УДК 542.63

© 2001 р. М.В.Курганецький, П.П.Настасієв

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ, ЯКА ОПИСУЄ ПРОЦЕС КРИСТАЛІЗАЦІЇ

Розв'язана нестаціонарна система диференціальних рівнянь тепломасопереносу, яка описує процес кристалізації, знайдено розподіл температури і концентрації домішки в товщині дельта-шару. Отримано аналітичні вирази для концентрації домішки на границі розділу фаз з боку розплаву як функції часу, а також ефективного коефіцієнта розподілу, в якому враховано вплив температурного поля.

Temperature distribution and admixture concentration in a delta-level thickness have been established as result of solution of a bound nonstationary system of differential equations for warm-mass-transposition describing a cristallization process. The equations for an effective segregation coefficient accounting the influence of a temperature field have been obtained, as well as time depending admixture concentrations of interface from a side of liquid.

Керування процесом вирощування кристалів з певними властивостями – це, перш за все, керування розподілом температури і концентрації складових компонент даного матеріалу. Для знаходження зв'язку між параметрами управління та розподілом температури і концентрації необхідно розв'язати систему рівнянь тепломасопереносу при відповідних початкових і граничних умовах. Аналітичний розв'язок таких рівнянь отримати дуже складно і тому вводяться різні спрощення, а задачі розглядаються сумісно або окремо, стаціонарні чи нестаціонарні, багатовимірні чи одновимірні і т.д. Так, в працях [1-3] знаходиться розподіл температури в розплаві і кристалі, а в працях [4-5] – розподіл компоненти. У [6-7] рівняння тепломасопереносу записуються у зв'язній формі, але потім робиться ряд спрощень і вони розв'язуються окремо. У [8] розв'язана система стаціонарних рівнянь тепломасопереносу із врахуванням ефекту їх взаємозв'язку і конвекції.

Із задачею знаходження розподілу температури і концентрації домішки тісно пов'язано визначення одного із основних технологічних параметрів кристалізації – ефективного коефіцієнта розподілу. Визначенню, різним моделям та застосуванню коефіцієнта розподілу приділена увага у багатьох роботах, зокрема в [9-11]. У відомих виразах цей коефіцієнт отриманий із розв'язку концентраційних рівнянь без урахування багатьох параметрів, від яких він залежить.

Найбільш повний опис процесу кристалізації дається спільним розглядом явищ тепло- і масопереносу. Тому, виходячи із положень нерівноважної термодинаміки, виводяться відповідні рівняння [7,8,12].

Використовуючи модель запропоновану у [8], тобто розглядаючи відкриту двокомпонентну систему, яка включає в себе границю розділу фаз і області, що безпосередньо прилягають до неї (товщину дифузійного шару зі сторони розплаву та пластичну частину кристалу) і прийнявши, що коефіцієнти при похідних постійні, розв'яжемо нестаціонарну систему рівнянь тепломасопереносу, які описують процес кристалізації, що відбувається тут.

Для випадку ідеального розплаву вихідними рівняннями, що описують зміну температури T і молярної долі концентрації домішки C_k, є рівняння [7,12]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_q - \rho \vec{W} c_p \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_k - \rho \vec{W} \frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (2)$$

Тут ρ – густина, $\vec{J}_q, \vec{J}_k$ – потоки тепла і компоненти, $\vec{W}$ – швидкість потоку, c_p – питома теплоємність при постійному тиску. Для двокомпонентного розчину ($C_1+C_2=1$) виразимо концентрацію основної речовини C_2 через концентрацію домішки C_1. Опустивши індекс у C_1, маємо:

$$\vec{J}_q = -\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_q \rho R T^2 \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad (3)$$

$$\vec{J}_1 = -\rho D_T \left(C - C^2\right) \frac{\partial T}{\partial x} - \rho D_0 \frac{\partial C}{\partial x}. \qquad (4)$$

Початок координат (x=0) розмістимо на границі розділу фаз з додатним напрямком x у бік розплаву. Швидкість потоку $\vec{W}$ є сумою нормальної швидкості рідини і швидкості росту кристала. Вважаємо, що в межах дельта-шару швидкість потоку дорівнює швидкості росту кристала $\vec{w}$, яка додатна при рості кристала і від'ємна – при його плавленні. Напрямки швидкості кристалізації і осі x протилежні, і тому доданки, які враховують швидкість росту кристала, змінять знак.

Для одновимірного випадку концентрацію $C=C(t, x)$ та температуру $T=T(t,x)$ вивчатимемо окремо для кожної фази і тому введемо для них різні позначення. А саме: для рідкої фази, що відповідає проміжку $0 \le x \le \delta$, матимемо концентрацію C_1 (t, x) і температуру $T_1(t, x)$, а в кристалічній фазі – записуватимемо відповідно $C_2(t, x)$ та $T_2(t, x)$ для $-x_k \le x \le 0$. Тоді процес кристалізації характеризуватиметься такою системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + D_q \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + w \frac{\partial T_j}{\partial x}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + w \frac{\partial C_j}{\partial x}. \qquad (6)$$

Тут

$$\lambda_0 / \rho c_p = \lambda, \quad \lambda_q R T^2 / c_p = D_q,$$

$$D_T \left(C - C^2\right) = D_1, \quad D_0 = D,$$

де D_0 – коефіцієнт дифузії, λ_0 – коефіцієнт теплопровідності, λ_q – коефіцієнт дифузійної теплопровідності, w – швидкість росту кристала. Індекс j набуває значень 1 або 2, а коефіцієнти цієї системи для j=1 у рідкій фазі писатимуться зі значком "+", а для кристалічної фази (j=2) ці коефіцієнти матимуть позначку "-". Крім того, зазначимо, що кожне з цих рівнянь розглядатиметься на своєму проміжку.

До рівнянь (5) та (6) додаються такі початкові та граничні умови:

$$T_1(t,x)\big|_{t=0} = T_0(x), \quad C_1(t,x)\big|_{t=0} = C_0(x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &T_1(t,x)\big|_{x=\delta} = T_\delta, \quad C_1(t,x)\big|_{x=\delta} = C_\delta, \\ &T_2(t,x)\big|_{x=x_k} = T_k, \quad C_2(t,x)\big|_{x=x_k} = C_k, \end{aligned} \qquad (8)$$

$$T_2(t,x)\big|_{x=0} = T_0, \; C_1(t,x)\big|_{x=0} = k_0 C_2(t,x)\big|_{x=0},$$

$$\left(D_1 \frac{\partial T}{\partial x} + D \frac{\partial C}{\partial x}\right)^+ \Bigg|_{x=0} = -w C_0 (1 - k_0), \qquad (9)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T_2}{\partial x} + D_q \frac{\partial C}{\partial x}\right)^+ \Bigg|_{x=0} - \left(\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} + D_q \frac{\partial C_1}{\partial x}\right)^- \Bigg|_{x=0} = -vL\rho^-. \; (10)$$

Тут k_0 – рівноважний коефіцієнт розподілу, L – прихована теплота кристалізації.

Зазначимо, що коефіцієнт дифузійної теплопровідності D_q в кристалі малий у порівнянні з іншими коефіцієнтами, тому ним можна знехтувати. Тоді для кристала система рівнянь розділяється, отже, можна окремо розв'язувати задачі для температури і концентрації.

Ми розв'язуватимемо поставлену задачу, коли коефіцієнти D_q^- та D_1^- дорівнюють нулеві, а система (5-6) для j=2 є стаціонарною.

Для кристалічної фази на проміжку $-x_k \le x \le 0$ матимемо такий розподіл температури

$$T_2(x) = T_0 - \frac{(T_0 - T_k)(1 - \exp(-ax))}{1 - \exp(ax_k)} \qquad (11)$$

та концентрації

$$C_2(x) = C_0 (1 - k_0) \left(\exp\left(-\frac{w}{D^-} x\right) - \exp\left(\frac{w}{D^-} x_k\right) \right) + C_k. \qquad (12)$$

У рівності (11) прийнято $a = w/\lambda^-$.

Для розв'язання задачі (5-10) у випадку рідкої фази спочатку спростимо її. З цією метою перейдемо від невідомих функцій $T_1=T_1(t, x)$ та $C_1=C_1(t, x)$ до нових функцій $u=u(t, x)$ і $v=v(t, x)$ за допомогою невиродженої матриці та оберненої до неї: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* \end{pmatrix}$. Для спрощення подальших записів позначки "+" опускатимемо, а температуру T_1 та концентрацію C_1 писатимемо відповідно T, C.

Вважаємо, що $\begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Підберемо для даної матриці $A=\begin{pmatrix}\lambda & D_q\\ D_1 & D\end{pmatrix}$ матрицю B так, щоб матриця $B^{-1}AB$ була діагональною $\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_2\end{pmatrix}$. Діагональні елементи цієї матриці обчислюються за допомогою формули

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{2}\left((\lambda+D)\pm\sqrt{(\lambda-D)^2+4D_1D_q}\right).$$

Тепер рівняння (5), (6) і відповідні початкові та граничні умови на проміжку $0\le x\le\delta$ запишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+w\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\beta_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+w\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (14)$$

$$u\big|_{t=0}=b_{11}^*T_0+b_{12}^*C_0=a(x), \quad (15)$$

$$v\big|_{t=0}=b_{21}^*T_0+b_{22}^*C_0=b(x), \quad (16)$$

$$u\big|_{x=\delta}=b_{11}^*T_\delta+b_{12}^*C_\delta, \quad (17)$$

$$v\big|_{x=\delta}=b_{21}^*T_\delta+b_{22}^*C_\delta, \quad (18)$$

$$\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{(\beta_2-\lambda)\gamma_1}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-D)}-\frac{D_q\gamma_2}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-D)}, \quad (19)$$

$$\beta_2\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{D_1\gamma_1}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-D)}-\frac{\gamma_2}{\beta_2-\beta_1}, \quad (20)$$

де $\gamma_1=-wL\rho^- -\frac{w(T_0-T_k)}{1-\exp(ax_k)}$, $\gamma_2=-wC_0(1-k_0)$.

Розв'язком відповідної стаціонарної системи будуть такі функції:

$$u_{ss}(x)=\frac{1}{w}\left(-\alpha_1\beta_1\exp\left(-\frac{wx}{\beta_1}\right)\right)+\alpha_2, \quad (21)$$

$$v_{ss}(x)=\frac{1}{w}\left(-\alpha_3\beta_2\exp\left(-\frac{wx}{\beta_2}\right)\right)+\alpha_4, \quad (22)$$

де α_i – сталі інтегрування (i=1,2,3,4).

З рівняння $C_0=b_{21}u_{ss}+b_{22}v_{ss}$ отримуємо вираз для ефективного коефіцієнта розподілу

$$k=k_0(\tau-r)/(k_0z-(z+1)), \quad (23)$$

де

$$\tau=\frac{1}{w\varphi C_\delta}\big[D_1\gamma_1(\beta_2-\lambda)(\exp(-w\delta/\beta_2)-\exp(-w\delta/\beta_1))-D_1T_\delta w\varphi b_{11}^*-(\beta_2-\lambda)T_\delta w\varphi b_{21}^*\big],$$

$$r=D_1b_{12}^*+(\beta_2-\lambda)b_{22}^*,\ \varphi=(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-D),$$

$$z=\frac{1}{\varphi}\big[D_1D_q(1-\exp(-w\delta/\beta_1))-(\beta_2-\lambda)(\beta_1-D)(1-\exp(-w\delta/\beta_2))\big].$$

Поданий в такому вигляді ефективний коефіцієнт розподілу є функцією технологічних параметрів і параметрів, що характеризують речовину, яка кристалізується. На відміну від класичного виразу для k, одержаного в [9], в даній формулі (23) враховано вплив температурного поля. Така інформація дає можливість більш повного використання різних параметрів для управління процесом росту кристалів.

Розв'язання загальної крайової задачі для рідкої фази

Для розв'язання загальної крайової задачі у випадку рідкої фази (13-20) проведемо заміну змінної x на нову змінну y за формулою x=δ-y а також введемо нові функції [9]:

$$u_1(t,y)=u(t,\delta-y)-u_{ss}(\delta-y),\ 0\le y\le\delta, \quad (24)$$

$$v_1(t,y)=v(t,\delta-y)-v_{ss}(\delta-y),\ 0\le y\le\delta. \quad (25)$$

Тоді задача (13-20) на проміжку $0\le y\le\delta$ набуде вигляду:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\beta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-w\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\beta_2\frac{\partial v^2}{\partial y^2}-w\frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (27)$$

$$u_1\big|_{t=0}=b_{11}^*T_0-u_{ss}(\delta-y),\quad v_1\big|_{t=0}=b_{21}^*T_0-v_{ss}(\delta-y), \quad (28)$$

$$u_1\big|_{y=0}=0,\ v_1\big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=\delta}=0, \frac{\partial v_1}{\partial y}\bigg|_{y=\delta}=0. \quad (29)$$

Розв'язання задачі (24-29) проведемо методом Ейлера-Фур'є [13]. Для цього розв'язок подамо у вигляді суми функцій, які є добутками функцій $X(t)Y(y)$ лише від t і лише від y. Тоді для рівняння (26) матимемо

$$\frac{1}{Y}\left(\beta_1\frac{d^2Y}{dy^2}-w\frac{dY}{dy}\right)=\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}. \quad (30)$$

Остання рівність можлива лише за умови, що кожна її частина є сталою, яку позначатимемо ω_1. Тоді матимемо рівняння

$$\beta_1 \frac{d^2Y}{dy^2} - w\frac{dY}{dy} = \omega_1 Y. \qquad (31)$$

Характеристичними коренями цього рівняння будуть числа $\lambda_{1,2} = \frac{w}{2\beta_1} \pm \frac{\sqrt{w^2 + 4\beta_1\omega_1}}{2\beta_1}$. Для виконання відповідних граничних умов слід вважати, що $\frac{\sqrt{w^2 + 4\beta_1\omega_1}}{2\beta_1} = i\mu$, де μ є деяким дійсним числом. Тоді характеристичні корені подамо так: $\lambda_{1,2} = \frac{w}{2\beta_1} \pm i\mu$. Загальним розв'язком рівняння (31) буде така функція

$$Y_1(y) = A_1\sin(\mu y)\exp(wy/2\beta_1) + A_2\cos(\mu y)\exp(wy/2\beta_1), \qquad (32)$$

де A_1, A_2 – довільні сталі. З першої умови в (29) маємо, що A_2=0 і тому

$$Y_1(y) = A_1\sin(\mu y)\exp(wy/2\beta_1), 0 \le y \le \delta. \qquad (33)$$

Аналогічно для (25) і (26) маємо

$$Y_2(y) = B_1\sin(\mu y)\exp(wy/2\beta_1), 0 \le y \le \delta. \qquad (34)$$

Використовуючи умови (29), отримуємо для μ трансцендентні рівняння

$$ctg(\mu\delta) = -(w\delta)/2\beta_i\mu\delta. \qquad (35)$$

Ці рівняння мають нескінченну кількість розв'язків $(\mu_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ (i=1,2) [14]. Тоді розв'язками $Y_i(y)$ є така послідовність взаємноортогональних функцій

$$Y_{n,i} = \sin(\mu_{n,i})\exp(wy/2\beta_i) \ (n \in \boldsymbol{N}, i=1,2). \qquad (36)$$

Далі, з рівняння (30) отримуємо, що

$$X_{n,i}(t) = \exp\left(-((w/2\beta_i)^2 + \mu_{n,i}^2)\beta_i t\right). \qquad (37)$$

Отже, розв'язок задачі (26-29) запишемо у вигляді таких рядів Фур'є

$$u_1(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_{n,1}y)\exp[-((w/2\beta_1)^2 + \mu_{n,1}^2)\beta_1 t + (wy/2\beta_1)], \ 0 \le y \le \delta, \qquad (38)$$

$$v_1(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\mu_{n,2}y)\exp[-((w/2\beta_2)^2 + \mu_{n,2}^2)\beta_2 t + (wy/2\beta_2)], \ 0 \le y \le \delta, \qquad (39)$$

Згідно з граничними умовами, отримуємо зображення коефіцієнтів A_n та B_n цих рядів:

$$A_n = \frac{4\mu_{n,1}}{\sin(\mu_{n,1}\delta) - 2\mu_{n,1}\delta}\Big[(b_{11}^*(T_0 - T_\delta) - b_{12}^*C_\delta - \\ -\frac{\varphi_1}{w}\exp(-w\delta/\beta_1))\frac{\exp(-w\delta/2\beta_1)}{w^2/4\beta_1^2 + \mu_{n,1}^2}\big[-w/2\beta_1 \times \\ \times\sin(\mu_{n,1}\delta) - \mu_{n,1}\cos(\mu_{n,1}\delta) + \mu_{n,1}\big] + \\ + \frac{\varphi_1}{w}\left(\frac{\exp(-w\delta/2\beta_1)[w/2\beta_1 \cdot \sin(\mu_{n,1}\delta)}{w^2/4\beta_1^2 + \mu_{n,1}^2} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_{n,1}\cos(\mu_{n,1}\delta) - \mu_{n,1}}{w^2/4\beta_1^2 + \mu_{n,1}^2}\right)\Big], \qquad (40)$$

$$B_n = \frac{4\mu_{n,2}}{\sin(2\mu_{n,2}\delta) - 2\mu_{n,2}\delta}\Big[(b_{21}^*(T_0 - T_\delta) - b_{22}^*C_\delta - \\ -\frac{\varphi_2}{w}\exp(-w\delta/\beta_2))\frac{\exp(-w\delta/2\beta_2)}{w^2/4\beta_2^2 + \mu_{n,2}^2}\big[-w/2\beta_2 \times \\ \times\sin(\mu_{n,2}\delta) - \mu_{n,2}\cos(\mu_{n,2}\delta) + 2\mu_{n,2}\big] + \\ + \frac{\varphi_2}{w}\left(\frac{\exp(-w\delta/2\beta_2)[w/2\beta_2 \cdot \sin(\mu_{n,2}\delta)}{w^2/4\beta_2^2 + \mu_{n,2}^2} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_{n,2}\cos(\mu_{n,2}\delta) - \mu_{n,2}}{w^2/4\beta_2^2 + \mu_{n,2}^2}\right)\Big]. \qquad (41)$$

Подамо тепер розв'язок системи (6-10) у вигляді

$$T(t,x) = b_{11}u(t,x) + b_{12}v(t,x),$$

$$C(t,x) = b_{21}u(t,x) + b_{22}v(t,x).$$

Звідси можемо отримати вираз для концентрації домішки в точці x=0

$$C(t,0) = D_1 b_{12}^* C_\delta + (\beta_2 - \lambda)b_{22}^* C_\delta - \\ -\sum_1 D_1 b_{12}^* C_\delta B_1^- - \sum_2 (\beta_2 - \delta)b_{22}^* C_\delta B_2^- + \\ D_1 b_{11}^* T_\delta - \frac{D_1\varphi_1}{v}(1 - \exp(-w\delta/\beta_1)) + \\ + \sum_1 D_1[b_{11}^*(T_0 - T_\delta)B_1^- + \frac{\varphi_1}{w}(B_1^+ - B_1^- \times \\ \times\exp(w\delta/\beta_1)] + (\beta_2 - \delta)b_{21}^* T_\delta - \\ - \frac{\varphi_2(\beta_2 - \lambda)}{w}(1 - \exp(-w\delta/\beta_2)) + \\ + \sum_2 (\beta_2 - \delta)[b_{21}^*(T_0 - T_\delta)B_2^- + \frac{\varphi_2}{w}(B_1^+ - \\ - B_2^-\exp(-w\delta/\beta_2))]. \qquad (42)$$

Тут

$$\sum_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_{n,i}\sin(\mu_{n,i}\delta)}{(\sin(2\mu_{n,i}\delta) - 2\mu_{n,i}\delta)\left(\frac{w^2}{4\beta_i^2} + \mu_{n,i}^2\right)} \times \\ \times\exp[-((w/2\beta_i)^2 + \mu_{n,i}^2]\beta_i t,$$

$$\sum_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_{n,i}\sin(\mu_{n,i}\delta)}{(\sin(2\mu_{n,i}\delta)-2\mu_{n,i}\delta)\left(\frac{w^2}{4\beta_i^2}+\mu_{n,i}^2\right)}\times$$

$$\times\exp[-((w/2\beta_i)^2+\mu_{n,i}^2]\beta_i t,$$

$$B_i^+ = \frac{w}{2\beta_i}\sin(\mu_{n,i}\delta)-\mu_{n,i}\cos(\mu_{n,i}\delta)+\mu_{n,i},$$

$$B_i^- = -\frac{w}{2\beta_i}\sin(\mu_{n,i}\delta)-\mu_{n,i}\cos(\mu_{n,i}\delta)+\mu_{n,i},$$

$i=1,2$.

Вираз (41) дає значення концентрації домішки на межі розділу фаз з рідини. Коли відомим є рівноважний коефіцієнт розподілу, цей вираз можна використовувати для визначення концентрації домішки в кристалі, а також для отримання виразу ефективного коефіцієнта розподілу. Таку інформацію можна використовувати і для управління процесом росту кристала з певними властивостями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лодиз Р.*, *Паркер Р.* Рост кристаллов. - М.: Мир, 1974.
2. *Конаков П.К.*, *Веревочкин Г.Е.*, *Горяинов Л.А.*, *Зарувинская Л.А.*, *Конаков Ю.П.*, *Кудрявцев В.В.*, *Третьяков Г.А.* Тепло- и массообмен при получении монокристаллов. - М.: Металлургия, 1971.
3. *Коздоба Л.А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. - М.: Наука, 1975.
4. *Кириллова Л.* Численное моделирование тепловых и концентрационных полей при выращивании монокристаллов по методу Чохральского // Электронное моделирование. - 1983. - №2. - С.92.
5. *Ремизов И.А.* Численное моделирование концентрационных полей легирующей примеси в расплаве при выращивании монокристаллов методом Чохральского // Физика и химия обработки материалов. - 1980. - №2. - С.38-44.
6. *Авдонин Н.А.* Математическое описание процессов кристаллизации. - Рига.: Зинатне, 1980.
7. *Крапухин В.В.*, *Соколов И.А.*, *Кузнецов Г.Д.* Физико-химические основы технологии полупроводниковых материалов. - М.: Металлургия, 1982.
8. *Курганецкий Н.В.* Распределение концентрации примеси и температуры в процессе кристаллизации при учете перекрестных явлений и конвекции // Неорганические материалы. - 1996. - **32**, №3. - С.317-320.
9. *Бартон Д.А.*, *Прим Р.С.*, *Слихтер В.П.* Германий / Под ред. Д.А. Петрова. - М.: ИЛ, 1955. - С.74.
10. *Крёгер Ф.* Химия несовершенных кристаллов. - М.: Мир, 1969.
11. *Романенко В.Н.* Управление составом полупроводниковых кристаллов. - М.: Металлургия, 1976.
12. *Гроот С.*, *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964.
13. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
14. *Будак П.М.*, *Самарский А.А.*, *Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. - М.: ГИТТИЛ, 1956.