УДК 517.45

В.М. Тимощук, П.І. Гінайло, С.М. Лісковець, О.В. Гуда
Луцький національний технічний університет

ПРО ДЕЯКІ ОЦІНКИ МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ БІГАРМОНІЧНОЇ ФУНКЦІЇ В ОБЕРНЕНИХ ТЕОРЕМАХ НАБЛИЖЕННЯ

У даній роботі сформульовано і доведено теореми, які дають можливість визначити наближення, що забезпечують існування похідних відповідного порядку граничної функції. Наведений метод доведення дає можливість коректно розв'язати обернену задачу і визначити умови, при яких досліджувана початкова умова мала похідні до певного порядку включно. Одержані результати можуть бути поширені на інші функції (зокрема, функції бігармонічні півплощині).

Ключові слова: *бігармонічна функція, обернена теорема, нерівність Мінковського, модуль неперервності.*

В.Н. Тимощук, П.И. Гинайло, С.М. Лисковец, О.В. Гуда

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В данной работе сформулированы и доведены теоремы, дающие возможность определить приближения, которые обеспечивают существование производных соответствующего порядка. Приведенный метод доказательства дает возможность корректно решить обратную задачу, определить условия, при которых исследуемое начальное условие имеет производные до определенного порядка включительно. Полученные результаты можно использовать и при исследовании функций бигармоническими в полуплоскости.

Ключевые слова: *бигармоническая функция, обратная теорема, неравенство Минковского, модуль непрерывности.*

V. Toomoshchook, P. Ginaylo, S. Liskovets, O. Guda

ABOUT SOME EVALUATIONS OF THE IMMUNITY MODULE OF BIGARMMONIC FUNCTION IN THE RELATED APPROXIMATIVE THEOREMS

In this paper, theorems are formulated and proved, which make it possible to determine approximations that ensure the existence of derivatives of the corresponding order of the boundary function. The given method of proof makes it possible to correctly solve the inverse problem and determine the conditions under which the initial condition studied has derivatives to a certain order inclusive. The results obtained can be extended to other functions (in particular, biharmonic functions in the plane).

Key words: *biharmonic function, inverse theorem, Minkowski inequality, continuity module.*

Постановка проблеми. В статті [1] одержані обернені теореми наближення бігармонічними функціями в крузі. В цих теоремах за заданою швидкістю відхилення бігармонічних функцій від своїх граничних значень встановлено неперервність граничних значень (за відповідною метрикою) і оцінюється модуль неперервності другого порядку цього граничного значення.

У запропонованій роботі згадані обернені теореми доповнюються такими властивостями наближень, які забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції і оцінюється модуль неперервності похідної найвищого можливого порядку.

Аналіз досліджень і публікацій. Класична теорія наближення функцій оволоділа рядом ефективних методів для дослідження прямих і обернених теорем своєї теорії. Ці методи виявились плідними до якісного дослідження розв'язків крайових задач в плоских канонічних областях. Першими в цьому плані були результати 50-х років І.П. Натансона, О.П. Тіммана [2], які стосувались оцінок відхилення гармонійних функцій від їх значень на межі в термінах модулів неперервності крайових даних. Їх дослідження підтвердило думку про природну залежність поведінки розв'язків задачі Діріхлє від властивостей функцій, заданих на межі. В даний час проводяться дослідження розв'язків більш загальних рівнянь з крайовими даними із різних функціональних класів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо функції бігармонічні в крузі. Нехай задано бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 u = 0 . \tag{1}$$

Позначимо $u_f(\varphi, r) = u(\varphi, r)$ розв'язок рівняння (1) в одиничному крузі, що задовільняє граничним умовам

$$u(\varphi, r)\big|_{r=1} = f(\varphi); \quad \frac{\partial u}{\partial r} u(\varphi, r)\big|_{r=1} = 0 . \tag{2}$$

Розв'язок граничної задачі (1), (2) можна записати у вигляді

$$u_f(\varphi,r)=\frac{\left(1-r^2\right)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+t)\frac{1-r\cos t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}dt\,. \tag{3}$$

Клас таких функцій позначимо через B_φ. Позначимо через $L_p[-\pi;\pi]$ $1\le p\le\propto$, клас 2π-періодичних функцій $\varphi(x)$ $-\pi\le\varphi\le\pi$ з кінцевою нормою, що визначається співвідношенням

$$\|f\|=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}},\text{ якщо } 1\le p<\infty$$

$$\|f\|=\underset{-\pi\le\varphi\le\pi}{ess}\sup,\text{ якщо } p=+\infty\,.$$

Зауважимо, що у випадку $k=2$ теорема отримана в [1]. Для доведення теореми необхідно використати деякі допоміжні твердження.

Теорема 1. Якщо $f\in L_p[-\pi;\pi]$, $p\ge 1$, $u_f(\varphi,r)\in B_\varphi$, то для фіксованих натуральних k виконується нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k u_f(\varphi,r)}{\partial\varphi^k}\right\|\le M\frac{\|f\|}{(1-r)^k},\quad 0\le r<1, \tag{4}$$

де $M>0$ – стала, що не залежить від r.

Доведення. Використовуючи (3) розв'язок $u_f(\varphi,r)$ граничної задачі (1), (2) і узагальнену нерівність Мінковського [2] одержимо нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k u_f(\varphi,r)}{\partial\varphi^k}\right\|\le\frac{\|f\|}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial\varphi^k}\left(\frac{\left(1-r^2\right)^2(1-r\cos t)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\right)\right|dt\,. \tag{5}$$

Оцінимо інтеграл в правій частині (5). Для цього бігармонічне ядро Пуассона запишемо у вигляді

$$\frac{\left(1-r^2\right)^2(1-r\cos t)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1-r^2\right)^2}{1-2r\cos t+r^2}+\frac{\left(1-r^2\right)^3}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\right] \tag{6}$$

і позначимо

$$P_1=\frac{\left(1-r^2\right)^2}{1-2r\cos t+r^2},\quad P_2=\frac{\left(1-r^2\right)^3}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}\,. \tag{7}$$

Тоді, враховуючи що $P_1=\left(1-r^2\right)\left(-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right)$, диференціюванням по t одержимо формулу для похідної порядку k $(k=1,2,\ldots)$:

$$\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k}=\left(1-r^2\right)\cdot r(i)^k\left[\frac{e^{it}Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)}{\left(1-re^{it}\right)^{k+1}}+\frac{e^{-it}Q_{k-1}^{(2)}\left(r,e^{-it}\right)}{\left(1-re^{-it}\right)^{k+1}}\right], \tag{8}$$

де $Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)$, $Q_{k-1}^{(2)}\left(r,e^{-it}\right)$ – многочлени степеня $(k-1)$ по кожному з вказаних аргументів. Ці многочлени є обмеженими в замкнутому крузі $0\le r\le 1$ сталою, що залежить лише від степеня многочлена. Обчислимо модулі обох доданків в (8)

$$\left|\frac{e^{it}Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)}{\left(1-re^{it}\right)^{k+1}}\right|^2=\frac{Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)}{\left(1-re^{it}\right)^{k+1}}\cdot\frac{Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)}{\left(1-re^{-it}\right)^{k+1}}=\frac{\left|Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)\right|^2}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^{k+1}},$$

звідки

$$\left|\frac{e^{it}Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)}{\left(1-re^{it}\right)^{k+1}}\right|=\frac{\left|Q_{k-1}^{(1)}\left(r,e^{it}\right)\right|}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}. \qquad (9)$$

Цілком аналогічно одержимо

$$\left|\frac{e^{-it}Q_{k-1}^{(2)}\left(r,e^{-it}\right)}{\left(1-re^{-it}\right)^{k+1}}\right|=\frac{\left|Q_{k-1}^{(2)}\left(r,e^{-it}\right)\right|}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}. \qquad (10)$$

З (8)–(10) отримаємо оцінку

$$\left|\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k}\right|\le\frac{M_1\left(1-r^2\right)}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^{\frac{k+1}{2}}},$$

де M_1 – стала, що залежить лише від k. Використовуючи дану оцінку, відому тотожність $\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1-2r\cos t+r^2}=1$ і справедливу для всіх $t\in[-\pi;\pi]$ нерівність $1-2r\cos t+r^2\ge(1-r)^2$, знайдемо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\pi}\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k}dt\le M_1\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)\left(1-2r\cos t+r^2\right)^{\frac{k+1}{2}}}\le\frac{M_1}{(1-r)^{k-1}}. \qquad (11)$$

Оскільки

$$P_2=\frac{\left(1-r^2\right)^3}{\left(1-re^{it}\right)^2\left(1-re^{-it}\right)^2}=\left(1-r^2\right)\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right]^2=$$

$$=\frac{1-r^2}{\left(1-re^{it}\right)^2}+\frac{1-r^2}{\left(1-re^{-it}\right)^2}+\left(1-r^2\right)\left[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\right]+2\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right],$$

то достатньо розглянути похідних порядку $k\in N$ кожного з доданків в правій частині (12). Позначимо

$$P_2^{(1)}=\frac{1-r^2}{\left(1-re^{it}\right)^2};\quad P_2^{(2)}=\frac{1-r^2}{\left(1-re^{-it}\right)^2};\quad P_2^{(3)}=\left(1-r^2\right)\left[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\right];$$

$$P_2^{(4)}=2\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right].$$

Аналогічно (11), отримаємо наступні нерівності

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k P_2^{(3)}}{\partial t^k}\right|dt\le\frac{M_2}{(1-r)^{k-1}}, \qquad (13)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k P_2^{(4)}}{\partial t^k}\right|dt \le \frac{M_3}{(1-r)^k}, \tag{14}$$

де M_2, M_3 – додатні сталі, що не залежать від r. Для $P_2^{(1)}, P_2^{(2)}$ аналогічно доведення рівності (9) одержимо рівності

$$\left|\frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k}\right| = \frac{\left(1-r^2\right)\left|R_2^{(1)}\left(r, e^{it}\right)\right|}{\left(1-2r\cos t + r^2\right)^{\frac{k}{2}+1}}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k}\right| = \frac{\left(1-r^2\right)\left|R_2^{(2)}\left(r, e^{-it}\right)\right|}{\left(1-2r\cos t + r^2\right)^{\frac{k}{2}+1}}, \tag{16}$$

де $R_2^{(1)}\left(r, e^{it}\right)$, $R_2^{(2)}\left(r, e^{-it}\right)$ – многочлени відповідних аргументів, що обмежені в замкнутому крузі $0 \le r \le 1$ сталою, що залежить лише від k. З (15), (16) маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k P_2^{(1)}}{\partial t^k}\right|dt \le \frac{M_4}{(1-r)^k}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k P_2^{(2)}}{\partial t^k}\right|dt \le \frac{M_5}{(1-r)^k}, \tag{18}$$

де M_4, M_5 – додатні сталі, що не залежать від r.

Використовуючи (5), рівності (60 і (12), а також оцінки (11), (13), (14), (17), (18) інтегралів від окремих доданків, одержимо кінцеву оцінку 4. Теорема доведена.

Для фіксованого r_1, $0 \le r_1 \le 1$ позначимо через $u_{u(\varphi, r_1)}(\varphi, r)$ розв'язок рівняння (1), що задовільняє граничним умовам $u(\varphi, r)_{r=1} = u(\varphi, r_1)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\varphi, r)\right|_{r=1} = 0$. Аналогічно введемо позначення $u_{u(\varphi, r_2)}(\varphi, r)$, $0 \le r_2 \le 1$.

Теорема 2. Якщо $f \in L_p[-\pi;\pi]$, $p \ge 1$, $u(\varphi, r) \in B_\varphi$, то для довільних r_2, r_1 $(0 < r_1, r_2 < 1)$ справедлива рівність

$$u_{u(\varphi, r_1)}(\varphi, r_2) = u_{u(\varphi, r_2)}(\varphi, r_1), \ -\pi \le \varphi \le \pi. \tag{19}$$

Доведення. виходячи з (3) та використовуючи теорему Фубіні [2], знайдемо

$$u_{u(\varphi, r_1)}(\varphi, r_2) = \frac{\left(1-r_1^2\right)^2\left(1-r_2^2\right)^2}{4\pi^2} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} f(\eta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left[1-r_1\cos(\eta - t)\right]\left[1-r_2\cos(t-\varphi)\right],}{\left(1-2r_1\cos(\eta-t)+r_1^2\right)^2\left(1-2r_2\cos(t-\varphi)+r_2^2\right)^2} dt d\eta \tag{20}$$

$$u_{u(\varphi, r_2)}(\varphi, r_1) = \frac{\left(1-r_1^2\right)^2\left(1-r_2^2\right)^2}{4\pi^2} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} f(\eta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left[1-r_2\cos(\eta - t)\right]\left[1-r_1\cos(t-\varphi)\right]}{\left(1-2r_2\cos(\eta-t)+r_2^2\right)^2\left(1-2r_1\cos(t-\varphi)+r_1^2\right)^2} dt d\eta. \tag{21}$$

Розглянемо різницю внутрішніх інтегралів (по t) в правих частинах (20) і (21). Використовуючи заміну $t = u + \frac{\eta + \varphi}{2}$ (η і φ для цього інтегралу є параметрами) та враховуючи 2π-періодичність підінтегральної функції, поклавши $v = \frac{\eta + \varphi}{2}$, одержимо для вказаної різниці

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(u, \varphi, \eta) du, \tag{22}$$

де

$$\Phi(u, \varphi, \tau) = \frac{[1 - r_1 \cos(v-u)][1 - r_2 \cos(v+u)]}{\left(1 - 2r_1 \cos(v-u) + r_1^2\right)^2 \left(1 - 2r_2 \cos(v+u) + r_2^2\right)^2} -$$
$$- \frac{[1 - r_2 \cos(v-u)][1 - r_1 \cos(v+u)]}{\left(1 - 2r_2 \cos(v-u) + r_2^2\right)^2 \left(1 - 2r_1 \cos(v+u) + r_1^2\right)^2}.$$

Оскільки $\Phi(-u, \varphi, \eta) = -\Phi(u, \varphi, \eta)$, то інтеграл (22) дорівнює нулю і теорема 2 доведена.

Зауважимо, що при виконанні теореми 2 є справедливою рівність

$$u_{f-u(\varphi, r_1)}(\varphi, r_2) - u_{f-u(\varphi, r_2)}(\varphi, r_1) = u(\varphi, r_2) - u(\varphi, r_1). \tag{23}$$

Висновки. В даній роботі наведено теореми, які дають можливість визначити властивості наближення, що забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції. А це дозволяє розв’язати проблему відновлення граничної функції в задачі Діріхлє для рівняння $\left(\Delta - c^2\right)u = 0$ в крузі; задачі Ліурічеллі для його ітерації; задач відновлення початкових умов для одновимірних рівнянь теплопровідності та ін. Розв’язок даних задач дає можливість розв’язувати багато різних технічних задач теорії пружності, теорії пластичності, будівельної механіки. Крім цього одержані результати можуть бути поширені і на інші функції (зокрема на функції бігармонічні в півплощині).

Література

1. Горбайчук В И. О некоторых граничных свойствах бигармонических функций // Изд. вузов математики – 1974 – №12. – С.54-57.

2. Тимман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М., Физматиз, 1960. – 624с.

Стаття надійшла до редакції 13.06.2018