УДК 531.5:621.1

БОДНАРУК В.І., ДИМИТРАЩУК В.Т.,
ПОХОДЖАЙ Р.Я., ЩЕРБИНА Л.А.

ВПЛИВ ГРАВІТАЦІЇ НА УМОВИ ТЕПЛООБМІНУ

Розглянуто задачу природної конвективної тепловіддачі від нагрітої вертикальної поверхні, температура якої відрізняється від температури оточуючого середовища, а течія вважається усталеною і ламінарною, фізичні властивості газу – постійними. Отримано середні значення коефіцієнтів тепловіддачі для вертикальної ($\bar{h}_b(x) \approx 10{,}1$ Вт/(м^{2}К)) і горизонтальної ($\bar{h}_r(x) \approx 6$ Вт/(м^{2}К)) поверхонь.

Процес стаціонарної ламінарної природної конвекції біля нагрітих поверхонь описується основними законами збереження маси, кількості руху і енергії. Основні рівняння одержуються з цих законів шляхом їх застосування до деякого контрольного об'єму, який являє собою виділену в просторі область, через межі якої може переноситися маса, кількість руху і енергії і всередині якої може відбуватися зміна цих фізичних величин.

Основні рівняння природної конвекції утворюють систему еліптичних диференційних рівнянь в частинних похідних. Головні труднощі розв'язку цих рівнянь пов'язані з необхідністю враховувати зміну густини ρ в залежності від температури або концентрації, а також з еліптичністю системи рівнянь в частинних похідних. Для суттєвого спрощення цих рівнянь звичайно роблять різні наближені припущення: наближення Буссінеска [1, 2], наближення приграничного шару [2].

Розглянемо задачу природної конвективної тепловіддачі від нагрітої вертикальної поверхні, температура якої відрізняється від температури оточуючого середовища. Течія вважається усталеною і ламінарною, а фізичні властивості газу – постійними. В'язкою дисипацією нехтуємо і вважаємо, що потік не містить в собі джерел тепла.

При вільній конвекції в газі, зумовленій лише різницею температур, на поверхні твердих тіл утворюється приграничний шар [2]. Для розрахунку теплообміну при вільній конвекції можна застосувати рівняння нерозривності, кількості руху і теплового потоку в приграничному шарі, які в цьому випадку мають вигляд:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=g\beta(T-T_0)+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{3}$$

де v_x, v_y – компоненти швидкості (вісь x напрямлена уздовж вертикальної поверхні, y – перпендикулярно до неї); g – прискорення сили тяжіння; β – коефіцієнт теплового об'ємного розширення газу; T_0 – температура оточуючого середовища; $\nu=\mu/\rho$ – коефіцієнт кінетичної в'язкості газу, ν – в'язкість газу; $a=\chi/c_0\rho$ температуропровідність газу, χ – теплопровідність, $c_0\rho$ – питома теплоємність газу.

У далині від вертикальної поверхні газ знаходиться у стані спокою, тому що середовище досить протяжне. Газ, який прилягає до поверхні зразка, в силу умови прилипання, також є нерухомим. Внаслідок цього течія існує тільки в шарі, розміщеному поблизу поверхні, а по обидві сторони від цього шару швидкість течії дорівнює нулю (рис.1).

Температура змінюється більш монотонно – від T_s, до T_0, де T_s – температура поверхні зразка. Отже, граничні умови задачі мають вигляд:

$$\begin{gathered} v_x=v_y=0,\quad T=T_s(x)\ \text{при}\ y=0 \\ v_x=0,\quad T\to T_0\ \text{при}\ y\to\infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Поставлену вище задачу можна розв'язати методом змінної подібності (автомодельної змінної) [3]. Введемо функцію струму ψ таким чином, щоб задовольнялося рівняння неперервності (1):

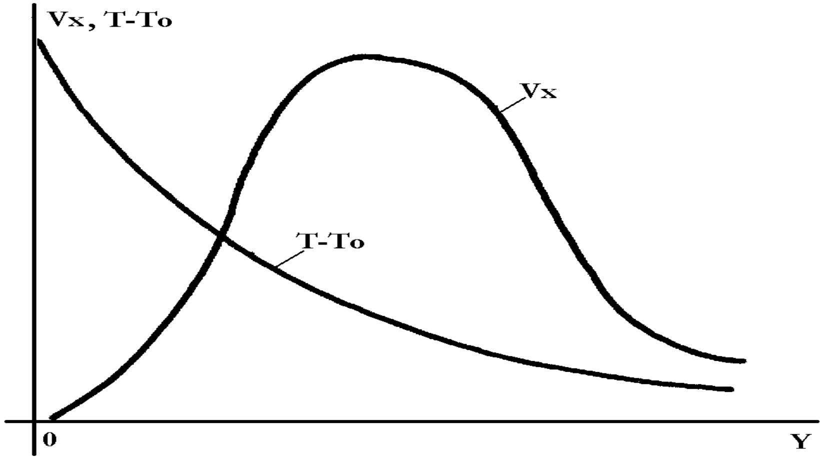

Рис.1. Розподіл швидкості і температури при природній конвекції біля вертикальної поверхні.

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{5}$$

і застосуємо перетворення подібності:

$$\eta(x,y) = yc(x)$$
$$\psi(x,y) = \nu\, d(x) f(z) \tag{6}$$

Тут c(x), d(x) – невідомі поки що функції, $f(\eta)$ – безрозмірна функція струму, η – автомодельна змінна.

Крім того, температуру T в автомодельному розв'язку зображають в такому вигляді, щоб узагальнена температура залежала б тільки від η :

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \tag{7}$$

Рівняння (2) і (3), із врахуванням (5) – (7), набувають вигляду:

$$f'''(\eta) + \frac{a(x)}{dx \cdot c^3(x)} \cdot \frac{g\beta}{\nu^2} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \theta(\eta) + \frac{d'(x)}{c(x)} f(\eta) \times$$

$$\times f''(\eta)-\left[\frac{d'(x)}{c(x)}+\frac{d(x)c'(x)}{c^2(x)}\right]\cdot f'^2(\eta)=0, \tag{8}$$

$$\frac{\theta''(\eta)}{P_r}+\frac{d'(x)}{c(x)}f(\eta)\cdot\theta'(\eta)-\frac{d(x)a'(x)}{a(x)c(x)}\cdot f'(\eta)\cdot\theta(\eta)=0, \tag{9}$$

де a(x)=T_S,(x)–T_0 – відома функція (розподіл температури уздовж поверхні зразка), $P_r = \nu/a$ – число Пландтля.

Умови автомодельності вимагають, щоб параметри, які входять в різні члени рівнянь, були постійними або залежали б тільки відη. Оскільки у не входить ні в один з коефіцієнтів при функціях f і θ, то вони не можуть залежати від η, тому будемо вимагати. Щоб всі коефіцієнти були постійними величинами. Виходячи з цій умови знаходимо функції c(x) і d(x):

$$c(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{g\beta x^3 a(x)}{4\nu^2}\right]^{1/4}, \tag{10}$$

$$d(x)=4\cdot\left[\frac{g\beta x^3 a(x)}{4\nu^2}\right]^{1/4}. \tag{11}$$

Для лінійного закону розподілу температури уздовж поверхні

$a(x)+\frac{\Delta T}{l}\cdot x$ (l – довжина зразка), маємо:

$$f'''(\eta)+4f(\eta)\cdot f''(\eta)-4f'^2(\eta)+\theta(\eta)=0, \tag{12}$$

$$\frac{\theta''(\eta)}{P_r}+4f(\eta)\cdot\theta'(\eta)-4f'(\eta)\cdot\theta(\eta)=0. \tag{13}$$

Граничні умови для цих рівнянь:

$$f(0)=f'(0)=f'(\infty)=\theta(\infty)=1-\theta(\infty)=0. \tag{14}$$

Рівняння (12) в (13) є вже звичайними диференціальними рівняннями, взаємопов'язаними одне з одним, тому що в обидва рівняння входить $\theta(\eta)$, і їх потрібно розв'язувати сумісно.

Для горизонтальної поверхні рівняння нерозривності і теплового потоку мають той же вигляд, що і відповідні рівняння (1) і (2) для вертикальної поверхні. Рівняння кількості руху в цьому випаду записується в такому вигляді:

$$v_x \frac{\partial v_x}{dx} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_d}{\partial x}, \qquad (15)$$

$$g\beta(T - T_0) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_d}{\partial y}, \qquad (16)$$

де P_d – динамічний тиск, який в даному випаду є основним рушійним механізмом, що утворює потік пограничного шару.

Для розв'язання системи рівнянь (15), (16) і (3) методом автомодельної змінної необхідно допустити, що $P_d = P(\eta)b(x)$, де $b(x)$ – невідома функція, яка, як і функції $c(x)$, $d(x)$, знаходиться з умов автомодельності.

В автомодельному уявленні дістанемо:

$$f'''(\eta) + \frac{d_1'(x)}{c_1(x)} f(\eta)\cdot f''(\eta) - \left[\frac{d_1'(x)}{c_1(x)} + \frac{d_1'(x)c_1'(x)}{c_1^2(x)}\right] \times$$
$$\times f^2(\eta) - \frac{b'(x)}{d_1(x)c_1^3(x)} \cdot \frac{P(z)}{\nu^2 \rho} - \frac{b(x)c_1'(x)}{d_1(x)c_1^4(x)} \cdot \frac{\eta P'(\eta)}{\nu^2 \rho} = 0, \qquad (17)$$

$$g\beta\rho\cdot \frac{a(x)}{b(x)c_1(x)} \cdot \theta(\eta) = P'(\eta), \qquad (18)$$

$$\frac{\theta''(\eta)}{P_r} + \frac{d_1'(x)}{c_1(x)} f(\eta)\cdot\theta'(\eta) - \frac{d_1(x)\cdot a(x)}{a(x)\cdot c_1(x)} \cdot f'(\eta)\cdot\theta(\eta) = 0, \qquad (19)$$

З умов постійності параметрів, що входять в різні члени рівнянь (17)–(19), знаходимо функції $b(x)$, $c_1(x)$ і $d_1(x)$:

$$b(x) = \frac{5\nu^2\rho}{x^2} \cdot \left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{5\nu^2}\right)^{4/5}, \qquad (20)$$

$$c_1(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{5\nu^2}\right)^{1/5}, \qquad (21)$$

$$d_1(x) = 5 \cdot \left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{5\nu^2} \right)^{1/5}, \qquad (22)$$

Для лінійного розподілу температури одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$f'''(\eta) + 4f(\eta) \cdot f''(\eta) - 3f'^2(\eta) - \frac{6}{5}P(\eta) + \frac{1}{5}\eta \cdot P'(\eta) = 0, \qquad (23)$$

$$P'(\eta) = \theta(\eta), \qquad (24)$$

$$\frac{\theta''(\eta)}{P_r} + 4f(\eta) \cdot \theta'(\eta) - 5f'(\eta) \cdot \theta(\eta) = 0, \qquad (25)$$

з граничними умовами:

$$f(0) = f'(0) = 1 - \theta(0) = f'(\infty) = \theta(\infty) = P(\infty) = 0, \qquad (26)$$

Система рівнянь (12), (13) з граничними умовами (14), а також (23)–(25) з граничними умовами (26), розв'язувалися методом Рунге–Кутта.

Тепловий потік в даній точці з координатою x записується у вигляді:

$$q(x) = -\chi \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = -\chi\, a(x) c(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_0. \qquad (27)$$

З іншого боку

$$q(x) = h(x)a(x), \qquad (28)$$

де h(x) – коефіцієнт тепловіддачі.

Отже, для вертикальної поверхні

$$h_b(x) = \left[-\theta_V{}'(0) \right] \cdot \chi \frac{1}{x} \left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{4\nu^2} \right)^{1/4}, \qquad (29)$$

а для горизонтальної поверхні

$$h_r(x) = \left[-\theta_H{}'(0) \right] \cdot \chi \frac{1}{x} \left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{5\nu^2} \right)^{1/5}, \qquad (30)$$

Для середніх значень коефіцієнтів тепловіддачі маємо

$$\overline{h_b}(x)=\frac{1}{e}\int_0^e h_b(x)dx=\frac{\left[-\theta_b{}'(0)\right]}{e}\chi\int_0^e\frac{1}{x}\left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{4\nu^2}\right)^{1/4}dx\,, \qquad (31)$$

$$\overline{h_r}(x)=\frac{1}{e}\int_0^e h_r(x)dx=\frac{\left[-\theta_r{}'(0)\right]}{e}\chi\int_0^e\frac{1}{x}\left(\frac{g\beta x^3 a(x)}{5\nu^2}\right)^{1/5}dx\,. \qquad (32)$$

Для повітря при ΔT – 40 К, l–2 см, $\overline{h_b}(x)\approx 10{,}1\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$ і $\overline{h_r}(x)\approx 6\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Boussinesq J. Theorie analytique de la chaleur. Vol. 2.- Pari: Gauthier-Villars, 1903.
2. Шлихтинг Т. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.
3. Зккерт З.Р. Введение в теорию тепло– и массообмена.– М.: Наука, 1957.

SUMMARY

BODNARUK V.I., DIMITRASCHUK V.T.,
POKHODZHAY R.Y., SCHERBINA L.A.

INFLUENCE OF GRAVITATION UPON THE THERMAL EXCHANGE CONDITION.

The problem of origin thermal return of heated vertical surface was considered. The temperatures of this surface and environment are different, the flow considered to be constant and laminar, physical properties of the gas are constant The average values of thermal returning coefficient are obtained for vertical ($\bar{h}_b(x)\approx 10{,}1$W/(m^{2}K)) and horizontal ($\bar{h}_r(x)\approx 6$ W/(m^{2}K)) surfaces.