УДК 004.922
Н.О.Герасимчук
Волинський національний університет імені Лесі Українки

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ АНАМОРФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ (ДВО- ТА ТРИВИМІРНИЙ ВИПАДКИ)

Запропоновано та досліджено математичну модель процесу побудови анаморфічного зображення. Розроблено практичний алгоритм побудови анаморфічного зображення, застосовний в сфері програмування тривимірної графіки.

Ключові слова: *анаморфоз, анаморфічні зображення, алгоритм побудови*.

Анаморфоз — це візуальна конструкція, створена таким чином, що в результаті зміщення точки спостереження певна частина зображення, спершу недоступна для сприйняття, складається в легко зрозумілий образ. Задоволення полягає в тому, що образ несподівано з'являється із фрагмента зображення, що нібито не представляв нічого суттєвого.

Рис.1. Використання техніки анаморфозу на картині Ханса Гольбейна Молодшого "Посли"

Анаморфозом також називалася техніка живопису епохи Ренесансу, при якій використовувалися принципи перекручування перспективи для створення додаткового зображення в межах фронтальної композиції. Так, при огляді полотна з анаморфічним зображенням під найбільш можливим гострим кутом до площини картини з'являється інший образ. Анаморфоз знищує зорову перспективу.

Яскравим прикладом застосування цієї техніки є картина Ханса Гольбейна Молодшого "Посли", 1533 р. (рис.1) [1]. Якщо дивитися на картину фронтально, то чітко видно двох послів, а під столом — ганчірка. Проте якщо подивитися на ганчірку з правого верхнього кута картини, то ганчірка "перетворюється" у череп.

Анаморфоз як явище все частіше зустрічається у нашому житті. Сучасний художник Джуліан Бівер [2] малює карколомні картини крейдою на тротуарі, ламаючи людське відчуття перспективи і простору.

Також на дорогах (зокрема, на виїзді з м. Луцька) малюють розтягнуті вздовж дороги дорожні знаки. Застосування анаморфозу дозволяє спостерігати перетворення початкового зображення під час руху, коли змінюється точка зору. Крім того, явище анаморфозу дає можливість використати невикористовувані площі, а також, безумовно, має мистецьке та естетичне значення. Саме цим і зумовлена актуальність дослідження процесу побудови анаморфічних зображень.

Мета дослідження — розробити математичну модель та алгоритм побудови анаморфічного зображення.

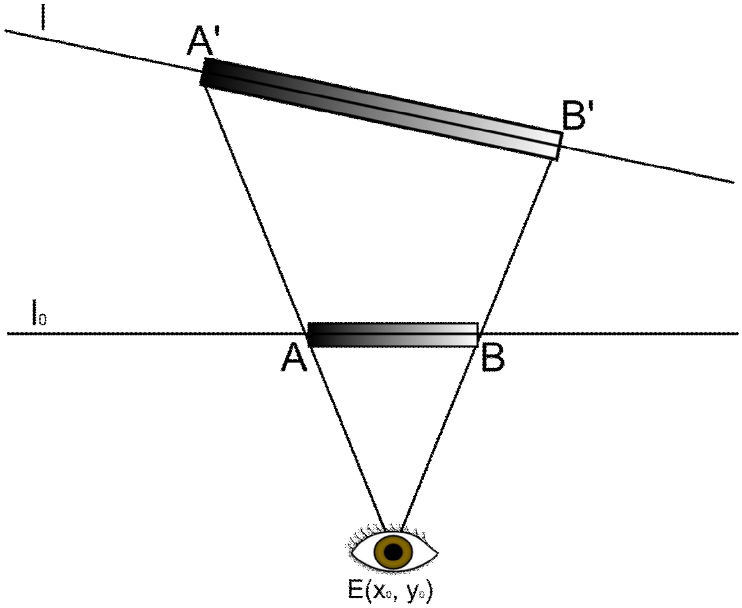

Рис. 2. Принцип побудови анаморфічного зображення у площині

Розглянемо принцип побудови анаморфічних зображень у площині (рис. 2). Нехай $E(x_0, y_0)$ - точка, з якої ведеться спостереження. Спостерігається об'єкт — відрізок AB, що лежить на прямій l_0, кінці якого задані координатами $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Пряма l, на яку здійснюватиметься проектування, задана рівнянням $y = ax + b$. Задача зводиться до відшукання образу кожної точки відрізка AB на прямій l.

Параметричні рівняння прямої l_0, що проходить через дві задані своїми кординатами точки:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A), \\ y = y_A + t(y_B - y_A). \end{cases}$$

Розіб'ємо відрізок AB точками $A = M_0, M_1, ..., M_k, ..., M_n = B$ на n рівних частин. Кожній точці M_k відповідає значення параметра $t_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$. Координати точки M_k обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} x_k = x_A + \frac{k}{n}(x_B - x_A), \\ y_k = y_A + \frac{k}{n}(y_B - y_A). \end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо відображення L таке, що числу k ставить у відповідність пару дійсних чисел (x'_k, y'_k) за наступним алгоритмом:

Знаходимо координати точки $M_k(x_k, y_k)$ за формулами (1).

Шукаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки з відомими координатами

$$E(x_0, y_0): \frac{x - x_0}{x_k - x_0} = \frac{y - y_0}{y_k - y_0}.$$

Маючи рівняння прямої EK та рівняння прямої l, шукаємо точку перетину двох прямих.

Для цього складаємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{x_k-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_k-y_0}, \\ y=ax+b. \end{cases}$$

Позначимо $p:=\dfrac{1}{a(x_0-x_k)-y_0+y_k}$. Розв'язавши систему, матимемо координати образу $M'_k(x'_k,y'_k)$ точки M_k:

$$\begin{cases} x'_k=-p(b(x_0-x_k)-x_0y_k+x_ky_0) \\ y'_k=p(a(x_0y_k-x_ky_0)+b(y_k-y_0)) \end{cases}$$

Маємо відображення $L:k\to(x'_k,y'_k)$. Спрямуємо $n\to\infty$ та для кожної точки M_k знайдемо її образ на прямій $l:k\xrightarrow{L}(x'_k,y'_k)$.

Таким чином, ми отримали алгоритм, за яким кожній точці відрізка AB ставиться у відповідність точка на прямій l.

Розглянемо анаморфоз у тривимірному просторі (власне, в цьому випадку ми й маємо можливість спостерігати це явище). Матимемо наступну модель (рис. 3).

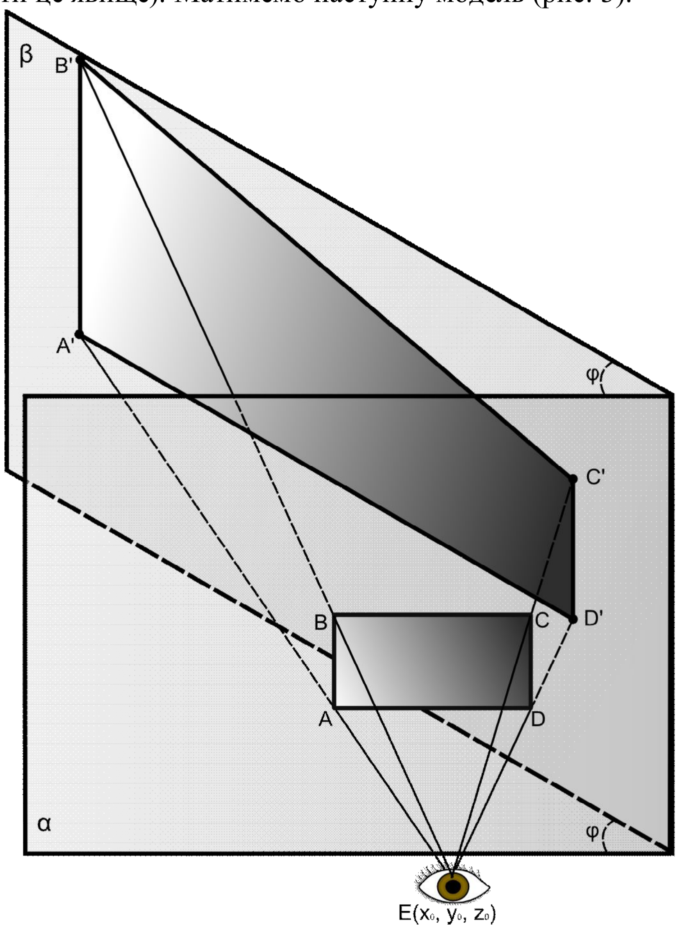

Рис. 3. Принцип побудови анаморфічного зображення у просторі

Нехай дано точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$, $E(x_0,y_0,z_0)$.

Тоді параметричне рівняння площини α, в якій лежать точки A,B,C,D, має вигляд:

$$\begin{cases} x=x_B+t(x_C-x_B)+s(x_A-x_B), \\ y=y_B+t(y_C-y_B)+s(y_A-y_B), \\ z=z_B+t(z_C-z_B)+s(z_A-z_B). \end{cases} \quad (2)$$

Площина β утворює кут φ з площиною α. Нехай її рівняння: $\beta: A_\beta x + B_\beta y + C_\beta z + D_\beta = 0$. Зображення, яке ми хочемо спроектувати, знаходиться у прямокутнику $ABCD$.

Кожній точці K зображення $ABCD$ поставимо у відповідність точку K' на площині β.

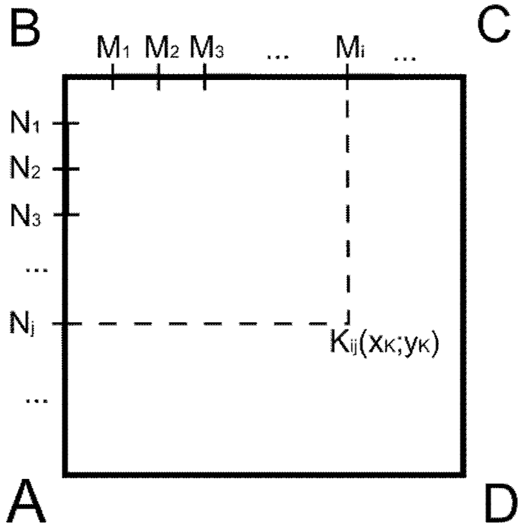

Рис. 4. Розбиття прямокутника $ABCD$

Для цього розіб'ємо сторони BC та AB прямокутника точками $B = M_0, M_1, ..., M_i, ..., M_n = C$ та $B = N_0, N_1, ..., N_j, ..., N_m = A$ відповідно на n та на m рівних частин (рис. 4). Прямокутник $ABCD$ при цьому розіб'ється на nm прямокутників. Нехай точка K_{ij} – вершина одного з них, а саме $N_j B M_i K_{ij}$. Координати точки $K_{ij}(x_k, y_k, z_k)$ можна знайти з (2):

$$\begin{cases} x_k = x_B + \dfrac{i}{n}(x_C - x_B) + \dfrac{j}{m}(x_A - x_B) \\ y_k = y_B + \dfrac{i}{n}(y_C - y_B) + \dfrac{j}{m}(y_A - y_B) \\ z_k = z_B + \dfrac{i}{n}(z_C - z_B) + \dfrac{j}{m}(z_A - z_B) \end{cases} \quad (3)$$

Для кожної точки K_{ij}, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$ на площині α можна знайти координати її образу K'_{ij} на площини β.

Розглянемо відображення L таке, що парі чисел (i, j), $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$ ставить у відповідність трійку дійсних чисел (x'_k, y'_k, z'_k) за наступним алгоритмом:

1. Знаходимо координати точки $K_{ij}(x_k, y_k, z_k)$ за формулою (3).
2. Шукаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки з відомими координатами $E(x_0, y_0, z_0)$ та $K_{ij}(x_k, y_k, z_k)$: $\dfrac{x - x_0}{x_K - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_K - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_K - z_0}$.
3. Маючи рівняння прямої EK та рівняння площини β, шукаємо точку перетину прямої і площини. Для цього складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_K - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_K - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_K - z_0} =: t, \\ A_\beta x + B_\beta y + C_\beta z + D_\beta = 0. \end{cases}$$

Введемо параметр t та виразимо через нього x, y, z з першого рівняння:

$$\begin{cases} x = t(x_k - x_0) + x_0, \\ y = t(y_k - y_0) + y_0, \\ z = t(z_k - z_0) + z_0. \end{cases} \tag{4}$$

Підставимо отримане в рівняння площини β, матимемо рівняння з однією змінною:

$A_\beta(t(x_k - x_0) + x_0) + B_\beta(t(y_k - y_0) + y_0) + C_\beta(t(z_k - z_0) + z_0) + D_\beta = 0$,

звідси

$$t = \frac{Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D}{A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k) + C(z_0 - z_k)}$$

Підставимо отримане значення t в (4), матимемо координати точки K'_{ij}:

$$\begin{cases} x'_k = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k) + C(z_0 - z_k)}(x_k - x_0) + x_0, \\ y'_k = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k) + C(z_0 - z_k)}(y_k - y_0) + y_0, \\ z'_k = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A(x_0 - x_k) + B(y_0 - y_k) + C(z_0 - z_k)}(z_k - z_0) + z_0. \end{cases}$$

Маємо відображення $L:(i,j) \to (x'_k, y'_k, z'_k)$. Спрямувавши $n \to \infty$ та $m \to \infty$, для кожної точки $K_{ij}(x_k, y_k, z_k)$ знайдемо її образ K'_{ij} на площині β. $(i,j) \xrightarrow{L} (x'_k, y'_k, z'_k)$.

Висновки

Отримано алгоритм, за яким кожній точці прямокутного зображення $ABCD$ у площині α ставиться у відповідність точка анаморфічного зображення у площині β.

Якщо розглянути програмну (комп'ютерну) реалізацію описаного вище процесу, то сучасні засоби графічних бібліотек (наприклад, OpenGL) дають можливість побудувати анаморфічне зображення виходячи лише з текстури вихідного зображення, яке потрібно спроектувати, та маючи лише задані вершини полігону, в який спроектується це зображення [3]. Тобто описаний вище алгоритм необхідно буде застосувати (для чотирикутника) лише чотири рази.

1. Лондонська Національна галерея [Електронний ресурс] — режим доступу: http://www.nationalgallery.org.uk/ — The National Gallery, London
2. Julian Beever Малюнки на підлозі. Настінні фрески. Картини образотворчого мистецтва [Електронний ресурс] – режим доступу: http://users.skynet.be/J.Beever/ - Julian Beever
3. The OpenGL Programming Guide (RedBook) [Електронний ресурс] — режим доступу - http://www.opengl-redbook.com/ — The OpenGL Programming Guide