

ЗВ'ЯЗОК ТОНКОЇ СТРУКТУРИ НЕОДНОРІДНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ І ЙОГО УСЕРЕДНЕНИХ ПОЛЯРИЗАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Розглянуто взаємозв'язок тонкої структури векторного поля і його усереднених поляризаційних характеристик. Показано, що матриця когерентності, просторово усереднені параметри Стокса визначаються дисперсією різниці фаз (дисперсією азимута поляризації) в їх сідлових точках. Встановлена залежність між розміром областей зі значними поляризаційними змінами і середньою відстанню між найближчими вихорами одного знака, що асоціюються з різними ортогональними лінійно-поляризованими компонентами. Наведені експериментальні результати і дані комп'ютерного моделювання.

Interconnection of the fine structure of the vector field and its averaged polarization characteristics are considered. It is shown that the coherence matrix and the space averaged Stokes parameters are defined by dispersion of the phase difference (or dispersion of polarization azimuth) in its saddle points. The dependence between dimension of areas with considerable polarization changes and averaged space between the nearest adjacent component vortices of the same sign is obtained. The results of computer simulation and experimental ones are presented.

Вступ

Поляризаційні параметри, що характеризують світлове поле, такі як матриця когерентності, параметри Стокса і т.д. [1,2], історично вводились для опису поляризаційних характеристик некогерентного пучка. В результаті, для отримання даних параметрів, у будь-якому випадку проводиться інтегрування за просторовими координатами і часом. Виникає питання: чи можна ввести подібні локальні характеристики для довільної точки в просторі чи в часі? Відповідь на це питання позитивна, як мінімум для когерентних неоднорідних полів [1,3,4]. Природно, що при взаємодії світла з речовиною об'єкта, когерентні характеристики пучка погіршуються. Але існує великий клас розсіювачів, які незначно змінюють когерентні характеристики, і зменшення довжини когерентності настільки мале, в порівнянні з довжиною когерентності сучасного лазера, що нею можна знехтувати. До таких об'єктів, наприклад, належать розсіювачі, що реалізують однократне розсіювання (тонкі плівки і т. д.) [5], невеликі відрізки багатомодових оптичних волокон [6] тощо. Іншими словами, не зважаючи на те, що поле після взаємодії з об'єктом формується як спекл-поле, воно повністю поляризоване завдяки збереженню когерентності. Водночас поляризаційні

параметри, такі як матриця когерентності і параметри Стокса, виміряні для усього пучка, будуть аналогічні випадку, в якому об'єкт має деполаризуючу дію.

Отже, можна зробити висновок про деяку аналогію між поведінкою традиційних поляризаційних параметрів, що виміряні для пучків частково когерентного і навіть некогерентного світла й аналогічних усереднених параметрів, якими можна описати стан поляризації цілої області когерентного пучка, в якій поляризація поля змінюється від точки до точки. Цей висновок впливає хоч би з того факту, що в більшості ситуацій, що реалізуються фізично, можлива заміна усереднення за часом на усереднення за просторовими координатами [7]. Внаслідок лінійності операцій такого усереднення усереднені параметри Стокса, елементи матриці когерентності є простими інтегралами по площі аналізу від відповідних локальних параметрів.

Виникає питання: як такі усереднені параметри взаємопов'язані зі специфічними структурами векторного поля, такими як поляризаційні сингулярності, області поля з сідловими точками поляризаційних параметрів, котрі формують скелетон поля [4,8-17] і визначають поведінку поля в кожній точці?

У цій статті зроблена спроба встановити такий взаємозв'язок.

Усереднені параметри Стокса

Розглянемо усереднений параметр Стокса \bar{s}_i ($i=0,1,2,3$). Відомо [1,2], що параметр Стокса \bar{s}_i можна одержати проводячи вимірювання відповідних параметрів інтенсивності:

$$\bar{s}_i = \bar{I}_{i1} + \bar{I}_{i2}. \quad (1)$$

Очевидно, що у випадку вимірювання усереднених параметрів \bar{I}_{ik} – величина усереднена, за площею фотоприймача q_f :

$$\bar{I}_{ik} = \int_{q_f} I_{ik} dx dy, \quad (2)$$

де I_{jk} – локальна інтенсивність у довільній точці. Оскільки $q_f \gg l_{cor}^2$, можна вважати, що усереднення проводиться за нескінченно великою площею:

$$\bar{I}_{ik} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int I_{ik}(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Відповідно, з (1-3) матимемо:

$$\bar{s}_i = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int s_i(x, y) dx dy, \quad (4)$$

де $s_i(x, y)$ – локальний параметр Стокса.

Аналіз усереднених параметрів при розкладі поля на лінійно-поляризовані компоненти

Відомо [1,2], що $s_i(x, y)$ може бути виражене через компоненти матриці когерентності:

$$\begin{cases} s_0 = J_{xx} + J_{yy}, \\ s_1 = J_{xx} - J_{yy}, \\ s_2 = J_{xy} + J_{yx}, \\ s_3 = \frac{1}{j}(J_{xy} - J_{yx}). \end{cases} \quad (5)$$

Зауважимо, що $J_{xy} = J_{yx}^*$ (ермітова матриця). Виходячи з (4,5), \bar{s}_i виражається через усереднені компоненти матриці когерентності:

$$\bar{J}_{lk} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int J_{lk}(x, y) dx dy, \quad (6)$$

$k, l=1,2$ – відповідають x, y . Нагадаємо [1,2], що

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де $\langle \dots \rangle$ – усереднення за часом.

При використанні когерентного, абсолютно поляризованого світла усереднення за часом "знімається" і $J_{kl} = u_k u_l^*$, де u_k – комплексна амплітуда ортогональних компонент. J_{xy} має вигляд:

$$J_{xy} = a_x a_y e^{j\Delta\Phi}, \quad (8)$$

де $a_x, a_y, \Delta\Phi$ – модулі амплітуд і різниця фаз ортогональних компонент.

Нулі J_{xy} збігаються з нулями компонент, які однозначно пов'язані з поляризаційними сингулярностями (s -контурами й C -точками) [11,12].

Усереднену компоненту матриці когерентності \bar{J}_{xy} :

$$\bar{J}_{xy} = \int a_x a_y e^{j\Delta\Phi} dx dy \quad (9)$$

можна інтерпретувати як максимум кореляційної функції комплексних амплітуд ортогональних компонент [1]. Зауважимо, що $e^{j\Delta\Phi}$ – швидко осцилююча функція. При цьому найбільша швидкість зміни $\Delta\Phi$ спостерігається в області нулів J_{xy} (в областях вихорів компонент), де фаза компонент змінюється від 0 до 2π у дуже невеликому околі, що включає центр вихору. Там же, $a = a_x a_y$ – найменше (або a_x , або $a_y \rightarrow 0$). У такому випадку внесок від таких областей в (9) мінімальний. Основний внесок в (9) здійснюють області стаціонарних точок $\Delta\Phi$ (області сідел різниці фаз). Тоді (9) може бути апроксимовано за допомогою методу стаціонарної фази [1,18,19]. Виберемо базис розкладу векторного поля такий, що $\bar{J}_{xx} = \bar{J}_{yy}$, тобто середні інтенсивності ортогональних компонент однакові.

$$\text{Тоді } \bar{J}_{xy} \approx \bar{J}_{xx} \exp(j\Delta\Phi_0) \exp(-\sigma_\Delta^2 / 2). \quad (10)$$

У цьому випадку параметри Стокса будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \bar{s}_0 = 2\bar{J}_{xx}, \\ \bar{s}_1 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \bar{s}_2 = 2\bar{J}_{xx} \exp(-\sigma_\Delta^2 / 2) \cos(\Delta\Phi_0), \\ \bar{s}_3 = 2\bar{J}_{xx} \exp(-\sigma_\Delta^2 / 2) \sin(\Delta\Phi_0), \end{cases}$$

де $\Delta\Phi_0$ – переважна різниця фаз ортогональних компонент.

Параметри Стокса, нормовані до одиниці, подаються у вигляді:

$$\begin{cases} \bar{s}_0 = 1, \\ \bar{s}_1 = 0, \\ \bar{s}_2 = \exp(-\sigma_\Delta^2 / 2) \cos(\Delta\Phi_0), \\ \bar{s}_3 = \exp(-\sigma_\Delta^2 / 2) \sin(\Delta\Phi_0). \end{cases} \quad (12)$$

Природно, що, як і у випадку частково когерентного випромінювання, справедлива нерівність:

$$\bar{s}_0 \geq (\bar{s}_1)^2 + (\bar{s}_2)^2 + (\bar{s}_3)^2. \quad (13)$$

Спостерігається "інтегральна деполяризація":

$$P = \frac{\sqrt{(\bar{s}_1)^2 + (\bar{s}_2)^2 + (\bar{s}_3)^2}}{\bar{s}_0}. \quad (14)$$

Рівність у (13) виконується при $\sigma_{\Delta}^2=0$ для абсолютно однорідно поляризованого поля (скалярне наближення). Як бачимо з (12), усереднені параметри Стокса визначаються дисперсією різниці фаз у сідлових точках різниці фаз.

Зазначимо, що σ_{Δ}^2 пов'язана з величиною середньої відстані між найближчими вихорами одного знака, що відносяться до різних компонент. При повністю скорельованих ортогональних компонентах (однорідно поляризоване поле) σ_{Δ}^2 і $l_v=0$ координати нулів компонент повністю збігаються. При збільшенні σ_{Δ}^2 відстань між такими вихорами починає збільшуватися. Граничний випадок $l_v=l_{cor}$ – це повністю інтегрально деполяризоване поле. Можна зробити висновок, що σ_{Δ}^2 є деякою функцією l_v : $\sigma_{\Delta}^2 = f(l_v)$.

Ця залежність може бути отримана, наприклад, із даних комп'ютерного моделювання.

Комп'ютерне моделювання параметрів векторного поля

Відомо, що поле в далекій зоні \vec{U}_d (у тому числі й неоднорідне векторне поле) є Фур'є-перетворенням поля, сформованого безпосередньо за розсіюючим об'єктом, $\vec{U}_{вх}$ [20]. Аналогічне твердження також справедливе й для його ортогональних компонент. Можна показати, що для формування поля \vec{U}_d досить виразити вхідне поле для кожного компонента $U_{вх}$ як сукупність хаотично розташованих точкових джерел з однічною амплітудою і випадковою фазою.

$$U_{вх} = \sum_i^N e^{j\Phi_i} \delta[(x-x_i), (y-y_i)], \quad (15)$$

де N – кількість точкових джерел, Φ_i, x_i, y_i – фаза й координати i -го точкового джерела. Розходження у формуванні "вхідної" вибірки точкових джерел ортогональних компонент полягає лише в тому, що у вибірках, які відповідають різним компонентам, N_d джерел повністю відрізняється як за

фазою, так і за локалізацією.

У цьому випадку, в далекій зоні, будуть сформовані компоненти з однаковою інтенсивністю, а їхній коефіцієнт кореляції визначається простим відношенням:

$$\gamma = \frac{N_d}{N}. \quad (16)$$

Рівень "інтегральної деполяризації", зумовлений ступенем поляризації P , був обраний як поляризаційний параметр, що характеризує усереднені поляризаційні характеристики векторного поля. Зауважимо, що поле залишається повністю поляризованим у кожній точці. Відомо, що при виконанні умови

$$\bar{J}_{xx} = \bar{J}_{yy} \quad (17)$$

інтегральна деполяризація безпосередньо пов'язана з коефіцієнтом кореляції ортогональних компонент [1]:

$$P = 1 - \gamma. \quad (18)$$

Тому, в нашому випадку, γ характеризує рівень деполяризації й надалі, для наочності, під рівнем деполяризації D і будемо розуміти коефіцієнт кореляції ортогональних компонент при виконанні умови. Для різних рівнів інтегральної деполяризації були отримані карти різниці фаз, а також обчислені середні відстані між найближчими компонентними вихорами l_v і усереднені параметри Стокса. На рис. 1 зображена залежність дисперсії різниці фаз σ_{Δ}^2 від середньої відстані між найближчими компонентними вихорами l_v .

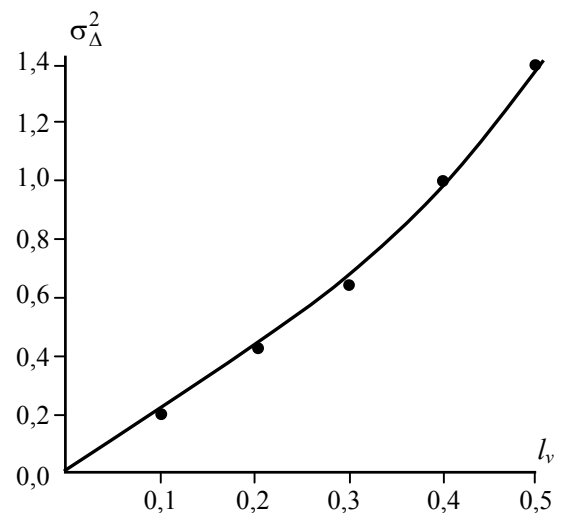


Рис. 1. Залежність дисперсії різниці фаз σ_{Δ}^2 від середньої відстані між найближчими компонентними вихорами l_v

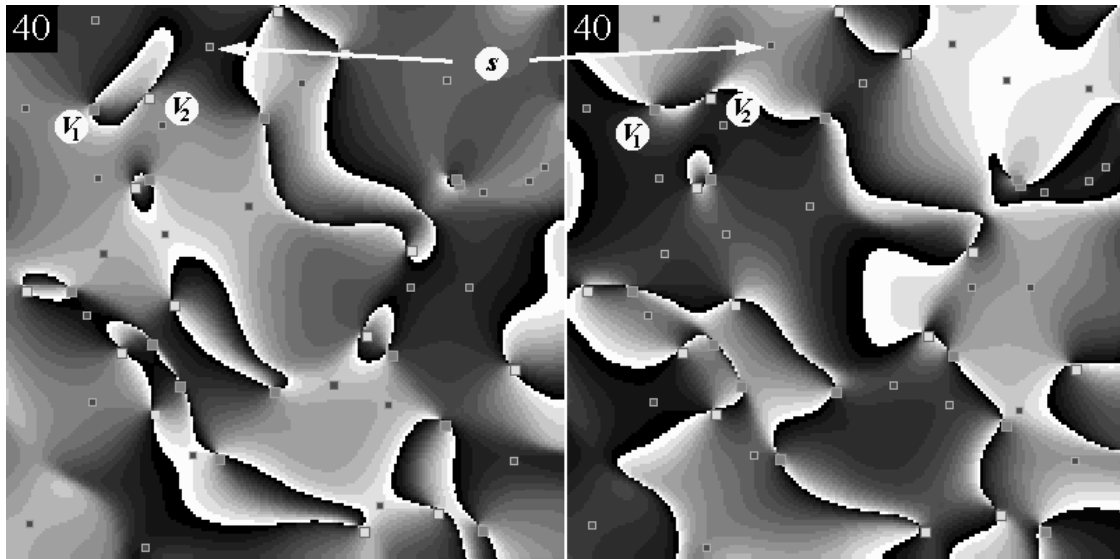


Рис. 2. Карти різниці фаз між ортогональними компонентами оптичного поля для 40% деполаризації для переважних різниць фаз $\Delta\Phi_0=0$ (а) і $\Delta\Phi_0=+\pi/2$ (б). Для зручності різниця фаз наведена з точністю до π . Різниця фаз, що відрізняються на π , позначені однаковими відтінками. Границі між білими й чорними кольорами – s -контури; точки, в яких сходяться лінії всіх кольорів, відповідають вихорам різниці фаз; точки в центрі x -подібних областей – сідлові точки різниці фаз

На рис. 2 наведені карти різниці фаз для випадків переважної різниці фаз $\Delta\Phi_0=0$ і $\pm\pi/2$. Як бачимо характер поведінки різниці фаз не залежить від $\Delta\Phi_0$, оскільки різниця фаз в обох випадках у будь-якій точці відрізняються на постійну величину. Наслідком цього є зміна форми, розміру й положення s -контурів, у той час як сідлові точки, вихорі різниці фаз своїх позицій не змінюють. Як видно з рис. 2, s -контури мають маленький розмір і практично всі замикаються на площі рисунка, коли $\Delta\Phi_0=\pm\pi/2$.

Результати комп'ютерного моделювання параметрів векторного поля для різних коефіцієнтів кореляції зображені на рис. 3. Домінувала обрана циркулярна поляризація. У цьому випадку області зі значними поляризаційними змінами будуть збігатися з розмірами s -контурів [13].

Як видно з рис. 3, розмір s -контурів і середня відстань між найближчими сусідніми компонентними вихорами одного знака зростають при збільшенні рівня деполаризації. s -контури – маленькі (щодо середнього розміру спекла) замкнуті області з одним типом поляризації (право-циркулярним або ліво-циркулярним) при коефіцієнті кореляції більше ніж 0,5. Ці зони розташовані дуже близько до компонентних вихорів. Розміри s -контурів збільшуються й положення областей зі значними поляризаційними змінами стають випадковими для значень коефіцієнта кореляції менше ніж 0,5.

Аналіз усереднених параметрів при циркулярному базисі розкладу поля

Як відомо, структура x -, y -компонент поля залежить від орієнтації базису розкладу.

Зокрема, в нашому розгляді обов'язковою умовою є така орієнтація базису розкладу, при якій інтенсивності ортогональних компонент однакові. З іншого боку, відомо, що структура ортогональних компонентів поля не залежить від орієнтації базису, якщо поле представляти як суперпозицію циркулярно-циркулярно-поляризованих компонент. У цьому випадку різниця фаз компонент прямо пов'язана з азимутом поляризації [2,8]:

$$\alpha = \frac{\Phi_L - \Phi_R}{2}, \quad (19)$$

а сідлові точки різниці фаз є сідловими точками азимуту. Тому проведемо аналогічний розгляд для такого базису розкладання.

Матриця когерентності, отримана при розкладанні поля на циркулярно-циркулярно-поляризовані складові, має вигляд:

$$\bar{J}_{\text{цирк}} = \begin{vmatrix} J_{RR} & J_{RL} \\ J_{LR} & J_{LL} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

де $J_{RL}(x, y) = A_R A_L \exp[j2\alpha]$ і т.д. (A_R, A_L – модулі амплітуд циркулярно-циркулярно-поляризованих компонент) є випадковими, просторово розподіленими величинами. У цьому випадку локалізація вихорів різниці фаз збігається з позиціями S -точок [12].

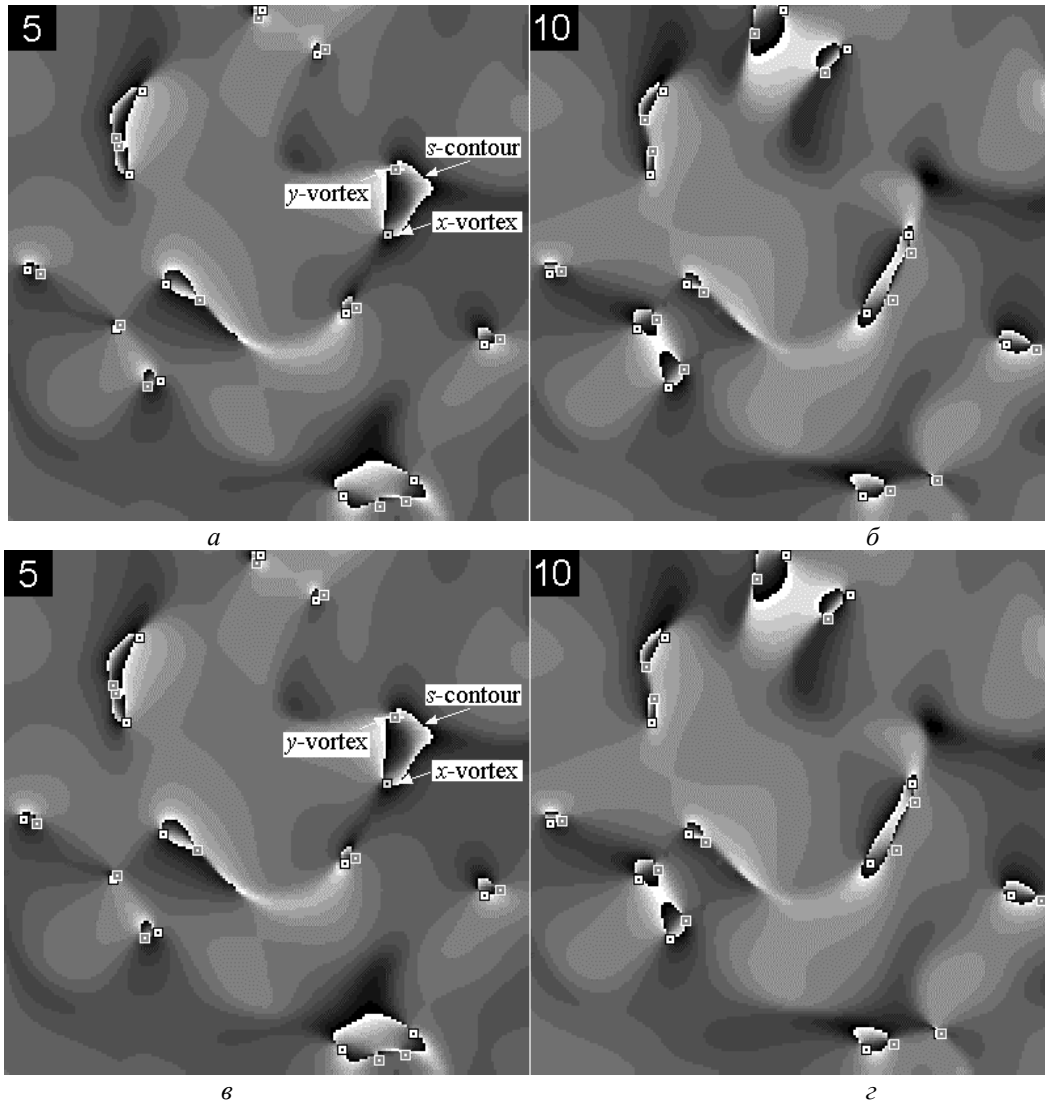


Рис. 3. Карти різниці фаз між ортогональними компонентами. Різниця фаз між ортогональними компонентами для 5%(а), 10%(б), 30%(в), 50%(г) деполаризації поля (коефіцієнт кореляції ортогональних компонентів 0,95, 0,9, 0,7, 0,5 відповідно). □ – вихорі x -компоненти, ■ – вихорі y -компоненти

Параметри Стокса, виражені через елементи такої матриці, запишуться в такому вигляді:

$$\begin{cases} s_0 = J_{LL} + J_{RR}, \\ s_1 = J_{RL} + J_{LR}, \\ s_2 = \frac{1}{j}(J_{RL} - J_{LR}), \\ s_3 = J_{LL} - J_{RR}. \end{cases} \quad (21)$$

Проводячи операції, аналогічні випадку лінійного базису, одержуємо таке представлення параметрів Стокса:

$$\begin{aligned} \bar{s}_0 &= \bar{I}_{LL} + \bar{I}_{RR}, \\ \bar{s}_1 &= 2\sqrt{\bar{I}_{RR}\bar{I}_{LL}} \cos(2\alpha_0) \exp(-2\sigma_\alpha^2), \\ \bar{s}_2 &= 2\sqrt{\bar{I}_{RR}\bar{I}_{LL}} \sin(2\alpha_0) \exp(-2\sigma_\alpha^2), \\ \bar{s}_3 &= \bar{I}_{LL} - \bar{I}_{RR}, \end{aligned} \quad (22)$$

де \bar{I}_{LL} , \bar{I}_{RR} – середні інтенсивності ліво-циркулярної і право-циркулярної компонент відповідно, α_0 – переважний азимут поляризації, а σ_α^2 – дисперсія азимуту поляризації в його сідлових точках.

Для циркулярного базису, як і для лінійного, справедлива нерівність:

$$\bar{s}_0 \geq \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3, \quad (23)$$

тобто спостерігається так звана "інтегральна деполаризація". Рівність в (23) виконується при $\sigma_\alpha^2 = 0$ для абсолютно однорідно поляризованого поля. Як бачимо зі співвідношення (22), що аналогічно (11), (12), усереднені параметри Стокса можуть бути визначені на основі вимірювання дисперсії азимуту поляризації в його сідло-

вих точках. Із цього ж співвідношення при відомих параметрах Стокса простим підрахунком може бути визначена дисперсія азимуту поляризації для неоднорідного векторного поля в областях із переважною поляризацією. Зауважимо, що дисперсія азимуту, у цьому випадку, може бути подана як функція відстані між найближчими вихорами одного знака l_v , що відносяться до різних ортогональних лінійно-поляризованих компонент.

Порівняння експериментальних результатів і даних комп'ютерного моделювання

Параметри Стокса й середня відстань між найближчими вихорами одного знака ортогональних компонент були отримані не тільки в результаті комп'ютерного моделювання, але й експериментально визначені для різних рівнів деполаризації. Як тест-об'єкти були обрані тонкі розсіюючі полімерні плівки. При цьому рівні деполаризації поля після розсіювання на них були близькими до рівнів деполаризації, для яких проводилося комп'ютерне моделювання. Схема експериментального дослідження зображена на рис. 4. Циркулярно поляризований пучок надходить на вхід інтерферометра Маха-Цандера. В одне із плечей інтерферометра, у фокусі об'єктива 10, розташовувався однократний розсіювач (тонка полімерна плівка). Таке положення об'єкта забезпечувало формування поля в далекій зоні безпосередньо після об'єктива. На виході інтерферометра розташовувався Стокс-поляриметр для вимірювання інтегральних параметрів Стокса. Циркулярно-поляризований опорний пучок і поляризатор 13 забезпечували визначення позиції й знака кожного компонентного вихору методом, описаним у [17]. Отже,

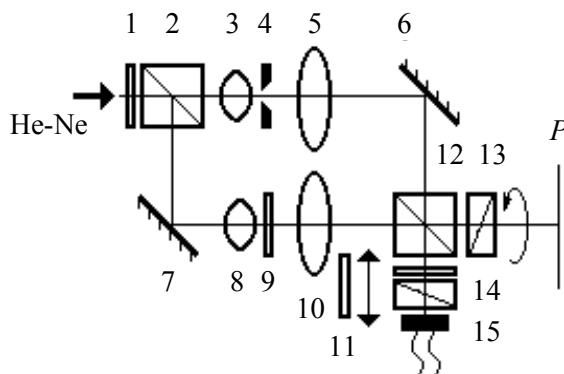


Рис. 4. Схема експерименту: 1, 11 – $\lambda/4$ -пластинка, 2, 12 – світлоподільник, 3-5 – коліматор, 6, 7 – дзеркала, 8 – мікрооб'єктив, 9 – об'єкт, 10 – об'єктив, 13 – аналізатор, 14 – Стокс-поляриметр, 15 – фотоприймач

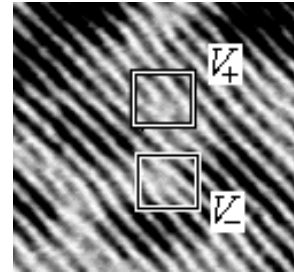


Рис. 5. Компонентні вихорі різних знаків

реалізовувалася можливість одночасного виміру усереднених поляризаційних параметрів і одержання сіток вихорів ортогональних компонент.

Компонентні вихорі різних знаків можна ідентифікувати з відповідних інтерференційних картин (див. рис. 5) як протилежно напрямлені інтерференційні вилочки [21,22]. Були отримані сітки компонентних вихорів для різних об'єктів, які вносили різний рівень деполаризації. Так само були обчислені середні відстані між сусідніми вихорами одного знака, що відносилися до різних компонент.

На рис. 6, 7 наведені експериментальні результати і результати комп'ютерного моделювання векторного поля для різних ступенів деполаризації поля.

Рис. 8, 9 ілюструють порівняння даних комп'ютерного моделювання і результатів експерименту. На рис. 8 зображений взаємозв'язок між рівнем деполаризації й відстанню між вихорами. Рис. 9 ілюструє залежність параметрів Стокса s_2 й s_3 від відстані між компонентними вихорами одного знака.

Як видно, всі залежності практично лінійні й спостерігається гарна відповідність між даними, отриманими комп'ютерним моделюванням і експериментальними дослідженнями.

Висновки

У результаті проведених досліджень було встановлено, що характеристики поляризаційних сингулярностей, системи особливих точок (вихорів різниці фаз, С-точок, сідлових точок різниці фаз, азимуту поляризації) визначають не тільки якісне поведіння векторного поля в кожній його точці, але й однозначно пов'язані з його усередненими поляризаційними характеристиками.

Дисперсія різниці фаз між ортогональними компонентами, що відповідає різним рівням інтегральної деполаризації векторного поля, є функцією середньої відстані між найближчими вихорами одного знака, що відносяться до різних лінійно – поляризованих ортогональних компо-

нент. В остаточному підсумку, усереднені параметри Стокса, дисперсія азимуту поляризації можуть бути отримані при вимірюванні такої середньої відстані.

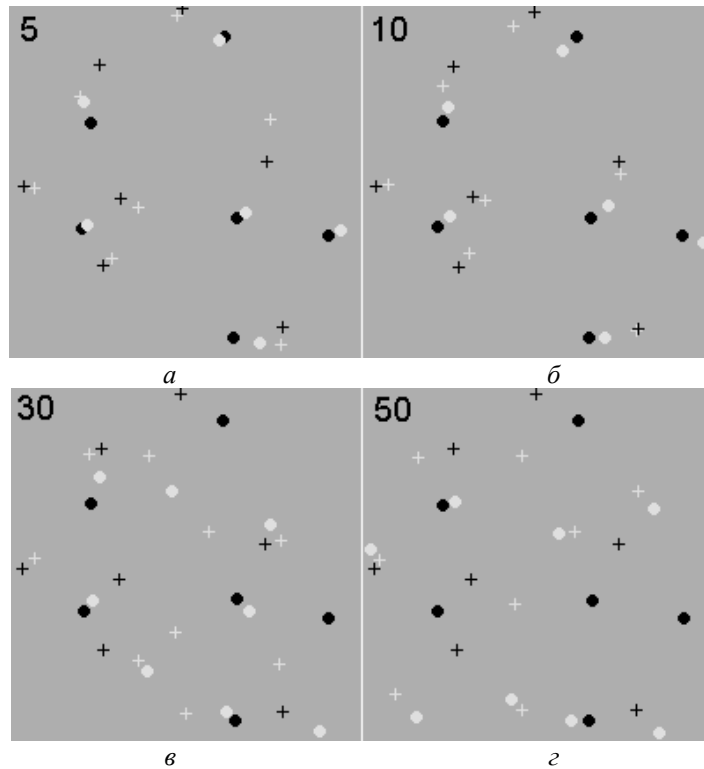


Рис. 6. Положення вихорів (комп'ютерне моделювання), асоційованих з ортогональними компонентами для різних рівнів "деполяризації" поля. Цифра у лівому верхньому куті відповідає рівню деполаризації. ●, ■ і ●, ■ – позиції вихорів ортогональних компонент. ●, ● – позитивні вихорі, ■, ■ – негативні вихорі

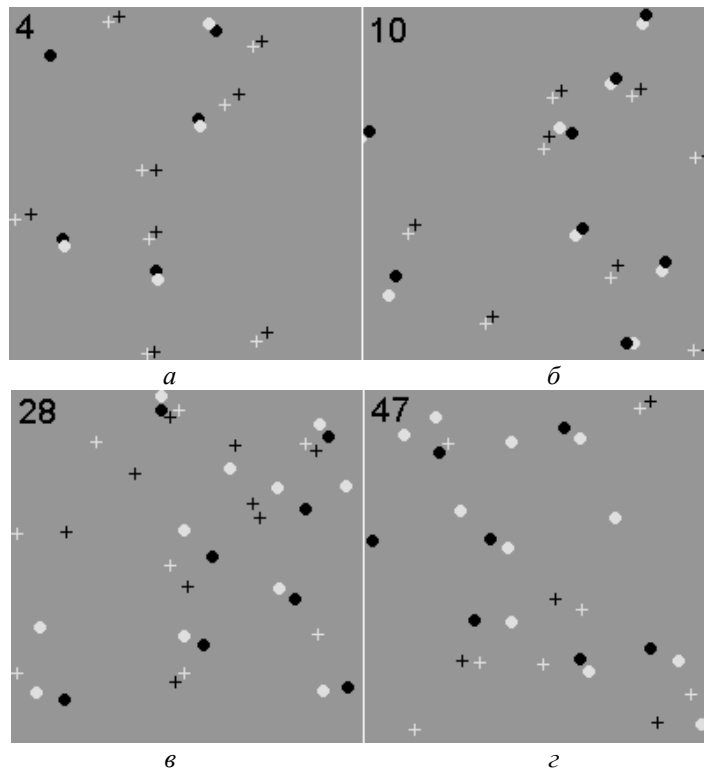


Рис. 7. Положення вихорів (експеримент), асоційованих з ортогональними компонентами для різних рівнів "деполяризації" поля. Цифра в лівому верхньому куті відповідає рівню деполаризації. ●, ■ і ●, ■ – позиції вихорів ортогональних компонент. ●, ● – позитивні вихорі, ■, ■ – негативні вихорі

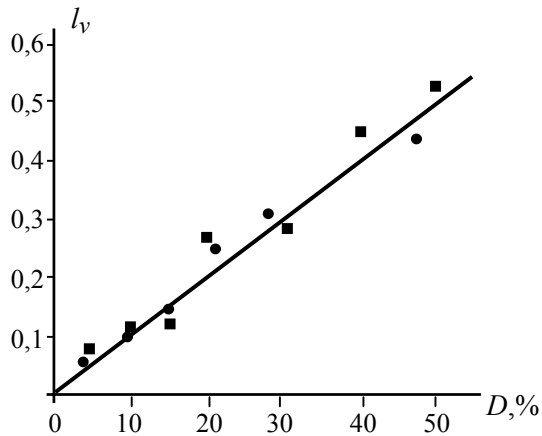


Рис. 8. Взаємозв'язок між рівнем деполаризації й відстанню між вихорами. ● – експериментальні результати, ■ – дані комп'ютерного моделювання

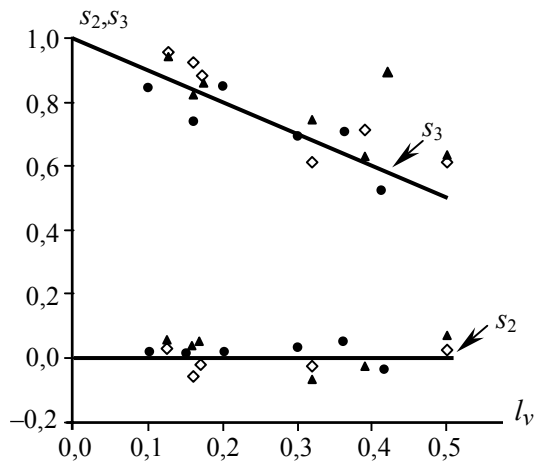


Рис. 9. Залежність параметрів Стокса s_2 і s_3 від відстані між компонентними вихорами одного знаку. ● – експериментальні результати, ▲ – комп'ютерне моделювання (результати, отримані на основі співвідношення (12)), ◇ – результати комп'ютерного моделювання (пряме усереднення локальних параметрів Стокса)

Розміри областей, в яких істотно змінюється поляризація, визначаються тільки рівнем інтегральної деполаризації. У той час як розміри й положення s -контурів для рівня деполаризації менше 50% залежать також і від переважної різниці фаз між компонентами. Розміри s -контурів мінімальні при переважно циркулярній поляризації. Для рівня деполаризації більше 50% тонка структура стає аналогічною до структури повністю деполаризованого поля й не залежить від переважної різниці фаз між ортогональними компонентами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973.
2. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. – М.: Мир, 1981.

3. Ellis J., Dogariu A. Complex degree of mutual polarization // Opt. Lett. – 2004. – 29. – P.536.
4. Freund I. Polarization flowers // Optics Comm. 2001. – 199. – P.47.
5. Ван-де-Хюлт Г. Рассеяние света малыми частицами. – М.: Энергия, 1987.
6. Мировицкий Д.И., Будагян И.Ф., Дубровин В.Ф. Микроволноводная оптика и голография. – М.: Наука, 1983.
7. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. – М.: Мир, 1983. Т.1.
8. Nye J.F. Natural focusing and fine structure of light. – Bristol and Philadelphia: Institute of physics publishing, 1999.
9. Hajnal J.V. Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves. I. Theory // Proc. R. Soc. Lond. – 1987. – A414. – P.433.
10. Nye J.F. Hajnal J.V. The wave structure of monochromatic electromagnetic radiation // Proc. R. Soc. Lond. – 1987. – A409. – P.21.
11. Angelsky O., Besaha R., Mokhun A., Mokhun I., Sopin M., Soskin M., Vasnetsov M. Singularities in vectorial fields // SPIE Proc. – 1999. – 3904. – P.40.
12. Ангельський О.В., Бесага Р.М., Мохунь І.І. Сопін М.О., Соскін М.С. Сингулярності у векторних полях // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 57: Фізика. – Чернівці: ЧДУ, 1999. – С.88.
13. Angelsky O., Mokhun A., Mokhun I., Soskin M. The relationship between topological characteristics of component vortices and polarization singularities // Optics Comm. – 2002. – 207. – P.57.
14. Nye J.F. Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations // Proc. R. Soc. Lond. – 1983. – A387. – P.105.
15. Freund I., Soskin M., Mokhun A. Elliptic critical points in paraxial optical fields // Optics Comm. – 2002. – 208. – P.223.
16. Mokhun A., Soskin M. Interrelations of fine structure of the vector field and its averaged polarization characteristics // SPIE Proc. – 2002. – 4607. – P.47.
17. Angelsky O., Mokhun A., Mokhun I., Soskin M. Interferometric methods in diagnostics of polarization singularities // Phys. Rev. E. – 2002. – 65. – P.602.
18. Панулис А. Теория систем и преобразований в оптике. – М.: Мир, 1971.
19. Гудмен Дж. Статистическая оптика. – М.: Мир, 1988.
20. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. – М.: Наука, 1978.
21. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. Дислокации поверхности волнового фронта и нули амплитуды // ЖЭТФ. – 1981. – №80. – С.1789.
22. Baranova N.B., Mamaev A.V., Pilipetskii N.F., Shkunov V.V., Zeldovich B.Ya. Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation // J. Opt. Soc. Am. – 1983. – 73. – P.525.