15. Неэнергоемкие пищевые добавки, натуральные красители и ароматизаторы / Бурдо О.Г., Терзиев С.Г., Ружицкая Н.В., Харенко Д.А. // Наукові праці ОНАХТ, – Одеса, 2014. – Вип. 45, Т.2. – С. 221 – 224
16. Кінетика ІЧ-сушіння шламу кави / Бурдо О.Г., Терзієв С.Г., Ружицька Н.В., Борщ А.А. // Харчова наука і технологія. – 2011. – №4(17) – С. 96–99.
17. Терзиев С.Г. Математическое моделирование процессов переработки структурированных отходов в пищеконцентратном производстве / Терзиев С.Г. // Наукові праці ОНАХТ. – Одеса, 2010. – Вип. 37. – С.132-136

УДК 515.124.4:51-73

РАЗМЕРНОСТИ: ГЕНЕЗИС ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Герега А.Н., д-р техн. наук, профессор
Одесская национальная академия пищевых технологий, г. Одесса

В обзоре описаны некоторые универсальные и специальные размерности, вошедшие в математический аппарат теоретической физики в двадцатом столетии.

In the review describes some of the universal and special dimensions included in the mathematical formalism of theoretical physics in the twentieth century.

Ключевые слова: покрытия, адекватность меры, размерность Хаусдорфа-Безиковича, энтропия меры, эффективная размерность.

1. Введение

Теория размерности, основы которой, как известно, были заложены в работах А. Пуанкаре, А.Л. Лебега и Л. Брауэра [1-3], опубликованных в 1911-13 годах, открыла «доступ к изучению ряда интересных свойств точечных множеств, к построению обширной теории…» [4, 5]. Понятие размерности оказалось полезным и удобным концептом и в теоретической физике.

В физике сформировались две основные группы задач, в которых размерность стала реальным инструментом получения и анализа решений. Первая – это задачи стохастической динамики, в частности, проблемы турбулентности. В этих задачах размерности являются доступными для измерения и структурно устойчивыми характеристиками системы, связанными, в частности, с показателями Ляпунова; позволяют провести классификацию странных аттракторов и связанного с ними хаотического поведения [6].

Вторая группа – задачи перколяционной теории: раздела статистической физики, который на протяжении полувека изучает критические явления [6, 7]. Перколяционная теория адекватно описывает особенности возникновения и эволюции, а также свойства связных областей в системах, в которых имеет место геометрический фазовый переход. Она нашла применение в широком круге научно-технических задач: исследовании белковых структур, пористых тел, создании фильтров, изучении легированных полупроводников, при борьбе с эпидемиями, в исследованиях процессов полимеризации, при создании композиционных материалов, изучении мировоззренческих вопросов и многих других. При этом для критических показателей физических величин, описывающих процессы и явления, как правило, можно указать множество, с размерностью которого этот показатель связан. В свою очередь, исследование структуры этих множеств много даёт для понимания критического поведения системы и соотношений между показателями, позволяет проследить связь между поведением системы в промежуточной асимптотике и её геометрией [6].

Перколяционная теория известна также как раздел теории вероятностей, имеющий собственные приложения в естественных и инженерных науках [8 – 11].

В математических и физических исследованиях используется большое количество размерностей, и в конкретном исследовании всегда встаёт вопрос выбора, который обусловлен содержанием задачи. Размерности, представленные в обзоре, соотносятся с совершенно разными понятиями, в частности, имеют отношение и к описанным группам задач (в первую очередь, к перколяционной теории), и к топологическим исследованиям.

Далее в тексте, как и во всех физических приложениях, размерности определяются как показатель степени в выражениях типа $a \sim b^c$.

2. Геометрическая и физическая размерности

Размерность физической величины определяет её связь с величинами, положенными в основу системы единиц измерения, т. е. устанавливает соотношение масштабов данной и основных единиц измерения [12]. Из такого определения следует, что физические величины, в отличие от геометрических, изменяются не только при преобразованиях координат, но и при модификации системы физических величин. Это значит, что при определённом выборе основных единиц каждому физическому объекту соответствует один и только один геометрический объект – образ физического объекта, который приобретает множитель $a^{\alpha}\,\beta^{b}\,c^{\gamma}\,\ldots\,l^{\lambda}\,m^{\mu}\,n^{\nu}$, если вводится другое множество допустимых основных единиц; этот множитель называется размерностью геометрического образа, или абсолютной размерностью физического объекта. Абсолютная размерность определена относительно аффинной группы, если мы работаем с прямолинейными координатами n-мерного евклидового пространства. Эта размерность не является размерностью, с которой работают физики [13].

Если компоненты физического объекта относительно локальной декартовой системы координат, основанной на единице длины, приобретают при изменении основных единиц множитель $a^{\alpha 1}\,\beta^{b1}\,c^{\gamma 1}\,\ldots l^{\lambda 1}\,m^{\mu 1}\,n^{\nu 1}$, то его называют относительной размерностью, или просто размерностью, физического объекта. Это та размерность, которая используется в физике.

Таким образом, различие между абсолютной (геометрической) и относительной (физической) размерностью физического объекта обусловлено тем, что общая система координат не связана с единицей длины, а локальная декартова изменяется при введении другой единицы. Следовательно, соотношение между ними зависит только от закона трансформации объекта при преобразовании координат [13].

3. Размерность пространства. Топологическая размерность

Если рассматривать геометрические объекты как множества точек евклидова пространства R^E, то понятие топологической размерности можно ввести по рекуррентной схеме, предложенной А. Пуанкаре [1].

Положим размерность любого конечного или счётного множества точек равным нулю; размерность связного множества будем считать равной $d + 1$, если оно может быть разрезано на две несвязанные части исключением из него как минимум d-мерного множества точек, т. е. проведением d-мерного разреза. При таком определении, если положить размерность точки равной нулю, то топологическая размерность линии будет равна единице, плоскости и сферы – двум, шара – трём и т. д.

Из определения видно, что топологическая размерность может быть только целым числом, и совпадает с интуитивным представлением о минимальном количестве переменных, которые нужно задать для определения положения точки на объекте [14]. В 1902 году в книге «Наука и гипотеза» [15] А. Пуанкаре писал, что «размерность пространства – это минимальное число параметров, которые необходимы, чтобы отличать точки пространства друг от друга»; полное зрительное пространство «имеет как раз три измерения; т. е. элементы наших зрительных ощущений … будут вполне определены, когда известны три из них». И если в пространстве это число равно трём, на плоскости достаточно двух координат, на линии – одной; в этом смысле пространство – трёхмерно, плоскость – двумерна, линия – одномерна.

В статье «Почему пространство имеет три измерения» [1] А. Пуанкаре определил размерность, которую можно было бы назвать антропной. Он пишет о существовании «экспериментальных фактов, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения. Именно ввиду этих данных нам было удобнее приписать ему три измерения, а не четыре или два. Но слово «удобный», пожалуй, в данном случае недостаточно сильно: Существо, которое приписывало бы пространству два или четыре измерения, оказалось бы менее приспособленным к борьбе за существование в мире, подобном нашему». В случае двух измерений оно предполагало бы существование таких соотношений, которые мы, люди, не допускаем; а в случае четырёх – отбрасывало бы такие, которыми мы пользуемся [1].

Физическое обоснование трёхмерности пространства дано в работе П. Эренфеста [16], в которой исследуется, в частности, аналог гравитационного закона Ньютона для пространств с различным числом измерений. В этом случае зависимость гравитационных сил от расстояния определяется выражением $F = G_i M\, m / R^{i-1}$, где M, m, R – массы и расстояние в «классическом» понимании, i – число пространственных координат, G_i – коэффициенты, в частности, G_3 – гравитационная постоянная Ньютона. Некоторым основанием для такого предположения служат результаты анализа законов движения, полученные Эренфестом для пространств с числом измерений, отличным от трёх [16, 17].

В предложенном Ньютоном гравитационном законе сила пропорциональна R^{-2}, причём эта зависимость неоднократно проверялась экспериментально, и значение показателя степени установлено с точностью до $2 \pm 3 \cdot 10^{-11}$, следовательно, с этой же точностью размерность нашего пространства $i = 3$. Эти данные получены из прецизионных измерений орбиты Луны, движущейся вокруг Земли, и хотя средний радиус лунной орбиты равен 384 тысячам километров, модельные данные отличаются от измеренных на 4 мм [18].

4. Адекватность меры. Размерность Хаусдорфа-Безиковича

Понятие топологической размерности решает вопрос об адекватной мере для классических геометрических объектов. Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей и объёмы тел состоит в разделении пространства на малые кубы или сферы с характерным линейным размером δ. Подсчитывая количество отрезков, квадратов или кубов, необходимых для покрытия рассматриваемого множества точек, можно получить меру этого множества [19].

Для обычной кривой длина L может быть определена предельным переходом

$$L = N(\delta)\,\delta \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^0,$$

где δ – длина прямолинейных отрезков, $N(\delta)$ – их количество. Как видно, в пределе при $\delta \to 0$ мера L становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от δ.

Длина является адекватной мерой обычной (нефрактальной) кривой. Если поставить в соответствие линии не длину, а площадь или объём, то та же процедура покажет, что такие меры обращаются в нуль. Действительно, пусть $N(\delta)$ – количество квадратов, необходимых для покрытия кривой, δ^2 – площадь одного квадрата, тогда

$$S = N(\delta)\,\delta^2 \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^1 = 0;$$

аналогично,

$$V = N(\delta)\,\delta^3 \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^2 = 0.$$

Центральное место в определении размерности Хаусдорфа-Безиковича занимает понятие адекватности меры.

Рассмотрим множество точек, образующих поверхность в трёхмерном пространстве. Адекватная мера такого множества – площадь. Действительно,

$$S = N(\delta)\,\delta^2 \underset{\delta \to 0}{\to} S_0\,\delta^0,$$

где S_0 – площадь поверхности. Таким образом, количество квадратов, необходимых для покрытия поверхности, определяется в пределе при $\delta \to 0$ как $N(\delta) = S_0 / \delta^2$.

Если поставить в соответствие поверхности длину, то

$$L = N(\delta)\,\delta \underset{\delta \to 0}{\to} S_0\,\delta^{-1} = \infty,$$

что говорит о невозможности покрыть поверхность конечным количеством отрезков прямой. Если сделать попытку установить соответствие между поверхностью и объёмом, то он обратится в нуль

$$V = N(\delta)\,\delta^3 \underset{\delta \to 0}{\to} S_0\,\delta^1 = 0.$$

Определим меру фрактального множества, используют пробную функцию M_d, которая в зависимости от выбора её размерности d, обращалась в нуль или бесконечность при $\delta \to 0$. Введём размерность Хаусдорфа-Безиковича D_H, при которой мера M_d изменяет значение с нуля на бесконечность

$$M_d = \sum \gamma(d)\,\delta^d = \gamma(d)\,N(\delta)\,\delta^d \underset{\delta \to 0}{\to} \begin{cases} 0, & \text{при } d > D, \\ \infty, & \text{при } d < D, \end{cases}$$

где $\gamma(d)$ – геометрический коэффициент, зависящий от формы элементов, покрывающих множество; для квадратов и кубов $\gamma(d)$ равен единице, для кругов – $\pi/4$, для сфер – $\pi/6$ [15]. Для физика такое поведение меры означает, что D представляет собой критическую размерность [20].

Существенно, что при определении размерности Хаусдорфа-Безиковича необходимо покрывать множество элементами всевозможных размеров, не превышающих некоторое малое значение, и определить infimum выражения $\gamma(d)\sum\delta^d$. Очевидно, что процесс минимизации этой суммы по всем возможным разбиениям чрезвычайно трудоёмок, и обычно производят оценку размерности Хаусдорфа-Безиковича величиной ёмкости множества D_c. Это типичная ситуация в прикладных задачах теории размерностей: среди однотипных иногда можно найти размерности, пригодные для оценки значений других, расчёт которых трудоёмок или нереализуем.

Для определения D_c рассмотрим случай покрытия множества точек в d-мерном евклидовом пространстве минимальным количеством d-мерных кубиков (или сфер) одинакового размера. (Покрытие сферами используется для того, чтобы не говорить об ориентации). То есть, если $N(\delta) \sim \delta^{-D_c}$, то D_c – колмогоровская ёмкость множества [6, 21]; индекс c – сокращение от англ. capacity.

Пусть A – величина, характеризующая покрытие, и $N(\delta) \approx A{\cdot}\delta^{-d}$ – минимальное количество d-мерных кубиков. Логарифмируя это выражение, получим

$$\ln N(\delta) \approx \ln A - d{\cdot}\ln \delta,$$

откуда, приблизительно,

$$d = -\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} + \frac{\ln A}{\ln \delta}\ .$$

Так как $\ln \delta \to -\infty$ при $\delta \to +0$, то ёмкость множества есть предел

$$D_c = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta},$$

который, обычно, существует.

Поскольку при определении хаусдорфовой размерности должны использоваться всевозможные покрытия множества, а при расчёте ёмкости – элементы одного размера, то $D_H < D_c$.

Хаусдорфова размерность и ёмкость по Колмогорову могут различаться даже для очень простых множеств [6]. Например, для множества точек прямой с координатами $x_n = 1/n$ первая равна 0, вторая – 1/2. Ёмкости, в отличие от размерностей, в частности, хаусдорфовой, не остаются инвариантными при кусочно-гладком, возможно, имеющем особенности, преобразовании координат, а для величины, определяемой как размерность, такая инвариантность необходима.

Как отмечалось, во всех физических приложениях размерность определяется как показатель $M \sim l^D$, где M – некое свойство, l – характерный размер, а определить является ли она хаусдорфовой размерностью или ёмкостью не представляется возможным. Это связано с тем, что размерность описывает свойства промежуточной асимптотики, и переход к пределу, требуемый формальными определениями, невозможен. Кроме того, на малых масштабах система не является фрактальной, и её поведение описывается некоторым минимальным масштабом.

Так определённые размерность Хаусдорфа-Безиковича и ёмкость есть локальные свойства в том смысле, что характеризуют множество точек при исчезающе малом характерном размере пробной функции ($\delta \to 0$), используемой для его покрытия.

Важно, что для простых геометрических объектов хаусдорфова размерность совпадает с топологической. Действительно, пусть есть квадрат со стороной a; покроем его малыми квадратами площадью δ^2. Тогда для меры $A_d(\delta)$ получим

$$A_d(\delta) = \sum \delta_i^d = N(\delta){\cdot}\delta^d \approx a^2 \delta^{d-2}.$$

При $d < 2$ мера $A_d(\delta)$ неограниченно возрастает при уменьшении δ, в случае $d > 2$ – стремится к нулю. Следовательно, по определению размерности Хаусдорфа-Безиковича $D_H = 2$.

5. Размерность Хаусдорфа-Безиковича как фрактальная размерность

В евклидовом пространстве R^E величина топологической размерности D_T и размерности Хаусдорфа-Безиковича D_H заключены в промежутке между нулем и E. При этом топологическая всегда является целым числом, а для размерности Хаусдорфа-Безиковича это не обязательно. Для евклидовых множеств $D_H = D_T$, в общем же случае эти две размерности должны удовлетворять неравенству Шпилрайна (Edward Szpilrajn) $D_H \le D_T$ [5, 20].

Однако существуют множества, для которых $D_H > D_T$. В [20] Б. Мандельброт пишет: «Такие множества необходимо было как-то называть, поэтому я придумал термин «фрактал», определив его следующим образом: фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича для которого строго больше его топологической размерности».

Любое множество с нецелым значением D_H является фракталом; фрактал может иметь и целочисленную размерность. Если понимать термин «дробь» как синоним выражения «нецелое вещественное число», то часто значения размерности D_H являются дробными. Учитывая, что D_H может принимать и целочисленные значения $D_T < D_H \le E$, Бенуа Мандельброт предпочёл назвать её фрактальной размерностью [20], и обозначить через D.

6. Многообразие покрытий. Размерности Минковского-Булигана и Понтрягина-Шнирельмана

По Мандельброту фрактальная размерность и все её возможные варианты – не топологические, но метрические понятия: каждая включает в себя метрическое пространство, в котором определены расстояния между любыми двумя точками [20]. При этом сами размерности определяются алгоритмами покрытия множества d-мерными шарами и, в сущности, есть функции способа покрытия.

В способе покрытия ограниченного множества, предложенным Г. Кантором, каждая его точка рассматривается как центр шара [20]. Такой подход связан с очевидными неудобствами. Во-первых, для множеств, содержащих бесконечное количество точек, такой алгоритм неоперабелен. Ситуация, однако, разрешается тем, что, оказывается, достаточно построить конечное число шаров $N(\rho) \sim 1/\rho$.

Во-вторых, сумма перекрывающихся объёмов шаров при $\rho \to 0$ не должна непременно сходится к протяжённости (в смысле Минковского) множества, т.е. d-мерному объёму: длине, площади, объёму и т. д. В примере Х. А. Шварца [22] показано, что по мере увеличения точности триангуляции боковой поверхности прямого кругового цилиндра, сумма площадей треугольников не обязательно сходится к её площади, а может быть равной сколь угодно большой конечной или бесконечной величине.

При рассмотрении этого парадокса Г. Минковский показал, что если определить протяжённость как

$$V\{d\text{-мерный шар радиуса } \rho\} = \gamma(d)\,\rho^{D},$$

где d – стандартная топологическая размерность рассматриваемого множества, множитель $\gamma(d) = [\Gamma(½)]^{d} / \Gamma(1+d/2)$, ρ – радиус покрывающих шаров, D – размерность фрактального множества (если множество нефрактально, $D = d$), то при $\rho \to 0$ она может не иметь предела [20]. В этом случае выражение

$$\lim_{\rho \to 0} V$$

заменяется на

$$\lim_{\rho \to 0} \sup V \text{ и } \lim_{\rho \to 0} \inf V \text{ –}$$

верхнюю и нижнюю протяжённости множества. При этом любому вещественному числу из интервала $]\lim\inf, \lim\sup[$ соответствует, по меньшей мере, одна последовательность значений $\rho_m \to 0$, таких, что при $m \to \infty$ сумма площадей треугольников в примере Х. А. Шварца сходится к площади поверхности [20]. Г. Минковский показал также, что в случае стандартных евклидовых структур существует величина D_M – размерность Минковского – такая, что при $d > D_M$ верхняя протяжённость множества обращается в нуль, а при $d < D_M$ нижняя – бесконечна [20].

В 1928 году Ж. Булиган обобщил размерность Минковского на случай дробных d, и показал, что она определяется выражением $\lim_{\rho \to 0} \inf V$. В некоторых случаях величины размерностей Минковского-Булигана D_{MB} и Хаусдорфа-Безиковича D_H совпадают, например, для гладких кривых и поверхностей, и с учётом того, что D_{MB} легче поддаётся оценке, и по аналогии с ситуацией с размерностью Хаусдорфа-Безиковича и ёмкостью, она может использоваться для определения величины D_H [20].

Несложно привести и обратный пример, когда такая оценка невозможна: для компактного множества $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ как для всякого счётного $D_H = 0$, а $D_{MB} = ½$. В общем случае, как показано в [23], $D_{MB} \geq D_H$.

Среди всевозможных наборов покрывающих шаров наиболее экономичным является комплект, содержащий минимум шаров $N(\rho)$, который используют для определения размерности Понтрягина-Шнирельмана [20, 24]

$$D_{PSch} = \lim_{\rho \to 0} \inf \ln N(\rho) / \ln(1/\rho) \cdot$$

7. Размерность самоподобия и клеточная размерность

Как известно, объекты инвариантные относительно изменения масштаба и параллельного переноса называются самоподобными. Если при соответствующем изменении масштаба в n раз ($n < 1$) можно однократно покрыть исходный объект уменьшенными копиями, то он самоподобен с коэффициентом подобия $n(N) = 1/N^{1/d}$, где N – количество одинаковых частей, имеющих в n раз меньший линейный размер, d – размерность подобия (самоподобия), равная топологической размерностью объекта. В случае геометрически самоподобных (регулярных) фракталов

$$n(N) = 1/N^{1/D_S},$$

где D_S совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича [19] и определяется формулой

$$D_S = \ln N / \ln n.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим квадрат, разделённый на $N = 4$ равных квадрата со сторонами в $n = 2$ раза меньшими, чем у исходного. Тогда размерность самоподобия, равная топологической, для квадрата имеет значение 2; для куба, разделённого на $N = 8$ равных частей, $D_S = \ln 8 / \ln 2 = 3$. Для кривой Коха [19] – регулярного фрактала, при построении которого на каждой итерации масштаб покрывающих отрезков уменьшается в $n = 3$ раза, а их количество становится равным $N = 4$ размерность $D_S = \ln 4 / \ln 3 = 1{,}2618\ldots = D_H$.

Для определения размерности нерегулярных объектов фрактального типа, например, изображений государственной границы или береговой линии, описанный алгоритм, естественно, не подходит, и применяют другое определение размерности, связанное с иным алгоритмом.

Пространство, в котором расположен интересующий нас объект, разбивают на клетки размером δ^2, например, наносят с помощью палетки на изображение объекта квадратную сетку со стороной δ, и подсчитывают число клеток, содержащих точки объекта. Разбиение многократно повторяют, используя всё меньший масштаб. Зависимость количества клеток, в которые попали точки объекта, от δ описывается выражением $N(\delta) = A\delta^{-D_S}$, где D_S – искомая фрактальная размерность самоподобия. Для расчёта её значения строят график зависимости $N(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе, при этом угловой коэффициент графика определяет значение D_S.

За размерностью, определённой по такому алгоритму, можно сохранить название размерности самоподобия: действительно, если применить описанный алгоритм к регулярным объектам, то значения размерностей совпадают с вычисленными по формуле для D_S. Однако как размерность, определяемую посредством подсчёта количества клеток, её называют клеточной [6, 19].

8. Размерность энтропии меры

Описанный алгоритм расчёта размерности нерегулярного фрактального множества имеет естественное ограничение: если, например, береговая линия сильно изрезана и неоднократно пересекает некую клетку, то в количество клеток, покрывающих множество точек, она всё равно даёт единичный вклад, что «не вполне честно» [19].

Рассмотрим распределение точек множества по клеткам, отражающее распределение меры. Пусть множество, состоящее из N точек, имеет в i-й клетке N_i точек. И пусть $\mu = N_i / N$ – вероятность заполнения клетки. Можно построить меру

$$M_d(q,\delta) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i^q \delta^d = N(q,\delta)\,\delta^d \underset{\delta \to 0}{\rightarrow} \begin{cases} 0, & \text{при } d > \tau(q), \\ \infty, & \text{при } d < \tau(q), \end{cases}$$

обладающую показателем $d = \tau(q)$, при котором она не обращается нуль или бесконечность при $\delta \to 0$ [19]. Мера характеризуется всей последовательностью показателей $\tau(q)$, определяющих степенной закон, по которому изменяются вероятности $\{\mu\}$ в зависимости от δ. При этом взвешенное число клеток равно

$$N(q,\delta) = \sum_i \mu_i^q \sim \delta^{-\tau(q)},$$

где

$$\tau(q) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(q,\delta)}{\ln \delta}.$$

Из этих соотношений видно, что при $q = 0$ получаем $\mu_i^{q=0} = 1$. Тогда $N(q=0,\delta)$ – количество точек, покрывающих множество, и $\tau(0) = D$ – фрактальная размерность множества. Кроме того, с учётом $\sum_i \mu_i = 1$ получаем $\tau(1) = 0$.

Введём производную

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\sum_i \mu_i^q \ln \mu_i}{\left(\sum_i \mu_i^q\right) \ln \delta},$$

и рассмотрим

$$\left.\frac{d\tau(q)}{dq}\right|_{q=1} = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\sum_i \mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{S(\delta)}{\ln \delta},$$

где $S(\delta)$ – информационная энтропия разбиения меры M по ячейкам размера δ, которую можно записать в виде

$$S(\delta) = -\sum_i \mu_i \ln \mu_i \sim -\alpha_1 \ln \delta.$$

Показатель $\alpha_1 = -\left.\frac{d\tau(q)}{dq}\right|_{q=1}$ есть фрактальная размерность множества, на котором сосредоточена мера; он описывает скейлинговое поведение энтропии разбиения меры при изменении размера ячейки δ

[19]; с точностью до множителя она равна информационной размерности – второй из спектра обобщённых размерностей Реньи.

9. Обобщённые размерности Реньи

Для адекватного описания неоднородных фрактальных объектов (мультифракталов) можно использовать спектр обобщённых фрактальных размерностей А. Реньи [14, 25, 26].

Пусть есть фрактальный объект, ограниченный произвольной областью размера L в евклидовом пространстве размерности d. И пусть он представляет собой множество $N \to \infty$ точек, произвольно распределённых в этой области. Разобьём всю область на прямоугольные ячейки со стороной $\delta << L$ и объёмом δ^d. Ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка, определим как занятые. Пусть $N(\delta)$ – суммарное количество занятых ячеек, $n_i(\delta)$ – количество точек в i-й ячейке; определим вероятность того, что произвольная точка множества находится в ячейке i как $p_i(\delta) = \lim_{N\to\infty} (n_i(\delta)/N)$, и введём обобщённую статистическую сумму

$$Z(q,\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^q(\delta).$$

Тогда по А. Реньи [25, 26] можно ввести спектр обобщённых размерностей, характеризующих распределение точек в произвольной области, и показывающих насколько оно неоднородно. Существенно, что эти размерности связаны с показателями $\tau(q)$, описанными в предыдущем разделе, как

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1},$$

где $\tau(q) = \lim_{\delta\to 0}\left(ln Z(q,\delta)/ln\delta\right)$, а множитель $1/(q-1)$ выбран, чтобы для множеств постоянной плотности в E-мерном пространстве выполнялось равенство $D_q = E$ [19].

Действительно, если для равномерно распределённой меры в E-мерном пространстве с постоянной плотностью точек разделим пространство на $N = \delta^{-E}$ ячеек объёмом δ^E, тогда $\mu_i = \delta^E$ и

$$\sum_{i=1} \mu_i^q = \sum_{i=1}^{N} \delta^{qE} = \delta^{(q-1)E},$$

и, следовательно,

$$D_q = \frac{1}{q-1} lim \frac{ln\,\delta^{(q-1)E}}{ln\,\delta} = E.$$

Таким образом, спектр фрактальных размерностей для равномерно распределённой меры сводится к размерности пространства и не зависит от порядка момента q [19].

10. Информационная и корреляционная размерности. Свойства функции D_q

Определим смысл обобщённых размерностей Реньи D_q для $q = 1$ и $q = 2$ [14, 25, 26].

Обобщённая статистическая сумма в силу условия нормировки вероятности при $q = 1$ равна единице, что, очевидно, приводит к неопределённости $0/0$ в выражении для D_1. Раскроем неопределённость с помощью выражения

$$Z(q,\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i\, exp[(q-1)\, ln\, p_i].$$

Устремляя $q \to \infty$ и раскладывая в ряд экспоненту, с учётом условия нормировки, получим

$$Z(q\to 1,\delta) \approx \sum_{i=1}^{N(\delta)} [\,p_i + (q-1)\,p_i ln\, p_i] = 1 + (q-1)\sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i ln\, p_i.$$

Тогда

$$D_1 = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i\, ln\, p_i \,/\, ln\,\delta.$$

С точностью до знака числитель в этой формуле представляет собой энтропию $S(\delta)$ фрактального множества

$$S(\delta) = -\sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i\, ln\, p_i,$$

и

$$D_1 = -\lim_{\delta\to 0} \frac{S(\delta)}{ln(\delta)}.$$

Таким образом, величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения положения точки в некоторой ячейке, и показывает, как возрастает количество информации при стремлении размера ячейки к нулю $S(\delta) \approx \delta^{-D_1}$, и называют информационной размерностью [14, 25].

Определение D_1 через энтропию даёт возможность сравнить величины фрактальной и информационной размерностей: расчёт D_1 имеет смысл лишь в случае неоднородности фрактального множества точек, для которого энтропия меньше, чем для однородного, и, следовательно, всегда $D_1 < D_0$ (равенство, очевидно, возможно лишь для однородного случая). В теории размерности этот результат обобщён для произвольного q, и показано, что имеет место неравенство

$$D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq D_3 \ldots$$

Для определения физического смысла обобщённой размерности D_2, равной

$$D_2 = \lim_{\delta\to 0} \left(ln \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2 \,/\, ln(\delta) \right),$$

введём парный корреляционный интеграл

$$I(\delta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,\,m} \theta\left(\delta - \left| r_n - r_m \right|\right).$$

Здесь суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиус-векторами r_{n} и r_{m}, а $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда. Эта сумма определяет число пар точек (n, m), расположенных на расстоянии меньшем, чем δ, и, следовательно, будучи разделённой на N^2, равна вероятности того, что две произвольные точки обладают этим свойством.

Эту же вероятность можно найти иначе [14, 25, 26]. По определению величина p_i^2 – вероятность попадания двух точек в i-ю ячейку с размером δ. Суммируя p_i^2 по всем занятым ячейкам, получим вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества лежат внутри одной ячейки с размером δ. Следовательно, расстояние между ними будет порядка δ или меньше. Тогда, с точностью до численных коэффициентов

$$I(\delta) \approx \sum_{i=1}^{N(\delta)} p_i^2 \approx \delta^{D_2}.$$

Таким образом, обобщённая размерность D_2 определяет зависимость корреляционного интеграла I (δ) в пределе $\delta \to 0$, и называется корреляционной [25].

С помощью вероятностной интерпретации удобно выяснить смысл граничных размерностей спектра Реньи: минимальной $D_\infty = \lim_{q\to\infty} D_q$ и максимальной $D_{-\infty} = \lim_{q\to-\infty} D_q$.

Величина $D_{-\infty}$ – определяет формальную верхнюю границу интервала изменений D_q (максимальное значение имеет размерность D_0, т. к. размерности в спектре определены для неотрицательных q), размерность D_∞ – минимальная из размерностей.

При $q \to \infty$ основной вклад в обобщённую статистическую сумму, очевидно, вносят ячейки с наибольшей вероятностью заполнения, т.е. содержащие максимальное число частиц; при $q \to -\infty$, соответственно, – самые разрежённые. Тогда, с учётом описанного выше,

$$D_{-\infty} \geq D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq D_3 \geq \ldots \geq D_\infty .$$

В качестве иллюстрации рассмотрим расчёт спектра размерностей Реньи для неоднородного канторова множества [27].

Пусть два интервала, остающиеся от отрезка, образованного на предыдущем шаге итерационной процедуры построения множества, имеют длины, относящиеся как a / b, причём $a + b = 1$. Тогда, фигурирующая в выражении для статистической суммы вероятность p_i^q, распадается на два слагаемых,

$$(ap_i)^q + (bp_i)^q,$$

так что

$$Z_{k+1} = (a^q + b^q) Z_k .$$

С учётом, что $\delta(k) = 3^{-k}$, имеем

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{k\to\infty} \frac{k\, log(a^q + b^q)}{-k \log 3} = \frac{log_3(a^q + b^q)}{1-q}.$$

В частном случае $a = b = ½$ все D_q одинаковы и равны хаусдорфовой размерности множества

$$D_q = \frac{log_3(2^{-q} + 2^{-q})}{1-q} = log_3 2.$$

Для другого частного случая, когда $a = ¾$, $b = ¼$, канторово множество неоднородно и образует мультифрактал с $D_0 = log_3 2 \approx 0{,}631$, $D_1 \approx 0{,}512$, $D_2 \approx 0{,}428$, $D_\infty \approx 0{,}262$, $D_{-\infty} \approx 1{,}262$ [27].

11. Внешняя и внутренняя размерности кривой

Если применить идеи Хаусдорфа для определения размерности фрактальной кривой, и для этого строить вокруг её точек γ кружки радиуса $\delta \to 0$ и вычислять площадь их объединения $S(\delta)$ (учитывая площадь перекрытия нескольких кружков только один раз), то скорость убывания площади с уменьшением δ определит размерность кривой [28].

Действительно, для гладкой кривой $S(\delta) \sim \delta{\cdot}L$, где L – её длина, для плоской области $S(\delta) \sim \delta^0$, а для фрактала оценка площади, которая определяется шириной окрестности кривой, зависит в этом случае не от радиуса кружка, а от размера изгибов кривой. Определим длину «волнового вектора» $k = 1/\delta$, тогда отдельные «периоды» изгибов кривой укладываются в кружке размера δ, и если $a\ (k)$ при $\delta \to 0$ убывает медленнее, чем δ, то ширина полосы кружков не порядка δ, а порядка $a\,(1/\delta)$; при $a\,(1/\delta) < \delta$ полоса кружков успевает отслеживать все изгибы кривой, и является не фрактальной, а гладкой [28].

Пусть кривая γ – фрактальна. Тогда суммарная площадь объединений всех кружков $S\ (\delta) \sim a\,(1/\delta) \sim \delta$ $^{\alpha}$, и если $0 < \alpha < 1$, то $S\ (\delta)$ убывает медленнее, чем для гладкой кривой, следовательно, кривая γ занимает промежуточное положение между линией и площадью. Хаусдорф предложил определение, согласно которому размерность такого образования равна

$$\dim_{ext} \gamma = 2 - \alpha.$$

Индекс ext (сокращение от external – англ. «внешний; наружный») указывает, что при построении этой величины нам пришлось выйти за пределы самой кривой [28].

По аналогии с двумерным случаем внешняя размерность фрактальной кривой в пространстве равна

$$\dim_{ext} \gamma = 3 - 2\alpha,$$

в n-мерном –

$$\dim_{ext} \gamma = n - (n-1)\,\alpha.$$

Определим внутреннюю размерность кривой γ. Для этого разделим её на участки длиной δ и введём параметр t. Вычислим длину кривой, учитывая лишь те её изгибы, на которых t изменяется не менее чем на δ. Получим, что сумма длин этих отрезков порядка $a\,(1/\delta)\ (1/\delta) \sim \delta^{\alpha-1}$ и стремится к бесконечности с уменьшением δ [28].

С чем связана эта расходимость. Предположим, вслед за авторами [28], что мы ошиблись в определении размерности нашего объекта и исследуем не кривую, а пытаемся определить одним параметром плоскость. Такая параметризация, конечно, плоха – линия всё более плотно и с самопересечениями заполняет плоскость, образуя на ней подобие решётки. Расстояние между её полосами $\sim \delta$, а число квадратов $\sim 1/\delta^2$. Размеры звеньев ломаной, плотно устилающей плоскость, малы, но число их очень велико: сумма длин отрезков ломаной $\sim \delta \cdot 1/\delta^2 \to \infty$. И это естественно: так как область двумерна, нужно подсчитывать не её длину, а площадь, т.е. суммировать не длины сторон, а квадраты длин, сумма которых конечна [28].

В случае дробной размерности нужно суммировать некоторые μ-е степени длин. Для конечности получающихся сумм нужно положить $\mu = 1/\alpha$. Размерность этой суммы равна $см^{1/\alpha}$, а само число $1/\alpha$ является размерностью. Тогда в качестве внутренней размерности фрактала естественно принять число

$$\dim_{int} \gamma = 1/\alpha.$$

Эта формула сохраняется и для кривых в пространстве любого числа измерений.

Внешняя размерность кривой фрактального типа на плоскости изменяется от 1 до 2 (размерность пространства), а внутренняя – от 1 до бесконечности, и совпадают они только для тривиального случая гладкой кривой. В общем случае внешняя размерность фрактальной кривой изменяется от размерности гладкого объекта до размерности пространства, а внутренняя – от размерности гладкого объекта до бесконечности [28].

«Очевидно, что в разных физических задачах нужно пользоваться разными определениями фрактальной размерности. Например, если мы интересуемся задачей адсорбции на тонкую нитку, то для нас важно знать, сколько атомов сможет поместиться вблизи нитки, т.е. внешнюю размерность. Если же мы хотим оценить вес нитки, то важна размерность внутренняя» [28].

11. Массовые размерности

В структуре вещества всегда можно выделить масштаб, равный корреляционной длине ξ, т. е. расстоянию, вне которого частицы вещества ведут себя статистически независимо, и которое определяет верхнюю границу промежуточной асимптотики, а значит, и границу между интенсивным и экстенсивным поведением плотности вещества тела. Действительно, при $l < \xi$ масса тела определяется соотношением $M \sim l^D$, где D – фрактальная размерность, и выражением $M \sim l^d$ при $l > \xi$ (здесь d – размерность пространства). Тогда плотность можно определить как

$$\rho = \begin{cases} M \; / \; l^d \sim l^{D-d}, & \text{при } l \leq \xi \\ const, & \text{при } l > \xi\,. \end{cases}$$

Воспользуемся этим соотношением, и рассчитаем, для примера, массу кубика сахара рафинада с ребром L. Существует альтернатива: определить массу через среднюю плотность ρ как

$$m = \rho L^3,$$

или учесть, что песчинки сахара образуют статистически самоподобную структуру, и тогда масса равна

$$m = \rho_c L^{Dm},$$

где ρ_c – плотность сахара, D_m – массовая размерность.

В отличие от «сплошного» тела во фрактальном объекте средняя плотность зависит от объёма, т.е. является экстенсивной физической величиной, убывающей при его возрастании. Последнее обстоятельство легко объясняется редко используемым, «ненаучным» определением фрактала, предложенным Б. Мандельбротом в частной беседе: фрактал как физическое тело – объект, в котором присутствуют дыры всех размеров. Действительно, средняя плотность головки швейцарского сыра меньше средней плотности отрезанного от неё кусочка: в нём и дыр меньше, и размеры их меньше.

Из равенства

$$\rho L^3 = \rho_c L^{Dm}$$

следует, что показатель D_m, равный

$$D_m = 3 - ln\,(\rho_c / \rho) / ln\, L\,,$$

определяет массовую фрактальную размерность через истинную и среднюю плотности сахара (что особенно удобно в экспериментальных исследованиях), и характерные размеры тела.

Массовую размерность D_M можно определить и по-другому. Пусть нужно рассчитать массу фрактального шара. В этом случае зависимость массы от радиуса ведёт себя как

$$M\,(R) \sim R^{D_M},$$

где D_M – массовая фрактальная размерность. Очевидно, что в пределе

$$D_M = \lim_{R \to \infty} (ln M(R) / ln R).$$

Так определённые массовые размерности, очевидно, являются глобальными характеристиками.

Для строго самоподобных математических фракталов, например, ковра Серпинского или канторовой пыли, массовая размерность D_M совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича, потому что определяется размерностью подобия скейлингового закона, которая задаётся алгоритмом, порождающим фрактал [29].

12. Химическая размерность

Если рассматривать перколяционный кластер как решёточную модель ветвящейся полимерной молекулы, то узлы решётки при этом соответствуют мономерам, расстояния между узлами – химическим связям, а число шагов по кластеру – количество химических связей вдоль пути по молекуле от i-го мономера к j-му – можно определить как химическое расстояние. Размерность, связанная с этим расстоянием, называется химической, или размерностью связности D_{ch} [6].

Для определения D_{ch} рассмотрим шар B_{ch} как множество узлов, для которых $R_{ch} \leq n$, и определим химическую размерность как показатель такой, что количество узлов N, принадлежащих B_{ch}, растёт как $N \sim n^{D_{ch}}$.

Величина D_{ch} есть отношение двух размерностей – фрактальной размерности кластера D и размерности D_R кривой, длина которой определяет химическое расстояние. Для двумерного случая численно определённое значение D_{ch} равно 1.72, следовательно, размерность «геодезической» равна $D_R = D / D_{ch} \approx 1.10$; видно, что это «не слишком изломанная линия» [6].

13. Эффективная размерность

Эффективная размерность – понятие, которое выражает соответствие между математическими множествами и модельными объектами, и которому, по мнению Б. Мандельброта, не следует давать точного определения [20].

Как составляющая модельного описания, эффективная размерность обладает «особым взглядом». Известно, что макроскопические объекты, даже такие «тщедушные» как крылышки пчелы, семена клубники, шёлковая нить и паутина являются трёхмерными телами. Но в математических моделях можно полагать, что крылышки имеют размерность два, что размерность семян – нуль, нити – один, а паутины – между 1 и 2.

Субъективная составляющая эффективной размерности хорошо видна в примере Б. Мандельброта [20]. «Пусть есть шар диаметром 10 см, скрученный из толстой нити диаметром 1 мм. Удалённому наблюдателю клубок покажется фигурой с нулевой размерностью, т.е. точкой. С расстояния в 10 см шар из нитей выглядит как трёхмерное тело, а с расстояния в 10 мм – как беспорядочное переплетение одномерных нитей. На расстоянии в 0,1 мм каждая нить превратится в толстый канат, а вся структура целиком опять станет трёхмерным телом. На расстоянии 0,01 мм «канаты» превратятся в переплетение волокон, и шар снова станет одномерным, и так далее. Наконец, когда клубок превратится в скопление, состоящее из какого-то конечного числа точек, имеющих размеры, сравнимые с атомными, его размерность снова станет равной нулю» [20].

14. Вместо заключения

Физическим объектам и процессам всегда может быть сопоставлен набор размерностей, характеризующих их свойства; выбор размерностей, естественно, определяется целью исследования и существом решаемой задачи.

Понятие размерности стимулировало исследования и прояснило существенные черты ряда физических систем, позволило сформулировать новые модели и понятия, достичь более полного понимания многих давно изучаемых явлений [6, 7, 20, 28].

Литература

1. Poincaré H. Pourquoi l'espace à trois dimensions. // Revue de métaphysique et de morale. – 1912. – V. 20. – P. 483-504; перевод: Пуанкаре А. Почему пространство имеет три измерения. / В кн. А. Пуанкаре О науке. – М.: Наука, 1990. – С. 555-579.
2. Lebesgue H. Sur la non applibilité de deux domaines appartenant à des espaces à n et $n + p$ dimensions (extrait d'une lettre à M.O. Blumental). // Math. Ann. – 1911. – V. 70. – P. 166-168.
3. Brouwer L.E.J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff. // Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik. – 1913. – V. 142. – P. 146-152.
4. Математический энциклопедический словарь. – М.: СЭ, 1988. – 848 с.
5. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ГИИЛ, 1948. – 232с.
6. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. — М.: Мир, 1982. — 176 с.
7. Соколов И.М. Размерности и другие критические показатели в теории протекания. // УФН. — 1986. — Т. 150, вып. 2. — С. 221-255.
8. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения. / Итоги науки и техники. – Серия Теория вероятностей. Математическая статистика. – Т. 24. – М.: ВИНИТИ, 1986. – С. 53-110.
9. Козлов С.М. Геометрические аспекты усреднения. // УМН. – 1989. – Т. 44, вып. 2. – С. 79-120.
10. Меньшиков М.В. Оценки перколяционных порогов для решеток в R^n. // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 284, № 1. – С. 36-39.
11. Жиков В.В. Асимптотические задачи, связанные с уравнением теплопроводности в перфорированных областях. // Математический сборник. – 1990. – Т. 181, вып. 10. – С. 1283-1305.
12. Физический энциклопедический словарь. – М.: СЭ, 1984. – 944 с.
13. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965. – 456 с.
14. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – М.: ЛКИ, 2010. – 280 с.
15. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. / В кн. А. Пуанкаре О науке. – М.: Наука, 1990. – С. 38-78 с.
16. Ehrenfest P. In that way does it becomes manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? // Proceedings of Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. – 1918. – V. 20, iss. 1. – P. 200-209; reprinted in Paul Ehrenfest Collected Scientific Papers. / Ed. by M.J. Klein. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1959. – P. 400-409.
17. Пуга В.А. Мультиразмерное гравитационное взаимодействие. Кривые вращения галактик. // ЖЭТФ. – 2014. – Т. 146, вып. 3 (9). – С. 500-512.
18. Турышев С.Г. Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований. // УФН. – 2009. – Т. 179, вып. 1. – С. 3-34.
19. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
20. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002. – 656 с.
21. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. Е-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах. // УМН. – 1959. – Т 14, вып. 2 (86). – С. 3-86.
22. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251 с.

23. Kahane J.P., Salem R. Ensembles parfaits et series trigonometriques. – Paris: Hermann, 1963. – 192 p.
24. Pontrjagin L., Schnirelman L. Sur une propriété métrique de la dimension. // Ann. Math. – 1932. – V. 33. – P. 156-162; перевод Понтрягин Л., Шнирельман Л. Об одном метрическом свойстве размерности. / В кн. [5], с. 210-218.
25. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 128 с.
26. Rényi A. Probability theory. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. – 666 p.
27. Кузнецов С.П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2006. – 356 с.
28. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика. // УФН. – 1985. – Т. 146, вып. 3. – С. 493-506.
29. Шрёдер М. Фракталы, хаос, степенные законы. – Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 528 с.

УДК 66.021.001.57:56/59.004.18

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ БЛОКА ЛЬДА

Бурдо О.Г., Тришин Ф.А., Герега А.Н.
Одесская национальная академия пищевых технологий, г. Одесса

На основе анализа экспериментальных данных показано, что поверхность блока льда имеет фрактальные свойства. Предложена теплофизическая модель массопереноса с учетом фрактальных особенностей поверхности блока. Анализируется специфичный двухфазный подслой, состоящий из раствора и разномасштабных элементов льда, рассмотрены конкурирующие процессы, формирующие механизмы кристаллизации в условиях специфичной структуры поверхности.

By analyzing experimental data, authors showed that surface of the ice block have fractal properties. Thermo-physical model of mass transfer on fractal surface of ice block was proposed. Two-phase sublayer consisting of a solution and multiscale ice elements are analyzed. The competing processes which forming mechanisms crystallization in the specific conditions was considered.

Ключевые слова: кристаллизация, моделирование, блочное вымораживание, фрактальная поверхность.

Вступление. Процессы низкотемпературного разделения пищевых растворов становятся все более привлекательными для современных технологий. Особый интерес представляют аппараты блочного вымораживания [1-3], которые реализуют принцип адресной доставки энергии, направленной кристаллизации. Они просты в изготовлении, отличаются высокой энергетической эффективностью и сохранением функциональных свойств сырья. Анализ принципов математического моделирования, представленный в [4], показал, что многочисленные предложения не учитывают влияние современных методов интенсификации массопереноса при кристаллизации, не приемлемы при протекании комбинированных процессов. Нет корректных представлений и в простых эмпирических моделях по кинетике кристаллизации воды на поверхности ледяной фазы.

Одним из основных параметров, которые определяют поток энергии или массы в задачах переноса, является площадь поверхности контакта фаз, участвующих в процессе. Однако, как правило, этот параметр принимается в кинетических уравнениях постоянным, его структура и изменения во времени не учитываются. В работе поставлена задача учесть фактор поверхности в задачах массопереноса. Рассматривается процесс формирования блока льда из раствора. Такая проблема важна при моделировании аппаратов блочного вымораживания [2].

Физическая модель процесса блочного вымораживания. Рассмотрим процесс формирования блока льда на горизонтальной плоской поверхности (рис.1).

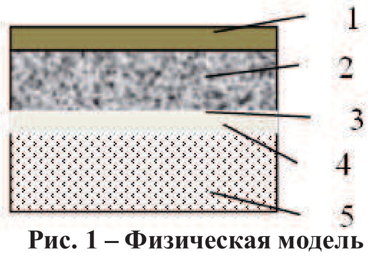

Рис. 1 – Физическая модель процесса вымораживания.

На поверхности 1, температура которой ниже криоскопической температуры раствора 5, формируется твердая фаза (лед) 2. Поверхность контакта фаз 3 и раствор разделяет диффузионный пограничный слой 4. Именно этот слой определяет интенсивность массообменных процессов, кинетику роста блока льда. Условия естественной конвекции, характерные для рассматриваемого процесса, не имеют факторов эффективного влияния на интенсификацию процесса льдообразования.

Кинетика формирования блока льда определяется уравнением массоотдачи