УДК 535.2

© 2005 р. В.М.Рудейчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ТИПУ *CUSP* ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕКТРА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Досліджено функції з особливими точками, їх суми та добутки за допомогою спектру сингулярності. Показано, що при додаванні двох функцій з особливою точкою показник Холдера зменшується, а при множенні – збільшується.

Functions with *cusp*-singularities, their sums and products are investigated with the help of singularity spectrum. It is shown that Hölder exponet decreases in the case of the sum of two functions with *cusp*-singularity and increases in the case of their product.

В останні роки при різноманітних дослідженнях оптичних полів досить успішно використовуються поняття сингулярної оптики [1]. З огляду на це важливою є задача виявлення особливих точок та визначення їх ступеня сингулярності, а також дослідження впливу на параметри сингулярностей операцій додавання та множення. За допомогою вейвлет-перетворення функції з особливістю типу *cusp* можна визначити положення цієї особливої точки, а також отримати значення так званого показника Холдера h, який описує ступінь сингулярності даної точки [2]. При наявності декількох особливих точок або коли сингулярність несиметрична відносно положення особливої точки, вводиться поняття спектра сингулярності $D(h)$, за допомогою якого можна визначити розмірність Хаусдорфа множини всіх точок з однаковим показником Холдера. Спектр сингулярності отримується з так званої "лінії максимуму" вейвлет-перетворення. В даній статті наводяться результати дослідження впливу операцій множення та додавання на спектр сингулярності функцій із особливостями типу *cusp*, а саме: на положення максимуму спектру h_0 та на його ширину $\Delta h=h_{max}-h_{min}$.

На першому етапі досліджувались функції $|x|^a$ на інтервалі $x\in[-1, 1]$, які мають особливу точку x=0 з показником Холдера $h=a$ (рис. 1). Спектр сингулярності для таких функцій має вигляд вузької лінії (з нульовою шириною) в точці h_0. У таблиці 1 наведені параметри спектрів сингулярності (положення максимуму і ширина) для особливих точок із показником Холдера 1/3, 1/2, 2/3 та 3/3. Як бачимо, із збільшенням показника Холдера положення максимуму спектра сингулярності теж зростає.

Наступним кроком було вивчення впливу на ступінь сингулярності особливої точки операції додавання до функції константи C та множення її на константу C. Як показали дослідження, додавання константи не змінює вигляд спектра сингулярності, а при множенні на константу положення максимуму спектра збільшується при C<1 і зменшується при C>1. Ширина спектра при цьому не змінюється (таблиця 2).

При додаванні до функції $|x|^{1/2}$ лінійної функції $x/2$ отримуємо порушення симетрії відносно особливої точки x=0 (рис. 2, де ліве "крило" опускається, а праве – піднімається). Ліва та права частини мають різні показники Холдера, тому спектр сингулярності вже не лінія в точці h_0, а займає інтервал від $h_{min}=h_{пр}$ до $h_{max}=h_{лів}$. У випадку віднімання функції $x/2$ спостерігається протилежна картина (спектр простягається від $h_{min}=h_{лів}$ до $h_{max}=h_{пр}$). Після додавання (віднімання) функціїї $|x|/2$ "крила" піднімаються (опускаються) однаковою мірою (подібно до випадку із множенням на C), тобто симетрія відносно особливої точки x=0 не порушується. Внаслідок цього спектр сингулярності не розширюється, але положення максимуму зміщується (по відношенню до h_0 для $|x|^{1/2}$) в точки, близькі за значенням до h_{min} (h_{max}) попереднього випадку (таблиця 3).

Особливо цікава ситуація, коли дві функції з особливостями додаються або перемножаються. Розглянемо випадок, коли сингулярності локалізовані в одній і тій же точці x=0. У випадку множення результат можна передбачити аналітично.

При множенні степеневих функцій отримуємо степеневу функцію з показником, що дорівнює сумі показників множників. Тому добуток двох функцій, які мають особливості з різним показником Холдера, буде характеризуватись сумарним показником Холдера. А у випадку додавання тих же функцій положення максимуму спектра сингулярності зміщується ліворуч, тобто h_0 для суми буде меншим від найменшого з показників функцій-доданків (таблиця 4).

Таблиця 1. Параметри спектра сингулярності для функцій, що мають особливу точку x=0 з різним показником Холдера

	$\|x\|^{1/2}$	$\|x\|^{1/3}$	$\|x\|^{2/3}$	$\|x\|^{3/3}$
h_0	0,491	0,394	0,592	0,774
Δh	0	0	0	0

Таблиця 2. Зміна положення максимуму спектра сингулярності функції $|x|^{1/2}$ при множенні її на константу C

C	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
h_0	0,92	0,71	0,59	0,49	0,39	0,31

Таблиця 3. Зміна параметрів спектра сингулярності функції $|x|^{1/2}$ при додаванні до неї функції $x/2$, при додаванні та відніманні функції $|x|/2$

	$\|x\|^{1/2}$	$\|x\|^{1/2}+x/2$	$\|x\|^{1/2}+\|x\|/2$	$\|x\|^{1/2}-\|x\|/2$
h_{min}	0,491	0,470	0,460	0,525
h_0	0,491	0,494	0,460	0,525
h_{max}	0,491	0,516	0,460	0,525

Таблиця 4. Положення максимуму спектра сингулярності для суми двох функцій, що мають особливості в одній і тій же точці з різними показниками Холдера

	$\|x\|^{1/2}+\|x\|^{1/3}$	$\|x\|^{1/2}+\|x\|^{2/3}$	$\|x\|^{1/2}+\|x\|^{3/3}$
h_0	0,272	0,370	0,432

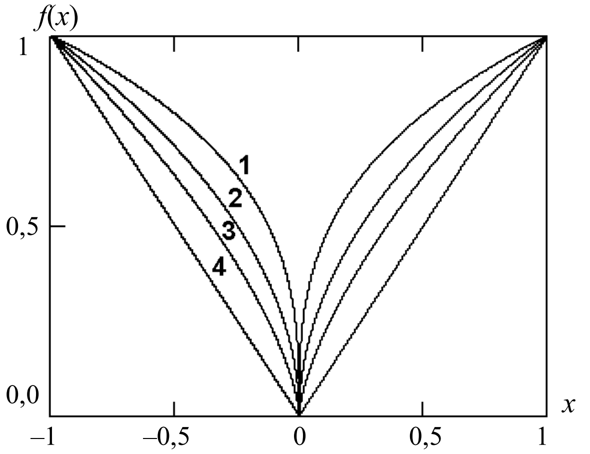

Рис. 1. Функції, які мають особливу точку x=0 з різним значенням показника Холдера h: 1/3 (1), 1/2 (2), 2/3 (3), 3/3 (4)

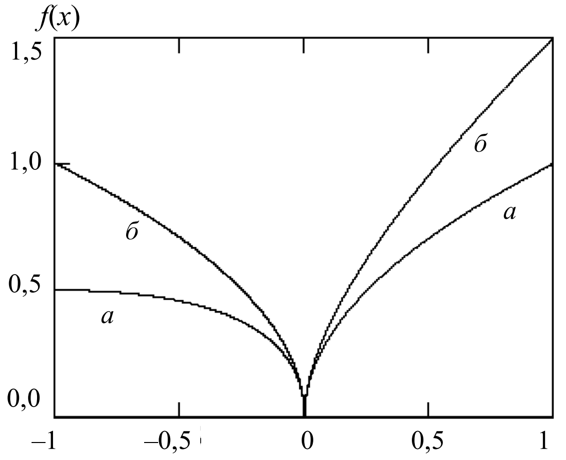

Рис. 2. Порушення симетрії відносно особливої точки x=0 при додаванні до функції $|x|^{1/2}$ лінійної функції $x/2$. $f(x)=|x|^{1/2}$ (а), $f(x)=|x|^{1/2}+x/2$ (б)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мохунь І.І., Ангельський О.В., Брандель Р.О.* Характеристики скалярних випадкових полів і сітки їх вихорів. Відновлення фази оптичного поля // Науковий вісник ЧНУ. Вип. 151: Фізика. Електроніка. – Чернівці: ЧНУ, 2002. – С.153-156.
2. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. – 1996. – **166,** №11. – С.1145-1170.