантного многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$, заповнений періодичними орбітами ($(N-2)$-вимірна сім'я орбіт заповнює $\mathbb{T}^{N-1}$). Залежно від функції $\alpha(R,\beta)$ сім'ї періодичних орбіт $\mathcal{L}$ з'являються та зникають за допомогою трьох основних типів біфуркацій: 1) біфуркація Андронова – Хопфа усіх точок інваріантного многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ у двох трансверсальних до цього многовиду напрямках при $\alpha(0,\beta) = \pm\pi/2$; 2) гетероклінічні біфуркації (кількох типів) на границі $\partial\overline{C}$ канонічної інваріантної області $\partial\overline{C}$, що приводить до появи (зникнення) гетероклінічного циклу або множини гетероклінічних циклів; 3) біфуркації граничних множин граничних циклів $\mathcal{L}_s,\ \mathcal{L}_u$ у середині інваріантної області $\overline{C}$ (найчастіше це сідло-вузлова біфуркація циклів, але може бути і їхня вилкова біфуркація).

Оскільки модель Піковського – Розенблюма є узагальненням моделі Курамото – Сакагучі, то, як показано вище, вона має більш складну динаміку. Ще раз коротко відмітимо особливості додаткової динаміки, яку отримує система, коли фазовий зсув перестає бути константою. Це: 1) поява великої кількості (в залежності від $\alpha(R,\beta)$) положень як стійких, так і нестійких точок на інваріантних двокластерних многовидах $\mathcal{P}_2$ (для $\alpha = \text{const}$ це лише одне сідло); 2) поява многовидів граничних циклів $\mathcal{C}$ у середині інваріантної області $\overline{C}$ (не лише множини періодичних орбіт, що заповнюють цю область і не лише при $\alpha = \pm\pi/2$); 3) поява гетероклінічних циклів різноманітної структури і при різних біфуркаціях (не лише при транскритичній/гетероклінічній біфуркації).

Детальний опис біфуркацій з наведенням фазових портретів та біфуркаційних діаграм для системи (9), (20) у випадку квадратичного нелінійного фазового зсуву $\alpha = \alpha(R,\beta) = \beta_1 + \beta_2 R^2$ можна знайти в роботах [47, 49, 102].

3.4. Система з двогармонічною функцією взаємодії. У пп. 3.2 описано динаміку моделі Курамото – Сакагучі, тобто випадок, коли функція зв'язку в системі (9) має лише одну гармоніку: $g(x) = -\sin(x-\alpha)$. Природно очікувати, що у випадку наявності інших гармонік у цієї функції динамічні та біфуркаційні властивості даної моделі стануть складнішими. Виявилося, що навіть при наявності другої гармоніки, тобто коли

$$g(x) = -\sin(x - \alpha) + r\sin(2x - \beta), \tag{21}$$

система (9) може мати велику різноманітність нових нетривіальних розв'язків [55, 64, 114, 115]. Ця система при $\beta = 0$ має назву моделі Гансела – Мато – Моньє (див. роботу [64, 105], де вона вперше детально досліджувалася). Навіть для малих розмірностей $N = 3, 4, 5$ система (9), (21) може показувати досить складну колективну динаміку [11, 99 – 101, 116]. Повний опис такої системи у випадку довільної кількості осциляторів досі залишається відкритою проблемою. Теорія Ватанабе – Строгатца вже не може бути застосована у даному випадку, на відміну від моделі Курамото – Сакагучі. Найпростішою суттєвою властивістю системи (9) при появі другої гармоніки (тобто при $r \neq 0$ у (21)) виявляється поява k-кластерних станів з $k \geq 3$ на відміну від системи з одно-гармонічною функцією $g(x)$, яка мала виключно двокластерні стани $\Theta_{p,N-p}$. Незважаючи на те, що завдяки симетрії перестановок $\mathbf{S}_N$ (що існує для системи з довільною $g(x)$), система у фазових різницях (10), (11) розділяється $(N-2)$-вимірними інваріантними многовидами $\varphi_i = 0$ та $\varphi_i = \varphi_j$ на $(N-1)!$ канонічних інваріантних областей $\overline{\mathcal{C}}$, внутрішні частини цих областей вже не є вільними від наявності особливих точок, як при $r = 0$. Дана особливість одразу ж спричиняє значну варіативність як локальних біфуркацій цих положень рівноваги, так і веде до значної кількості глобальних біфуркацій, що базуються на згаданих локальних. Наявність симетричних кластерних режимів, які можуть бути сідлами S_i при певних значеннях параметрів, та можливість з'єднання між ними за допомогою (також симетричних) одновимірних інваріантних многовидів $W^u(S_i) = W^s(S_j)$, приводить до утворення різних типів гетероклінічних циклів.

Далі ми опишемо декілька режимів, що є притаманними для системи з двогармонічним зв'язком.

Повна синхронізація Θ_{sync} (4), що відповідає початку координат Φ_{sync} системи у фазових різницях (10), (11). Даний режим є стійким при $g'(0) = 2r\cos\beta - \cos\alpha < 0$. Стійкість Φ_{sync} втрачає внаслідок одночасних транскритичних біфуркацій вздовж двокластерних інваріантних многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p}$, $p \neq N/2$, та вилкових біфуркацій вздовж двокластерних многовидів з ізотропією $\mathbf{S}_{N/2} \times \mathbf{S}_{N/2}$, коли система є парновимірною.

Режим рівномірного розподілу фаз Θ_{splay} (5). Даному режиму відповідають $(N-1)!$ положень рівноваги Φ_{splay} (14) системи (10), (11), кожне з яких знаходиться усередині окремої інваріантної області $\overline{\mathcal{C}}$. Даний режим є стійким, якщо

$$\sum_{j=1}^{N-1} g'\left(\frac{2\pi}{N}j\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2pj\pi}{N}\right)\right) < 0, \quad p = 1, \ldots, N-1,$$

і втрачає стійкість унаслідок біфуркацій Андронова – Хопфа.

Режим повної антифази $\mathcal{M}^{(N)}$ (6), який відповідає множині $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ для системи (10), (11). На відміну від системи Курамото – Сакагучі, дана множина не є інваріантною для довільних N при $r \neq 0$. Множина $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ цілком складається з положень рівноваги системи (10), (11) при $N = 2, 3$, вона є інваріантною множиною для $N = 4$ та в загальному випадку не інваріантною множиною для $N \geq 5$. Як уже зазначалося, $\Phi_{\mathrm{splay}} \subset \overline{\mathcal{M}}^{(N)}$.

Двокластерні режими $\Theta_{p,N-p}$, що відповідають $\Phi_{p,N-p}$ на одновимірних інваріантних многовидах $\mathcal{P}_2$ (18) для системи (10), (11). Біфуркації даних режимів можуть відбуватися як уздовж інваріантних многовидів $\mathcal{P}_2$, так і в трансверсальних до цих многовидів напрямках (на відміну від системи Курамото – Сакагучі). Біфуркаційні криві в цьому випадку описують досить складні співвідношення [101].

Багатокластерні режими можливі для $r \neq 0$. Дослідження наявності таких режимів є нетривіальною проблемою навіть для систем малих вимірностей [99, 101, 116].

Режими повільного перемикання між кластерами, що відповідають гетероклінічним циклам системи у фазових різницях (10), (11). Наявність великої кількості різноманітних гетероклінічних циклів є однією з основних особливостей даної системи. Поява та зникнення таких циклів відбувається за допомогою різних глобальних гетероклінічних біфуркацій або навіть ланцюжків таких біфуркацій. Серед інших біфуркацій відмітимо сідловузлову/гетероклінічну, $\mathbf{S}_N$ — транскритичну/гомоклінічну, $\mathbb{Z}_N$ — гетероклінічну, вилкову/гетероклінічну, сідло-зв'язну/гетероклінічну, транскритично-вилкову/гетероклінічну. Відмітимо, що стійка гетероклінічна траєкторія у системі зв'язаних елементів також може бути інтерпретованою як режим "гра без переможців" [55, 117, 118].

Багатопараметричні сім'ї гетероклінічних траєкторій. Дана система може також мати сім'ї гетероклінічних циклів, починаючи з вимірності $N = 3$, що знаходяться як на границях інваріантних областей $\overline{\mathcal{C}}$, так і всередині [99].

Періодичні та квазіперіодичні режими. Система у фазових різницях має періодичні орбіти усередині інваріантних областей $\overline{\mathcal{C}}$ системи у фазових різницях, що можуть відповідати також квазіперіодичним розв'язкам оригінальної системи при несумірності власних частот індивідуальних осциляторів з частотою середнього поля системи. Найбільш типовими біфуркаціями появи періодичних орбіт є біфуркації Андронова – Хопфа усередині інваріантних областей та різні гетероклінічні біфуркації, згадані вище. Граничні цикли "повторюють" структуру гетероклінічних циклів при невеликих змінах параметра після відповідної біфуркації і також до певної міри описують режими повільного перемикання.

Для більш детального ознайомлення з режимами повільного перемикання та хаотичними режимами, а також біфуркаційними переходами в симетричних осциляторних моделях з узагальненою функцією взаємодії можна звернутись до робіт [11, 55, 57, 67, 94, 103, 104, 119].

3.5. Система з парними та непарними зв'язками. Доволі детально можна описати динаміку системи (9) у випадках, коли функція зв'язку $g(x)$ має довільну кількість гармонік, але при цьому є парною або непарною. У випадку, коли $g(x)$ є *непарною*, система (9) стає *градієнтною* та має потенціал

$$V(\Theta) = -\frac{1}{2N} \sum_{k,j=1}^{N} h(\theta_k - \theta_j), \quad h'(x) = g(x).$$

У випадку, коли $g(x)$ є *парною*, система (9) є *бездивергентною*, тобто

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial F_j / \partial \theta_j) = 0,$$

де $F = (F_1, \ldots, F_N)$, $F_j = F_j(\Theta)$, є вектором правих частин системи (9). Крім того, система з парною функцією взаємодії є також *часово оборотною*. Нагадаємо, що інволюція $\mathcal{R}\colon \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^N$ є часово оборотною симетрією, якщо

$$\frac{d}{dt}\mathcal{R}(\Theta) = -F(\mathcal{R}(\Theta)),$$

тобто $\mathcal{R}$ відображає будь-який розв'язок у інший розв'язок цієї ж системи зі зворотнім напрямком фазового потоку [120, 121]. Система (9) має часово оборотну симетрію $\mathcal{R}$, де $\mathcal{R}(\Theta) = -\Theta,\ t \mapsto -t$. Часово оборотна симетрія не пропадає при переході до системи у фазових різницях (10). Фіксований підпростір часово оборотної симетрії має вигляд $\mathbf{Fix}\mathcal{R} = \left\{\Theta \in \mathbb{T}^N\colon \mathcal{R}\Theta = \Theta\right\}$. Часово оборотна симетрія $\mathcal{R}$ разом симетрією перестановок $\mathbf{S}_N$ визначають структуру фазового простору та дозволяють описати загальні властивості траєкторій системи. У випадку парної функції зв'язку система (9) має Гамільтоновоподібну структуру фазового простору. Система трьох осциляторів $N = 3$ має перший інтеграл $V(\theta) = h(\theta_1 - \theta_2) + h(\theta_2 - \theta_3) + h(\theta_3 - \theta_2)$. Ми припускаємо, що дана система має перші інтеграли у подібному випадку і для $N \geq 4$. Більш детально динаміка глобально зв'язаних систем з парними та непарними функціями взаємодії розглянута у роботах [3, 55, 80, 101, 103].

3.6. Осциляторна модель з притягувальними та відштовхувальними зв'язками. Як зазначалося вище, стандартна МК (з $g(x) = -\sin(x)$) глобально зв'язаних ідентичних осциляторів має лише один атрактор при додатній силі зв'язку: $K > 0$. Ця ж система має репелером $(N-2)$-вимірний інваріантний многовид $\mathcal{M}^{(N)}$. Останнє говорить про те, що МК буде мати атрактором саме многовид $\mathcal{M}^{(N)}$ при негативних значеннях сили зв'язку: $K < 0$. Отже, при $K > 0$ всі осцилятори прагнуть синхронізуватися (з параметром порядку $R = 1$), і такі зв'язки ми називаємо *притягувальними*. При $K < 0$ всі осцилятори прагнуть розташуватися по колу таким чином, щоб утворити глобальний антифазовий стан (з $R = 0$), і такі зв'язки ми називаємо *відштовхувальними*. Х. Даідо запропонував осциляторну модель, яка має одночасно притягувальні та відштовхувальні зв'язки [122]. Дану модель детально проаналізовано в роботах Х. Хонг та С. Строгатца [61, 123]. Відмітимо також роботи [124 – 127], де також розглядалася колективна динаміка в осциляторних моделях із двома типами взаємодії. Х. Хонг та С. Строгатц наводять дотепну соціологічну інтерпретацію своєї моделі. Вони розділяють множину всіх осциляторів на дві групи: 1) *конформістів*, які прагнуть синхронізуватися між собою, а також примусити синхронізуватися з ними осциляторів іншої групи (з $R = 1$) та 2) *нонконформістів*, які прагнуть досягти стану глобальної антифази (з $R = 0$) або, принаймні, поставити свою групу в протифазу до іншої групи.

Ми розглянемо узагальнення моделі, наведеної в зазначених вище роботах, а саме розглянемо модель із фазовим зсувом $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Позначимо через $\mathcal{H}_1$ множину осциляторів-конформістів, яка складається з N_1 елементів, а через $\mathcal{H}_2$ — множину осциляторів-нонконформістів, яка складається з $N_2 = N - N_1$ елементів. Ми припускаємо, що кожна з множин $\mathcal{H}_i$ є непорожньою, тобто $N_1 > 0,\ N_2 > 0$. Без обмеження загальності (внаслідок симетрії перестановок) осцилятори субпопуляції $\mathcal{H}_1$ можуть бути проіндексовані як $\{1, 2, \ldots, N_1\} = J_1$, а осцилятори субпопуляції $\mathcal{H}_2$ можуть бути проіндексовані як $\{N_1 + 1, \ldots, N\} = J_2$. Модель ідентичних осциляторів із притягувальними та відштовхувальними елементами та фазовим зсувом має вигляд [128]

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega - \frac{K_1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_1, \tag{22}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega - \frac{K_2}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i \in J_2, \tag{23}$$

де $K_1 > 0$, $K_2 < 0$. Тобто частина рівнянь системи (22) з притягувальною взаємодією описує динаміку конформістів, а інша частина (23) з відштовхуючою взаємодією описує динаміку нонконформістів. Осцилятори у даній моделі є ідентичними вже умовно, оскільки перестановки осциляторів можливі лише всередині кожної з множин $\mathcal{H}_i$. Використовуючи теорію Ватанабе – Строгатца [47, 49] та анзац Отта – Антонсена [60], Х. Хонг та С. Строгатц створили теорію, що дозволяє *систему великої кількості осциляторів* із взаємодією двох типів (без фазового зсуву: $\alpha = 0$) звести спочатку до системи з шести рівнянь, а при подальшому переході до термодинамічної границі — й до системи з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{dr_1}{dt} &= c(1 - r_1^2)(q_1 r_1 + q_2 r_2 \cos\delta), \\
\frac{dr_2}{dt} &= -(1 - c)(1 - r_2^2)(q_1 r_1 \cos\delta + q_2 r_2), \\
\frac{d\delta}{dt} &= \sin\delta \left[q_1(1 - c)\left(\frac{r_1}{r_2} + r_1 r_2\right) + q_2 c \left(\frac{r_2}{r_1} + r_1 r_2\right)\right],
\end{aligned}$$

де $q_1 = N_1/N$ та $q_2 = N_2/N$ — відносні фракції осциляторів двох типів, $c = K_1/(K_1 - K_2)$ — відносна інтенсивність зв'язку конформістів, а змінними є два часткові параметри порядку r_s (амплітуди середніх полів груп $\mathcal{H}_s$):

$$z_s = r_s e^{\imath\psi_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{j \in J_s} e^{\imath\theta_j}, \quad s = 1, 2,$$

та різниця фаз середніх полів $\delta = \psi_1 - \psi_2$. Важливим для розуміння співвідношень між конформістами та нонконформістами є співвідношення між глобальними та локальними параметрами порядку: $Z = q_1 z_1 + q_2 z_2$. Використовуючи цю редукцію, автори зазначеної вище теорії показали існування чотирьох стійких динамічних режимів, які будуть описані далі. Теорія розрахована на нескінченну кількість осциляторів і не враховує деякі особливості скінченновимірних систем. Тому для доповнення даної теорії було запропоновано альтернативний метод дослідження [128], що дозволив показати існування ще двох стійких режимів (один є частковим випадком іншого з певними особливостями) у скінченновимірному випадку, а інші результати якого цілком узгоджуються з теорією Хонга – Строгатца. Даний метод полягає в редукції системи до фазових змінних, дослідженні стаціонарних та нестаціонарних режимів цієї системи та їхніх біфуркацій. Також даний метод дозволяє отримувати результати для ненульового фазового зсуву α. Використовуючи обидві теорії, ми наведемо кілька результатів.

Систему (22), (23) можна редукувати за допомогою фазових різниць (2) до системи

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha) -$$

$$- \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha), \qquad i = 1, \ldots, N_1 - 1, \tag{24}$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -k\sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\varphi_j - \alpha)$$

$$- k \sum_{j=1, j\neq i}^{N-1} \sin(\varphi_i - \varphi_j + \alpha) - (k-1)\sin\alpha, \qquad i = N_1, \ldots, N-1, \tag{25}$$

де $k = K_2/K_1$ — новий параметр. Система (22), (23) має два типи природних інваріантних многовидів

$$\mathcal{P}^1_{i,j} = \{(\theta_1, \ldots, \theta_N)\colon \theta_i = \theta_j\}, \quad i, j \in J_1, \quad i \neq j,$$

$$\mathcal{P}^2_{i,j} = \{(\theta_1, \ldots, \theta_N)\colon \theta_i = \theta_j\}, \quad i, j \in J_2, \quad i \neq j,$$

що відповідають кластерам довільної кількості осциляторів першої чи другої групи між собою. Можна легко переконатись, що осцилятори з різних груп $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ не будуть утворювати кластерів і, отже, відповідних інваріантних многовидів не існує. З останнього випливає також те, що оригінальна система (22), (23), а також і відповідна редукована система (24), (25), не будуть мати канонічних інваріантних областей вигляду (12). Точніше, на відміну від систем глобально зв'язаних ідентичних осциляторів зі спільною силою взаємодії K, фазовий простір яких розділений на замкнуті області, фазовий простір системи (24), (25) також розділений на інваріантні області за допомогою інваріантних гіперплощин $\varphi_i = 0$ або $\varphi_i = \varphi_j$, але ці області вже не є обмеженими у всьому фазовому просторі. Як зазначалося раніше, всі розв'язки систем у фазових різницях, описані у попередніх підпунктах, є *фазово замкнутими*. Розв'язки ж системи (24), (25) не обов'язково повинні бути фазово замкнутими. Наприклад, періодичні траєкторії даної системи можуть бути як гомотопічні нулю у просторі $\mathbb{T}^{N-1}$, так і ні.

Інша властивість системи Курамото – Сакагучі зберігається для даної моделі. А саме, система (22), (23) має інваріантний многовид $\mathcal{M}^{(N)}$, а система (24), (25) — інваріантний многовид $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$, що цілком складається з особливих точок. Остання властивість зберігається для обох параметрів α, k. Також у роботі [128] показано, що система (24), (25) для $\alpha = 0$ довільних параметрів k, за винятком $k = 0$ та $k = -N_2/N_1$, має положення лише двох типів: 1) точки згаданого многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$ та 2) точки $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, що мають координати виключно 0 або π. Не всі точки з обох наведених множин 1), 2) є стійкими. Деякі з них можуть бути стійкими при певних значеннях параметра k, інші не будуть такими при будь-яких значеннях цього параметра. Далі опишемо всі можливі стійкі режими (стаціонарні та нестаціонарні) взаємодії осциляторів двох груп:

π-стан. Це режим протистояння в антифазі конформістів та нонконформістів, для яких $r_1 = r_2 = 1$, $\delta = \pi$. Даний стан є стійким при одночасному виконанні умов:

$k < -N_2/N_1,\ N_1 > N_2,\ N \geq 3$. З другої умови бачимо, що даний режим є стійким лише при перевазі конформістів над нонкоформістами, проте залучити їх на свою сторону перші не можуть.

Некогерентний стан. Режим, який відповідає антифазам обох груп осциляторів: $r_1 = r_2 = 0$. Очевидно, що даний режим є повною перемогою нонконформістів, оскільки загальний параметр порядку R також є нульовим. Положення рівноваги, що належать до даного режиму, складають разом $(N-3)$ інваріантний многовид, що є підмноговидом $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$. Усі точки даного многовиду є нейтральними в його середині та мають різні вимірності у двох трансверсальних напрямках. Отже, існує певний інтервал параметричних значень $[k_{\min}(\Phi), k_{\max}(\Phi)]$, залежний від локалізації окремої точки у фазовому просторі, що визначає її стійкість. Очевидними двома підмножинами даного режиму також є випадки, коли в системі наявні лише нонконформісти ($N_2 = N$) та система парної вимірності має однакову кількість конформістів та нонконформістів ($N_1 = N_2,\ r_1 = r_2 = 1,\ \delta = \pi$).

Розмитий π-стан. Режим, що відповідає протистоянню груп конформістів та нонконформістів у протифазі, але без чіткої синхронізації елементів кожної групи між собою. Точніше, для даного стану $\delta = \pi,\ N_1 r_1 = N_2 r_2$. З наведених рівностей випливає, що $R = 0$, і отже, даний стан також є підмножиною многовиду $\overline{\mathcal{M}}^{(N)}$. Як і в попередньому випадку, стійкість кожної точки, що презентує даний режим, є індивідуальною і залежить від положення цієї точки у просторі.

Ренегатний режим. Режим антифазного протистояння синхронізованих усіх конформістів з майже всіма нонконформістами, крім одного нонконформіста-ренегата, що “перейшов на протилежну сторону”. Формально даний режим описується так: $r_1 = 1,\ r_2 = (N_2 - 2)/N_2,\ \delta = \pi$. При цьому $R = (N_1 - N_2 + 2)/N = 2n_1 - 1 - 2/N$. З останнього виразу видно, що він містить число осциляторів N (на відміну від попередніх режимів), що це вказує на існування ренегатного режиму лише для скінченної кількості елементів. Даний режим є стійким при виконанні умов

$$k \in \left(-\frac{N_2}{N_1} - \frac{N_2 - 2}{N_2}\right) \quad \text{для} \quad 2 \leq N_2 \leq N_1 + \frac{1 - (-1)^N}{2}.$$

Зауважимо, що режими, коли два чи більше нонконформістів синхронізуються з конформістами, є нестійкими, а точніше вони є сідловими точками системи (24), (25).

Повна синхронізація. Даний режим можливий у двох випадках: 1) система має лише конформістів ($N_1 = N$), 2) система має лише одного нонконформіста ($N_2 = 1,\ r_1 = R = 1,\ \delta = 0$). Другий випадок є підмножиною станів попереднього пункту, але при повній синхронізації. В обох випадках даний стан є стійким при $k > \overline{k}$, коли біфуркаційне значення залежить від кількості осциляторів:

$$\overline{k} = \begin{cases} 0, & N_1 = 1, \ldots, N-2, \\ -\dfrac{1}{N-1}, & N_1 = N-1, \\ -\infty, & N_1 = N. \end{cases}$$

Біжучі хвилі. Даний режим не є стаціонарним на відміну від попередніх чотирьох. Це стан, при якому всі конформісти є синхронізованими ($r_1 = 1$), а положення нонконформістів змінюється з часом (локальний параметр порядку $r_2 = r_2(t)$ не є постійним). При даному режимі, очевидно, від часу залежатимуть і глобальний параметр порядку $R = R(t)$, і кут між середніми фазами $\delta = \delta(t)$. Даний режим відповідає існуванню стійких фазово незамкнутих траєкторій системи (24), (25). Крім того, такі траєкторії можуть бути періодичними, квазіперіодичними або хаотичними (при $N \geq 4$).

Динаміка системи (22), (23) суттєво ускладнюється при наявності фазового зсуву $\alpha \neq 0$ [128]. Наявність фазового зсуву приводить до виникнення нових стаціонарних та нестаціонарних колективних режимів. Відзначимо лише декілька з них.

Режим взаємного обертання двох синхронних кластерів конформістів (з $r_1 = 1$) та нонконформістів (з $r_2 = 1$) з вільним кутом між ними $\delta = \delta(t)$. Даний стан описує двокластерні обертальні хвилі і є можливим при наявності принаймні двох конформістів та двох нонконформістів.

Режими з повільним перемиканням. Такі режими представлені різними негомотопічними нулю гомоклінічними та гетероклінічними траєкторіями.

Багатовимірні множини *нейтральних періодичних орбіт та гетероклінічних циклів*, що є можливими лише при $\alpha = \pm\pi/2$.

Режими без повної синхронізації конформістів з $r_1 = r_1(t)$, що задаються фазово незамкнутими атракторами системи (24), (25).

Система має багато біфуркаційних ліній корозмірності 1 у площині параметрів (α, k). Система (24), (25) має всі можливі локальні біфуркації (сідло-вузлову, транскритичну, вилкову, Андронова – Хопфа), а також різноманітні біфуркації утворення граничних та гетероклінічних циклів. У даному випадку й граничні, й гетероклінічні цикли можуть бути як фазово замкнутими, так і ні. Біфуркації моделі Хонга – Строгатца (при $\alpha = 0$) завжди відповідають біфуркаційним точкам корозмірності 2 у (α, k)-площині незалежно від кількості осциляторів у групах. Особливо слід відмітити випадок $\alpha = \pm\pi/2$, коли система показує гамільтоновоподібну динаміку. В даному випадку система має додаткові часово-реверсивні симетрії та може мати (при $N \geq 4$) консервативний хаос, подібний до ABC-потоків [129, 130]. Також слід зазначити чутливість системи до збурень фазового зсуву α від нульового положення, коли стійкі режими моделі Хонга – Строгатца руйнуються та з'являються режими нових типів [128].

У даному підпункті було розглянуто систему, зв'язки в якій можна представити матрицею $K = (K_{ij})_{i,j=1}^{N}$, де $K_{ij} = K_1 > 0$ при $i = 1, \ldots, N_1$ та $K_{ij} = K_2 < 0$ при $i = N_1 + 1, \ldots, N$. Природнім узагальненням даної ситуації є система з матрицею зв'язків, яка є більш загальною і має рядки однакових елементів: $K_{ij} = K_i$, $i = 1, \ldots, N$ (подібні системи розглядаються, зокрема, в [131, 132]). Тоді можна називати конформістами осцилятори, дія на які інших осциляторів є позитивною ($K_i > 0$), а конформістами — осцилятори з такою ж негативною дією. Динаміка даної системи звичайно є складнішою за (22), (23), але зберігає багато властивостей, описаних вище. Зокрема відповідна система у фазових різницях при $\alpha = 0$ має всі ті ж положення рівноваги, що й система (24), (25). Отже, використовуючи методи, наведені и [61, 123, 128], можна досить повно описати колективні режими даної системи.

4. Дискусія. У даній роботі представлено короткий огляд досліджень явища синхронізації у природознавстві та наведено мотивацію появи математичних моделей, що описують дане явище. МК зв'язаних фазових осциляторів є найбільш простою математичною системою, що не лише дозволяє описувати дуже складну та різноманітну динаміку взаємодії між зв'язаними елементами, а й описувати таку взаємодію, використовуючи строгу математичну термінологію. МК можна вважати відправною точкою до дослідження багатьох складніших природничих моделей (таких як, зокрема, динамічні мережі нейронів Ходжкіна – Хакслі). В даній роботі описано деякі результати відносно різних типів колективної динаміки та біфуркаційних переходів між різними режимами для мереж фазових осциляторів, що мають симетрії індивідуальних вузлів, графів та функцій взаємодії між елементами. Було показано, яким чином тип функції взаємодії між елементами впливає на наявність та утворення різноманітних синхронних режимів і яким чином наявність певної кількості гармонік, параметрів та симетрій даної функції спричиняє появу тих чи інших біфуркацій.

Незважаючи на велику кількість досліджень (повний список робіт, пов'язаний з дослідженнями подібних моделей, є в декілька разів більшим, ніж представлено в даній роботі) багато важливих питань дослідження колективної динаміки моделей типу Курамото залишаються відкритими в загальному випадку. Наведемо декілька з них.

1. Повний опис моделі глобально зв'язаних ідентичних фазових осциляторів вигляду (9) для функції взаємодії $g(x)$, що має довільну кількість гармонік у розкладі в ряд Фур'є.

2. Знаходження інтегралів руху системи (9) для парних функцій $g(x)$ з довільною кількістю гармонік. Опис сімей періодичних, квазіперіодичних, гетероклінічних та хаотичних траєкторій для цієї системи.

3. Опис інваріантних множин та розв'язків неглобально зв'язаних систем, але з різними симетріями у графах взаємодії між елементами, тобто для різних симетричних матриць взаємодії $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$.

4. Опис різних синхронних режимів, а також дерев біфуркаційних переходів між різними режимами фазової синхронізації при різних симетричних розподілах власних частот ω_i та варіаціях сили/сил зв'язку.

5. Питання, розглянуті в попередніх пунктах, для нескінченновимірних систем, отриманих при термодинамічних переходах.

Ми навели найпростіші та очевидні постановки проблем, пов'язаних з дослідженням фазових осциляторів. Дані проблеми часто приводять до виявлення нових та дуже цікавих явищ (як, наприклад, режими з повільним перемиканням чи химерні стани) або до нових глибоких математичних теорій (як теорії Ватанабе – Строгатца чи Отта – Антонсена).

Результати, описані в даній частині огляду, дають часткову відповідь на проблеми, описані в пп. 1, 2.

У другій частині роботи буде дано часткову відповідь на проблеми, описані в п. 3, тобто розглядатимуться певні явища колективної поведінки у неглобальних мережах зв'язаних ідентичних осциляторів курамотівського типу. Буде показано, яким чином архітектура зв'язків між елементами мережі (яка вже буде не глобальною, а отже, більш різноманітною) приводить до появи тих чи інших колективних динамічних режимів.

Література

1. *Huygens Ch. (Hugenii).* Horologium oscillatorium (in French). – Parisiis (France): Apud F. Muguet, 1673. – ***English translation:*** Ames: Iowa State Univ. Press, 1986.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
3. *Brown E., Holmes P., Moehlis J.* Globally coupled oscillator networks. In perspectives and problems in nonlinear science: a celebratory volume in honor of Lawrence Sirovich. – New York: Springer, 2003. – P. 183 – 215.
4. *Winfree A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // J. Theoret. Biol. – 1967. – **16**(**1**). – P. 15 – 42.
5. *Winfree A. T.* The geometry of biological time. – New York: Springer, 2001.
6. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators / H. Araki (ed.). Mathematical Problems in Theoretical Physics // Lect. Notes Phys. – 1975. – **39**. – P. 420 – 422.
7. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. – Berlin: Springer, 1984.
8. *Strogatz S. H.* Sync: the emerging science of spontaneous order. – Hyperion Press, 2003.
9. *Correaa D. P. F., Wulff C., Piqueira J. R. C.* Symmetric bifurcation analysis of synchronous states of time-delayed coupled phase-locked loop oscillators // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2015. – **22(1-3)**. – P. 793 – 820.
10. *Hauptmann C., Omel'chenko O., Popovych O. V., Maistrenko Yu., Tass P. A.* Control of spatially patterned synchrony with multisite delayed feedback // Phys. Rev. E. – 2007.
11. *Kori H., Kuramoto Y.* Slow switching in globally coupled oscillators: robustness and occurrence through delayed coupling // Phys. Rev. E. – 2001.
12. *Nakamura Y., Tominaga F., Munakata T.* Clustering behavior of time-delayed nearest-neighbor coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 1994. – **49**(**6**). – P. 4849 – 4856.
13. *Schuster H. G., Wagner P.* Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling // Progr. Theor. Phys. – 1989. – **81**(**5**). – P. 939 – 945.
14. *Triplett B. I., Klein D. J., Morgansen K. A.* Discrete time kuramoto models with delay. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2006. – P. 9 – 23.
15. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcations in phase oscillator networks with a central element // Phys. D. – 2012. – **241**(**12**). – P. 1072 – 1089.
16. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Synchronization in a neural network of phase oscillators with the central element // Biol. Cybernet. – 1994. – **71**(**2**). – P. 177 – 185.
17. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Dynamics of neural networks with a central element // Neural Netw. – 1999. – **12**(**3**). – P. 441 – 454.
18. *Kromer J. A., Schimansky-Geier L., Neiman A. B.* Emergence and coherence of oscillations in star networks of stochastic excitable elements // Phys. Rev. E. – 2016. – **93**. – 042406.
19. *Vlasov V., Pikovsky A., Macau E. E. N.* Star-type oscillatory networks with generic Kuramoto-type coupling: a model for "Japanese drums synchrony" // Chaos. – 2015. – **25**(**12**). https://doi.org/10.1063/1.4938400
20. *Kitajima H., Kurths J.* Bifurcation in neuronal networks with hub structure // Phys. A. – 2009. – **388**(**20**). – P. 4499 – 4508.
21. *Kitajima H., Yoshihara T.* Cluster synchronization in coupled systems with hub structure // Phys. D. – 2012. – **241**. – P. 1804 – 1810.

22. *Schmidt R., La Fleur K. J., de Reus M. A., van den Berg L. H., van den Heuvel M. P.* Kuramoto model simulation of neural hubs and dynamic synchrony in the human cerebral connectome // BMC Neurosci. – 2015. – **16(54)**.

23. *Vlasov V., Bifone A.* Hub-driven remote synchronization in brain networks // Sci. Rep. – 2017. – **7(1)**. – 10403.

24. *Maistrenko Yu. L., Lysyansky B., Hauptmann C., Burylko O., Tass P. A.* Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity // Phys. Rev. E. – 2007. – **75**. – 066207.

25. *Popovych O. V., Yanchuk S., Tass P. A.* Self-organized noise resistance of oscillatory neural networks with spike timing-dependent plasticity // Sci. Rep. – 2013. – **3**. – 2926.

26. *Seliger P., Young S. C., Tsimring L. S.* Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. – 2002. – **65**. – 041906.

27. *Burylko O., Kazanovich Ya., Borisyuk R.* Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation // Sci. Rep. – 2018. – **8(1)**. – 416 p.

28. *Kasatkin D., Yanchuk S., Schöll E., Nekorkin V.* Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings // Phys. Rev. E. – 2017. – **96**. – 062211.

29. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Reaction times in visual search can be explained by a simple model of neural synchronization // Neural Netw. – 2017. – **87**. – P. 1 – 7.

30. *Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Yu., Mosekilde E.* Phase chaos in the discrete Kuramoto model // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2010. – **20(6)**. – P. 1811 – 1823.

31. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Modern Phys. – 2005. – **77**. – P. 137 – 185.

32. *Crawford J. D., Davies K. T. R.* Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings // Phys. D. – 1999. – **125(1)**. – P. 1 – 46.

33. *Montbrió E., Pazó D.* Shear diversity prevents collective synchronization // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106(25)**. – 254101.

34. *Pazó D.* Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // Phys. Rev. E. – 2005. – **72**. – 046211.

35. *Strogatz S. H.* From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators // Phys. D. – 2000. – **143(1-4)**. – P. 1 – 20.

36. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2004. – **93**. – 174102.

37. *Burylko O., Mielke A., Wolfrum M., Yanchuk S.* Coexistence of Hamiltonian-like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew-symmetric coupling // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2018. – **17(3)**. – P. 2076 – 2105.

38. *Ermentrout G. B., Kopell N.* Frequencyplateaus in a chain of weakly coupledoscillator // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – **15**. – P. 215 – 237.

39. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in non locally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2002. – **5(4)**. – P. 380 – 385.

40. *Omelchenko I., Maistrenko Yu., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106**. – 234102.

41. *Pikovsky A., Rosenau P.* Phase compactons // Phys. D. – 2006. – **218(1)**. – P. 56 – 69.

42. *Ren L., Ermentrout B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Phys. D. – 2000. – **143(1-4)**. – P. 56 – 73.

43. *Topaj D., Pikovsky A.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // Phys. D. – 2002. – **170(2)**. – P. 118 – 130.

44. *Holder A. B., Zuparic M. L., Kalloniatis A. C.* Gaussian noise and the two-network frustrated Kuramoto model // Phys. D. – 2017. – **341**. – P. 10 – 32.

45. *Stiller J. C., Radons G.* Dynamics of nonlinear oscillators with random interactions // Phys. Rev. E. – 1998. – **58**. – P. 1789 – 1799.

46. *Töonjes R.* Synchronization transition in the Kuramoto model with colored noise // Phys. Rev. E. – 2010. – **81**. – 055201.

47. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators // Phys. D. – 2009. – **238(1)**. – P. 27 – 37.

48. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables // Phys. D. – 2011. – **240(9-10)**. – P. 872 – 881.

49. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling // Phys. Rev. Lett. – 2007. – **98**. – 064101.

50. *Pyragas K., Popovych O. V., Tass P. A.* Controlling synchrony in oscillatory networks with a separate stimulation-registration setup // Europhys. Lett. – 2007. – **80(4)**. – 40002.

51. *Timme M.* Revealing network connectivity from response dynamics // Phys. Rev. Lett. – 2007. – **98(22)**. – 224101.

52. *Belykh V., Bolotov M., Osipov G.* Kuramoto phase model with inertia: bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos // Model. Anal. Inform. Sist. – 2015. – **22(5)**. – P. 595 – 608.

53. *Ji P., Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A., Kurths J.* Low-dimensional behavior of Kuramoto model with inertia in complex networks // Sci. Rep. – 2014. – **4**. – 4783.

54. *Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A.* Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia // Phys. Rev. E. – 2014. – **90**. – 042905.

55. *Ashwin P., Coombes S., Nicks R.* Mathematical frameworks for oscillatory network dynamics in neuroscience // J. Math. Neurosci. – 2016. – **6(2)**. – P. 1 – 92.

56. *Sakaguchi H., Kuramoto Y.* A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment // Prog. Theor. Phys. – 1986. – **76(3)**. – P. 576 – 581.

57. *Ashwin P., Field M.* Heteroclinic networks in coupled cell systems // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1999. – **148**. – P. 107 – 43.

58. *Delabays R., Jacquod P., Dörfler F.* The kuramoto model on oriented and signed graphs // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2019. – **18(1)**. – P. 458 – 480.

59. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: a survey // Automatica. – 2014. – **50(6)**. – P. 1539 – 1564.

60. *Ott E., Antonsen T. M.* Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. – 2009. – **19**. – 023117.

61. *Hong H., Strogatz S. H.* Conformists and contrarians in a Kuramoto model with identical natural frequencies // Phys. Rev. E. – 2011. – **84**. – 046202.

62. *Hong H., Strogatz S. H.* Mean-field behavior in coupled oscillators with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. – 2012. – **85**. – 056210.

63. *Afraimovich V., Ashwin P., Kirk V.* Robust heteroclinic and switching dynamics // Dyn. Syst. – 2010. – **25(3)**. – P. 285 – 286.

64. *Hansel D., Mato G., Meunier C.* Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. – 1993. – **48(5)**. – P. 3470 – 3477.

65. *Tachikawa M.* Specific locking in populations dynamics: Symmetry analysis for coupled heteroclinic cycles // J. Comput. Appl. Math. – 2007. – **201(2)**. – P. 374 – 380.

66. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2006. – **16(1)**. – P. 21 – 37.

67. *Arenas A., Diaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.* Synchronization in complex networks // Phys Rep. – 2008. – **469(3)**. – P. 93 – 153.

68. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D. L., Zhou C. S.* The synchronization of chaotic systems // Phys. Rep. – 2002. – **366(1-2)**. – P. 1 – 102.

69. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwanga D.-U.* Complex networks: structure and dynamics // Phys. Rep. – 2006. – **424(4-5)**. – P. 175 – 308.

70. *Daido H.* Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function // Phys. D. – 1996. – **91**. – P. 24 – 66.

71. *Ermentrout B., Kopell N.* Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators // J. Math. Biol. – 1991. – **29**. – P. 195 – 217.

72. *Gómez-Gardeñes J., Zamora-López G., Moreno Y., Arenas A.* From modular to centralized organization of synchronization in functional areas of the cat cerebral cortex // PLOS One. – 2010. – **5(8)**. – e12313.

73. *Rodrigues F. A., Peron T. K. DM., Ji P., Kurths J.* The Kuramoto model in complex networks // Phys. Rep. – 2016. – **610**. – P. 1 – 98.

74. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // Nature. – 2001. – **410**. – P. 268 – 276.

75. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: from simple to complex // Springer Series in Synergetics. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

76. *Blekhman I. I.* Synchronization of dynamical systems. – Nauka: Moscow, 1971 (in Russian).

77. *Glass L., Mackey M. C.* From clocks to chaos: the rhythms of life. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1988.

78. *Hoppensteadt F. C., Izhikevich E. M.* Weakly connected neural networks // Appl. Math. Sci. – New York: Springer-Verlag, 1997. – **126**.

79. *Izhikevich E. M.* Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge, MA: MIT Press, 2007.

80. *Ashwin P., Swift J. W.* The dynamics of n weakly coupled identical oscillators // J. Nonlin. Sci. – 1992. – **2**. – P. 69 – 108.

81. *Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems // Appl. Math. Sci. – New York: Springer-Verlag, 2007. – **59**.

82. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Integrability of a globally coupled oscillator array // Phys. Rev. Lett. – 1993. – **70(16)**.

83. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Constants of motion for superconducting Josephson arrays // Phys. D. – 1994. – **74(3-4)**. – P. 197 – 253.

84. *Wiesenfeld K., Swift J. W.* Averaged equations for Josephson junction series arrays // Phys. Rev. E. – 1995. – **51(2)**. – P. 1020 – 1025.

85. *Wojcik J., Schwabedal J., Clewley R., Shilnikov A.* Key bifurcations of bursting polyrhythms in 3-cell central pattern generators // PLOS One. – 2014. – **9(4)**. – e92918.

86. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. – 1996. – **76(11)**. – P. 1804 – 1807.

87. *Aguiar M. A. D.* Is there switching for replicator dynamics and bimatrix games? // Phys. D. – 2011. – **240**. – P. 1475 – 1488.

88. *Ashwin P., Postlethwaite C.* Quantifying noisy attractors: from heteroclinic to excitable networks // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2016. – **15(4)**. – P. 1989 – 2016.

89. *Kirst C., Timme M.* From networks of unstable attractors to heteroclinic switching // Phys. Rev. E. – 2008. – **78**. – 065201.

90. *Schittler Neves F., Timme M.* Computation by switching in complex networks of states // Phys. Rev. Lett. – 2012. – **109**. – 018701.

91. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization of chaotic systems // Chaos. – 2015. – **25**. – 097611.

92. *Peil M., Heil T., Fischer I., Elsäer W.* Synchronization of chaotic semiconductor laser systems: a vectorial coupling-dependent scenario // Phys. Rev. Lett. – 2002. – **88**. – 174101.

93. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos. – 2015. – **25(1)**. – 013106.

94. *Bick C., Ashwin P., Rodrigues A.* Chaos in generically coupled phase oscillator networks with nonpairwise interactions // Chaos. – 2016. – **26**. – 094814.

95. *Thoubaan M., Ashwin P.* Existence and stability of chimera states in a minimal system of phase oscillators // Chaos. – 2018. – **28**. – 103121.

96. *Anishchenko V., Strelkova G.* Chimera structures in the ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators // Radiophys. Quantum Electron. – 2019. – **61**. – P. 659 – 671.

97. *Bick C., Ashwin P.* Chaotic weak chimeras and their persistence in coupled populations of phase oscillators // Nonlinearity. – 2016. – **29(5)**. – P. 1468 – 1486.

98. *Ashwin P., King G. P., Swift J. W.* Three identical oscillators with symmetric coupling // Nonlinearity. – 1990. – **3(3)**. – P. 585 – 601.

99. *Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Yu.* Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // Phys. D. – 2008. – **237(4)**. – P. 454 – 466.

100. *Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Yu., Popovych O.* Extreme sensitivity to detuning for globally coupled phase oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2006. – **96**. – 054102.

101. *Ashwin P., Bick C., Burylko O.* Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling // Front. Appl. Math. Stat. – 2016. – **2(7)**.

102. *Burylko O., Pikovsky A.* Desynchronization transitions in nonlinearly coupled phase oscillators // Phys. D. – 2011. – **240(17)**. – P. 1352 – 1361.

103. *Bick C., Timme M., Paulikat D., Rathlev D., Ashwin P.* Chaos in symmetric phase oscillator networks // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **107**. – 244101.

104. *Golomb D., Hansel D., Shraiman B., Sompolinsky H.* Clustering in globally coupled phase oscillators // Phys. Rev. A. – 1992. – **45**. – P. 3516 – 3530.

105. *Hansel D., Mato G., Meunier C.* Phase dynamics of weakly coupled Hodgkin – Huxley neurons // Europhys. Lett. – 1993. – **23**. – P. 367 – 372.

106. *Maistrenko Yu., Popovych O., Burylko O., Tass P. A.* Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model // Phys. Rev. Lett. – 2004. – **93(8)**. – 084102.

107. *Kuramoto Y., Nishikawa I.* Statistical macrodynamics of large dynamical systems. case of a phase transition in oscillator communities // J. Stat. Phys. – 1987. – **49(3)**. – P. 569 – 605.

108. *Liu S., Zhan M.* Clustering versus non-clustering phase synchronizations // Chaos. – 2014. – **24**. – 013104.

109. *Chiba H., Pazó D.* Stability of an $[n/2]$-dimensional invariant torus in the Kuramoto model at small coupling // Phys. D. – 2009. – **238(13)**. – P. 1068 – 1081.

110. *Popovych O., Maistrenko Yu., Tass P. A.* Phase chaos in coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2005. – **71**. – 065201.

111. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S.* Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos // Phys. D. – 1991. – **49(3)**. – P. 387 – 475.

112. *Delabays R., Coletta T., Jacquod P.* Multistability of phase-locking and topological winding numbers in locally coupled Kuramoto models on single-loop networks // J. Math. Phys. – 2016. – **57**. – 032701.

113. *Laing C. R.* The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks // Phys. D. – 2009. – **238(16)**. – P. 1569 – 1588.

114. *Ashwin P., Borresen J.* Encoding via conjugate symmetries of slow oscillations for globally coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2004. – **70(2)**. – 026203.

115. *Skardal P. S., Ott E., Restrepo J. G.* Cluster synchrony in systems of coupled phase oscillators with higher-order coup // Phys. Rev. E. – 2011. – **84**. – 036208.

116. *Ashwin P., Orosz G., Wordsworth J., Townley S.* Dynamics on networks of clustered states for globally coupled phase oscillators // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2007. – **6(4)**. – P. 728 – 758.

117. *Rabinovich M., Varona P., Selverston A., Abarbanel H.* Dynamical principles in neuroscience // Rev. Mod. Phys. – 2006. – **78**. – P. 1213 – 1265.

118. *Rabinovich M., Varona P., Tristan I., Afraimovich V.* Chunking dynamics: heteroclinics in mind // Front. Comput. Neurosci. – 2014. – **8**. – 22.

119. *Xu C., Xiang H., Gao J., Zheng Z.* Collective dynamics of identical phase oscillators with high-order coupling // Sci. Rep. – 2016. – **6**. – 31133.

120. *Lamb Jeroen S. W., Roberts John A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey // Phys. D. – 1998. – **112(1-2)**. – P. 1 – 39.

121. *Sevryuk M. B.* Reversible Systems // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1986. – **1211**.

122. *Daido H.* Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions // Phys. Rev. Lett. – 1992. – **68**. – P. 1073 – 1076.

123. *Hong H., Strogatz S. H.* Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: an example of conformist and contrarian oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106**. – 054102.

124. *Maistrenko Yu., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. – 2014. – **89**. – 060901.

125. *Montbrió E., Kurths J., Blasius B.* Synchronization of two interacting populations of oscillators // Phys. Rev. E. – 2004. – **70**. – 056125.

126. *Restrepo J. G., Ott E., Hunt B. R.* Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2005. – **71**. – 036151.

127. *Sheeba J. H., Chandrasekar V. K., Stefanovska A., McClintock P. V. E.* Asymmetry-induced effects in coupled phase-oscillator ensembles: routes to synchronization // Phys. Rev. E. – 2009. – **79**. – 046210.

128. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // Phys. Rev. E. – 2014. – **90**. – 022911.

129. *Arnold V. I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. Vol. 2 // Collected Work. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1965. – P. 15 – 18.

130. *Dombre T., Frisch U., Greene J. M., Hénon M., Mehr A., Soward A. M.* Chaotic streamlines in the abc flows // J. Fluid Mech. – 1986. – **167**. – P. 353 – 391.

131. *Daido H.* Susceptibility of large populations of coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2015. – **91**. – 012925.

132. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2008. – **101**. – 264103.

Одержано 09.03.19