

INVESTIGATION OF INFLUENCE OF WEIGHT MATRICES ON ROBUST STABILITY OF OPTIMAL CONTROL SYSTEM

N. Lutska

National University of Food Technologies

Key words:

*Optimal control system
Robust stability
Thermal facility
Weighting matrix
Integral quadratic criterion
Eigenvalues*

ABSTRACT

This paper examines the impact of weighting matrixes of integral quadratic criterion for optimal control of robust stability of the optimal control system, which is synthesized by the algorithm of analytical design of optimal controllers. Typical thermal multidimensional objects are taken as a control object, the mathematical model of which has different dimensions and eigenvalues. The survey results will help to build a more effective system of optimal control of industrial objects.

Article history:

Received 15.10.2014
Received in revised form
23.10.2014
Accepted 04.11.2014

Corresponding author:

N. Lutska
E-mail:
lutskaya@yandex.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВАГОВИХ МАТРИЦЬ НА РОБАСТНУ СТІЙКІСТЬ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Н.М. Луцька

Національний університет харчових технологій

У статті досліджено вплив вагових матриць інтегрально-квадратичного критерію оптимального керування на робастну стійкість оптимальної системи керування, що синтезована за алгоритмом аналітичного конструювання оптимальних регуляторів. Як об'єкт керування взято типові теплові багатовимірні об'єкти, математична модель яких має різні розмірність і власні значення. Результати дослідження надають можливість набувати більш ефективну систему оптимального керування технологічними об'єктами.

Ключові слова: *оптимальна система керування, робастна стійкість, тепловий об'єкт, вагові матриці, інтегрально-квадратичний критерій, власні значення.*

Вступ. Практика використання методів оптимального керування [1] для технологічних об'єктів показала, що багатовимірні системи, які синтезовані

за квадратичним критерієм якості, іноді втрачають не тільки оптимальність, а й стійкість. Це пов'язано з чутливістю параметрів математичної моделі об'єкта, що обґрунтовується невизначеністю останніх, тому при проектуванні даних методів доцільною є перевірка стійкості синтезованої системи в заданому класі невизначеності технологічного об'єкта з використанням методів робастної стійкості [2]. Важливим питанням при цьому залишається питання вибору вагових матриць інтегрально-квадратичного критерію та їх вплив на робастну стійкість синтезованої системи керування.

Мета статті. Дослідження впливу вагових матриць інтегрально-квадратичного критерію керування на робастну стійкість оптимальної системи.

Методика дослідження. Синтез оптимального регулятора виконаний для типового теплового об'єкта, причому змінювали як розмірність об'єкта, так і власні значення матриці об'єкта.

Для теплового технологічного об'єкта, математична модель якого описує множину температур, при проектуванні системи керування невизначеності можна поділити на два види: невизначеності в описі математичної моделі (припущення, лінеаризація, дискретизація); невизначеності у функціонуванні технологічного об'єкта (невизначеність зовнішнього середовища, непередбачувані невизначеності).

При описі математичної моделі об'єкта всі названі невизначеності необхідно описати певним класом невизначеностей. При синтезі оптимального керування за алгоритмом аналітичного конструювання оптимальних регуляторів, як правило, математична модель об'єкта подається в просторі змінних стану:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + Bu(t), \quad (1)$$

де x — n -вимірний вектор координат стану об'єкта, що описує зміну температур з часом t ; u — m -вимірний вектор керувань; A_0, B — стаціонарні матриці відповідних розмірностей.

Основу невизначеності матриці A_0 складають постійні часу математичної моделі об'єкта, що, у свою чергу, залежать від зміни об'єму й теплоємності речовин. Знаючи максимальне та мінімальне відхилення останніх, матрицю об'єкта можна описати у вигляді інтервального матричного сімейства:

$$A(q) = A_0 + \Delta, \quad |\Delta_{ij}| \leq \gamma, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де γ — розмах невизначеності.

Зрозуміло, що чим більший розмах невизначеності об'єкта γ , тим більша ймовірність втрати стійкості оптимальної системи, що замкнена від'ємним зворотнім зв'язком. Для теплової технологічної системи керування найповнішим критерієм функціонування системи є інтегрально-квадратичний критерій:

$$I(u) = \int_{t_0}^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) dt \rightarrow \min_u, \quad (3)$$

що враховує мінімізацію відхилення необхідних або вимірюваних температур y (враховуючи, що вимірюються саме необхідні температури) від заданих значень (перша складова) та мінімізацію енергетичних витрат (друга складова).

Вплив кожної складової на критерій задається коефіцієнтами вагових матриць Q та R ($Q \geq 0, R > 0$). Загальної методики вибору коефіцієнтів вагових матриць на сьогодні не існує, вони обираються розробником залежно від вимог щодо якості системи. Але відкритим залишається питання стійкості та робастної стійкості таких систем.

Відповідно до методики аналітичного конструювання оптимальних регуляторів, керування використовує зворотний зв'язок:

$$u(t) = Kx(t), \quad K = -R^{-1}B^T S, \quad (4)$$

де K — матричний коефіцієнт підсилення регулятора (розмірність $m \times n$), причому матриця K не залежить від часу; S — симетрична матриця розмірності $n \times n$, яка визначається з алгебраїчного рівняння Ріккати виду:

$$SA_0 + A_0^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \quad (5)$$

Чим більші елементи матриці підсилення регулятора K , тим менший запас стійкості, враховуючи, що запас стійкості — це максимальне власне значення замкненої системи $\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} (-\operatorname{Re} \lambda_i)$, де λ — вектор власних значень системи, що визначається з рівняння: $\det(A_c - \lambda E) = 0$, $A_c = (A_0 - BK)$.

Результати і обговорення. Досліди проводилися для теплових об'єктів з різними характеристиками:

- різний порядок об'єкта;
- різні власні значення об'єкта, зокрема від'ємні, додатні дійсні та комплексні.

Враховуючи, що власні значення об'єкта приймають як від'ємні, так і додатні значення, для спрощення розрахунків: визначення робастної стійкості системи використаний імовірнісний підхід [2, 3], проведений шляхом рівномірної випадкової генерації номінальної матриці об'єкта A (2) в межах заданого розмаху невизначеності (матриця K не змінювалася).

Дослід 1. На рис. 1 показано, як змінюється запас стійкості оптимальної системи при збільшенні діагональних елементів вагових матриць Q та R без врахування невизначень (номінальна система) для теплового об'єкта четвертого порядку з двома управляючими діями, причому власні значення об'єкта мають три від'ємні значення, два з яких комплексні попарно-спряжені й одне додатне. При нульових значеннях елементів матриці Q запас стійкості системи збігається з від'ємним дійсним власним значенням об'єкта, при зростанні співвідношення елементів матриць Q/R запас стійкості дещо зменшується, при $Q/R \geq q_1$ розміщується на кривій, що має комплексні власні значення. При визначеному значенні $Q/R = q_1$ система досягає найменшого запасу стійкості, після якого починається нарощування запасу стійкості до певної постійної величини (рис. 2).

При проведенні дослідів для системи з інтервальною невизначеністю виявлено (рис. 3), що на проміжку (q_1, q_2) імовірність стійкості системи найменша.

Дослід 2. Інша ситуація спостерігається у стійкого об'єкта (для прикладу взято тепловий об'єкт 10-го порядку з дійсними від'ємними власними значеннями та чотирма управляючими діями). На рис. 4 видно, що при $Q=0$ запас стійкості системи збігається із запасом стійкості об'єкта, при збільшенні Q/R

запас стійкості зростає за логарифмом (відповідно, найбільше власне значення системи спадає) (рис. 5). Система з невизначеностями буде мати найгіршу ймовірність при $Q=0$ і чим більший розмах невизначеності, тим менша ймовірність (рис. 6). Завдяки стійкості об'єкта ймовірність стійкості такої системи велика навіть при значному розмаху невизначеності.

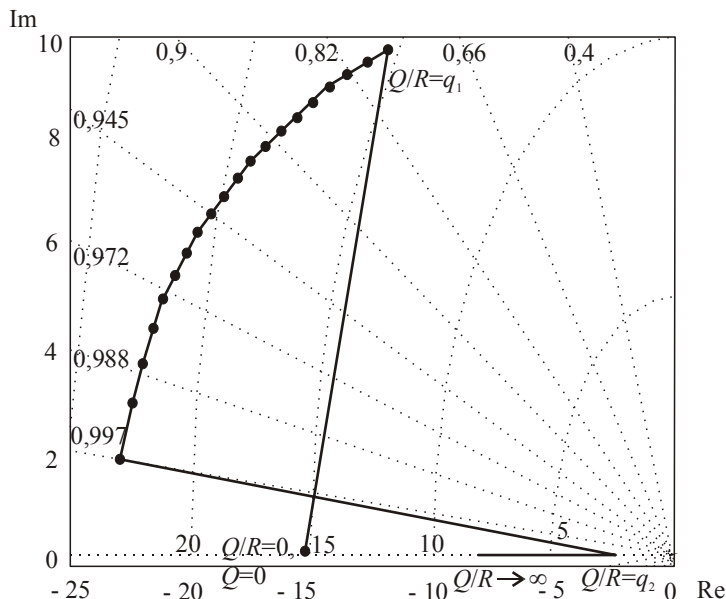


Рис. 1. Запас стійкості номінальної системи при зміні елементів матриць Q і R на комплексній площині ($n=4$)

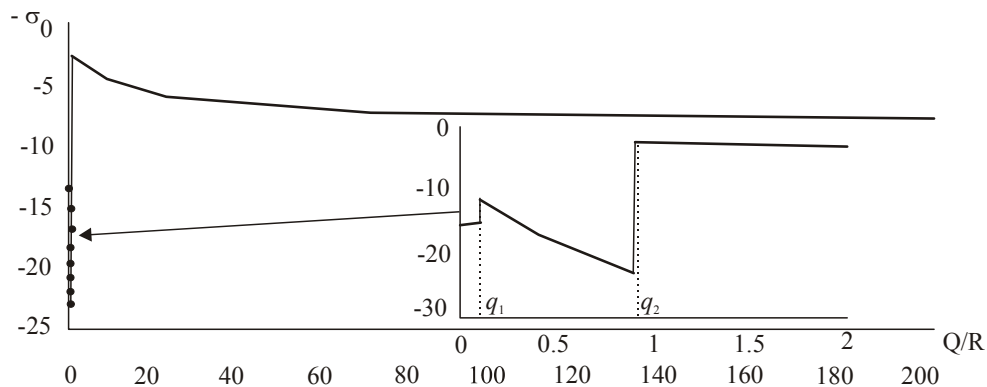


Рис. 2. Запас стійкості номінальної системи при зміні елементів матриць Q і R ($n=4$)

Дослід 3. Для об'єкта четвертого порядку ($n=4$) з власними значеннями $\lambda_{\text{об'єкта}} = (-0,3 - 0,2 + i - 0,1 - i)^T$ отримано такі результати: при $Q=0$ найбільше власне значення збігається з точкою $(-0,2+i)$, друга точка різко переходить на $-i$ зі збільшенням запасу стійкості, при збільшенні співвідношення Q/R запас стійкості зростає з постійною швидкістю (найменше власне значення комплексне на всьому проміжку). Якщо $\lambda_{\text{об'єкта}} = (-0,3 - 0,2 + i - 0,3 - i)^T$,

то при $Q=0$ найбільше власне значення збігається з точкою $(-0,3-i)$ і поступово зростає, тобто без розривів.

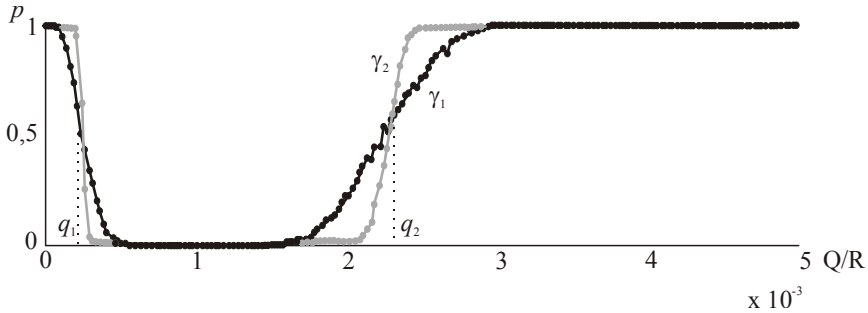


Рис. 3. Імовірність стійкості системи з інтервальною невизначеністю при зміні Q і R ($n=4$) при $\gamma_1 > \gamma_2$

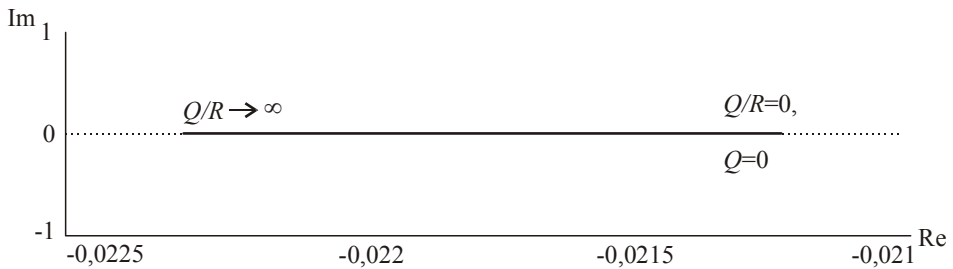


Рис. 4. Запас стійкості номінальної системи при зміні елементів матриць Q і R на комплексній площині ($n=10$)

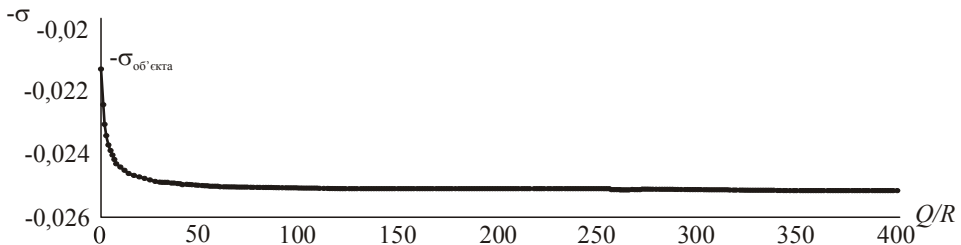


Рис. 5. Запас стійкості номінальної системи при зміні елементів матриць Q і R ($n=10$)

Дослід 4. Для об'єкта четвертого порядку з $\lambda_{об'єкта} = (-0,3 - 0,1 + i - 0,1 - i)^T$ при $Q=0$ найбільше власне значення збігається з точкою $(-0,1+i)$, а при збільшенні співвідношення Q/R запас стійкості зростає як на проміжку (q_1, q_2) рис. 1 (найменше власне значення комплексне), потім при $Q/R=1$ різко збільшується (найменше власне значення дійсне) та починає зростати з постійною швидкістю (рис. 1). Імовірність стійкості системи з невизначеністю як другий проміжок на рис. 3 без точки q_1 , а $q_2=1$.

Дослід 5. Для об'єкта з $\lambda_{об'єкта} = (0,3 \ 0,1 + i \ 0,1 - i)^T$ при $Q=0$ найбільше власне значення збігається з точкою $(-0,1+i)$, а при збільшенні співвідношення Q/R запас стійкості зростає як на проміжку (q_1, q_2) (найменше власне значення комплексне), потім при $Q/R=1$ різко збільшується (найменше власне значення

дійсне) та починає зростати з постійною швидкістю. Ймовірність стійкості системи з невизначеністю як другий проміжок на рис. 3 без точки q_1 , а $q_2 = 1$.

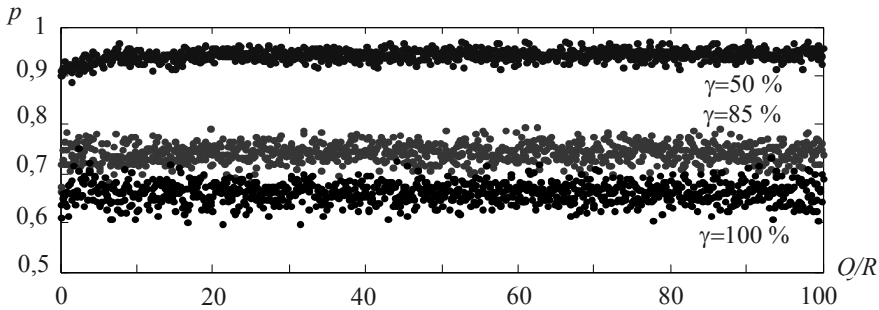


Рис. 6. Імовірність стійкості системи з інтервальною невизначеністю при зміні Q і R ($n=10$)

Висновки

Теплові об'єкти функціонують в умовах параметричної невизначеності, тому при синтезі оптимальної системи керування цими об'єктами необхідно перевіряти якість і стійкість системи. Невизначеності теплових об'єктів можуть бути описані інтервальними залежностями, але на робастну стійкість системи, крім розмаху невизначеності матриці об'єкта, також впливає вибір коефіцієнтів вагових матриць інтегрально-квадратичного критерію.

Проведено ряд дослідів для об'єктів з різним порядком і різними власними значеннями та визначені співвідношення вагових матриць, на яких оптимальна система має найменшу або найбільшу ймовірність робастної стійкості. Використовуючи отримані результати при виборі вагових матриць критерію керування, можна підвищити ефективність системи оптимального керування технологічними об'єктами.

Література

1. Craven D. Control and Optimization, Chapman & Hall. — London, 1995. — P. 291—302.
2. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
3. Луцька Н.М. Синтез модального регулятора для системи керування колонною дифузійною установкою в умовах параметричної невизначеності / Н.М. Луцька, Н.А. Заєць // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Автоматика, вимірювання та прилади. — 2012. — № 741. — С. 54—59.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под. ред. К.А. Пупкова и Е.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.С. Баумана, 2004. — 744 с.
5. Sanchez-Pena R. and Sznajder M. Robust system. Theory and application. — Wiley & Sons, Ins, 1998. — P. 487.

6. Луцька Н.М. Дослідження та синтез оптимальних регуляторів для систем автоматизації технологічних комплексів неперервного типу [Текст]: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.07 / Луцька Наталія Миколаївна; Національний ун-т харчових технологій. — К., 2006. — 16 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ НА РОБАСТНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Н.Н. Луцкая

Национальный университет пищевых технологий

В статье исследуется влияние весовых матриц интегрально-квадратичного критерия оптимального управления на робастную устойчивость оптимальной системы управления, синтезированной по алгоритму аналитического конструирования оптимальных регуляторов. В качестве объекта управления взято типичные тепловые многомерные объекты, математическая модель которых имеет различные размерность и собственные значения. Результаты исследования помогут построить эффективную систему оптимального управления технологическими объектами.

Ключевые слова: *оптимальная система управления, робастная устойчивость, тепловой объект, весовые матрицы, интегрально-квадратичный критерий, собственные значения.*