

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОПУЛЯЦІЇ ОМЕЛИ БІЛОЇ (*Viscum album L.*) ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТАЛОГО РОЗВИТКУ САДОВО-ПАРКОВОГО ГОСПОДАРСТВА МІСТ

І. О. РИБАЛКА, Ю. І. ВЕРГЕЛЕС, В. О. БАРАННІК

*Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова*  
*e-mail: Inna.Rybalka@gmail.com*

У статті розглянуто проблему контролю розвитку популяції омели білої (*Viscum album L.*) – рослини-напівпаразита деревних порід – у міському ландшафті з метою забезпечення сталого розвитку садово-паркового господарства міст. У наш час у зв'язку зі змінами клімату омелу внесено до розряду активних інвазійних рослин: від її надмірного розвитку потерпають насадження міст, дендрологічних парків із цінною деревною рослинністю, лінійні насадження вздовж автомобільних та залізничних магістралей тощо. Разом із тим, омела є одним із ключових видів у складі антропогенних екосистем, а відтак лише екологічно обґрунтовані стратегії, спрямовані на зменшення збитків садово-парковому господарству разом із підтримкою оптимального рівня видового різноманіття у містах, мають стати основою інтегрованих засобів контролю за розповсюдженням омели.

Дослідження здійснено у 2006–2010 рр. на пробних ділянках, розташованих у північній (147 га), північно-східній (959 га), центральній (736 га) та південно-східній (158 га) частинах міста Харків (Україна) (загалом досліджено 2000 га, або близько 6 % від загальної площі міста). Для встановлення кількості кущів омели в кожній окремій дискретній групі мета-популяції застосовано оригінальну методіку бальної оцінки чисельності: для кількості кущів від 1 до 5 індекс чисельності становив «1»; для 6–10 – «2»; 11–20 – «3»; 21–40 – «4» і т. д. Для відображення приблизного співвідношення кущів омели за віком у кожній окремій дискретній групі використань популяційно-демографічний коефіцієнт  $K[j-g-s]$ , як співвідношення ювенільних кущів ( $j$ ), кущів 1-го і 2-го генеративного віку ( $g$ ) та сенільних кущів ( $s$ ). Записували його, використовуючи символи: 0 (рослини відповідної вікової групи відсутні), 1, 2, і 3 (залежно від доли кущів відповідного віку у дискретній групі).

Представлено матричну модель динаміки чисельності популяції омели білої, параметри якої було визначено за даними польових спостережень, а їх налаштування проводилося в два етапи. Основне припущення: стабільний стан популяції омели, за якого розподіл особин за віком зберігається в часі, і при цьому розмір усієї популяції може змінюватися, забезпечується, якщо чисельність кущів  $i$ -го віку виражається геометричною прогресією. Матрична модель надає можливість проаналізувати у чисельності омели, вікової структури її популяції як у ретроспективі, так і на перспективу. Моделювання популяції омели білої (зокрема запровадження сценаріїв щодо змін її чисельності на перспективу) може стати одним із інструментів, який дасть змогу визначати пріоритетність заходів щодо зменшення шкідливого впливу цього виду у містах.

**Ключові слова:** омела біла, *Viscum album L.*, модель, динаміка популяції, садово-паркове господарство.

**Вступ.** Омела біла (*Viscum album L.*) – вічнозелений кущ із родини *Loranthaceae*, поширюваний на багатьох видах листопадних дерев. Плід омели – соковита ягода з клейкою м'якоттю, яка спочатку зелена (жовто-зелена, напівпрозора), а після дозрівання (взимку) – біла. Розповсюджують насіння рослини птахи, які живляться її плодами в зимовий період року: переважно, це омелюх (*Bombycilla garrulus L.*) та дрозди – омелюх (*Turdus viscivorus L.*) і – набагато меншою мірою – чикотень (*T. pilaris L.*). Насіння омели, яке пройшовши через травну систему птаха, зберігає схожість, залишається клейким і легко прилипає до гілок дерев.

Вважається, що омела біла впливає на продуктивність насаджень, спричиняє зниження енергії росту дерев та їх довговічності, втрату

декоративності та врожайності, а врешті-решт призводить до часткової, або суцільної суховерхості та поступового усихання дерев (Шлапак та ін. 2013; Díaz-Limón et al. 2016; Prochazka 2004).

Омела завдає шкоди природним і штучним насадженням у південній та центральній Європі, проте екологічною загрозою в лісовому секторі її там не вважають (Zuber 2004). В Україні ж останнім часом дедалі помітнішою стає швидка інвазія цього виду на території, де ще донедавна її не було. Особливо сприятливі умови для розвитку популяції цієї рослини-напівпаразита складаються у містах, де насадження зазвичай найбільш ослаблені порівняно із природними через посилене антропогенне навантаження. Так, М. Лисенко зазначає (Лисенко, 2007), що поточний санітарний стан зелених насаджень загального користування (парків, скверів,

бульварів тощо) здебільшого не відповідає нормативним вимогам ведення паркового господарства і що одним із факторів, що до цього призводять, є омела.

Єдиним заходом боротьби з омелою в умовах міста залишається механічне видалення уражених нею гілок або повне видалення дерева за дуже сильного ураження. З інтенсивним розповсюдженням омели догляд за міськими насадженнями стає нараз витратнішим (Миняева, 1975).

Разом із тим, контроль за розповсюдженням омели не може зводитися до її суцільного винищення. Чисельними дослідженнями доведено, що вона відіграє ключову роль у забезпеченні біорізноманіття та стійкості міських екосистем (Sovern et al. 2011; Watson, Herring, 2012): на територіях, де рослина була повністю знищена, через три роки після її видалення спостерігалось скорочення загального видового різноманіття птахів у середньому на 20 % порівняно з контролем (території, де омела продовжувала рости). Н. Ю. Таран із співавторами зазначають (Таран та ін., 2008), що у результаті знищення омели неминуче зменшиться чисельність птахів, які живляться її плодами; а надалі зменшення кількості гніздових та перелітних птахів спричинить поширення комах-фітофагів улітку, що може призвести до збільшення рівня ураженості та погіршення продуктивності насаджень. Тільки екологічно обгрунтовані стратегії можуть стати основою інтегрованих засобів контролю за розповсюдженням омели у сучасних технологіях садово-паркового господарства (Таран та ін., 2008).

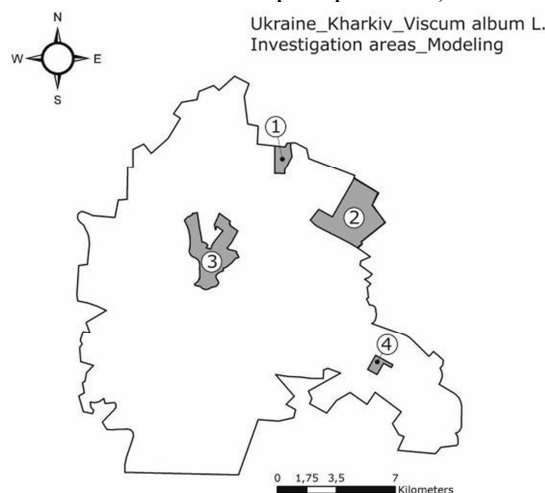
Моделювання популяції омели білої (зокрема запровадження сценаріїв щодо змін її чисельності на перспективу) – це один із інструментів, визначення пріоритетності заходів зі зменшення шкідливого впливу цієї рослини-напівпаразита у містах.

У 1995 році у Франції під час натурних спостережень за 120-ма річними австрійськими чорними соснами (*Pinus austriaca* Hüll., або *Pinus nigra* Arnold var. *austriaca* Aschers. et Graebh.) вивчено динаміку популяції *Viscum austriacum* Wiesb. За результатами дослідження впроваджено ретроспективні сценарії еволюції популяції омели. Аналогічні дослідження проведено у Швеції, де розрахунки змін чисельності омели на перспективу показали, що за 15 років чисельність омели зростає на 400 % (Zuber 2004). Особливості популяційної динаміки омели білої вивчено (Baltazar et al. 2015), тож моделювання розвитку популяції омели білої досі актуальні.

*Мета дослідження* – змодельовати розвиток популяції омели білої у міському ландшафті для подальшого використання у садово-парковому господарстві в контексті сталого розвитку міст.

**Матеріали та методи.** Дослідження виконано у 2006-2010 рр. на території м. Харків. За ландшафтним районуванням вона належить до Харківської схилово-височинної області Середньоруської лісостепової провінції Східноєвропейської рівнинної ландшафтної країни і розташована на південному заході Середньо-Руської височини. Клімат помірний, із середньорічною кількістю опадів 500–570 мм і середніми температурами січня –  $-8^{\circ}\text{C}$ , липня – понад  $20^{\circ}\text{C}$ . Основні генетичні типи ґрунтів – чорноземи (які утворилися на лесах різного механічного складу) і сірі опідзолені лісові ґрунти, які на території міста зазнали суттєвої антропогенної трансформації.

Пробні ділянки вибрано у північній (147 га), північно-східній (959 га), центральній (736 га) та південно-східній (158 га) частинах м. Харків (рис. 1). Загалом досліджено 2000 га (приблизно 6 % від загальної площі території міста).



**Рис. 1.** Ділянки, на яких досліджено розповсюдження омели білої з 2006 по 2008 рр. (м. Харків, Україна)  
**Fig. 1.** Study areas location in the city of Kharkiv (Ukraine) for investigations of the White Mistletoe spread

Натурні вимірювання виконано за оригінальною методикою. Всі кущі омели на окремому дереві з одним головним стовбуром або на дереві з кількома головними стовбурами, які за вживаними в лісівництві критеріями вважаються окремими деревами, або на кількох деревах, які утворюють групу (тобто щонайменш два дерева, відстань між якими менша за діаметр крони кожного з них), вважалися «дискретною групою». Для відображення кількості кущів омели в кожній окремій дискретній групі застосовували шкалу чисельності: для кількості кущів від 1 до 5 індекс чисельності становив «1»;

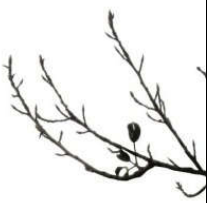


для 6–10 – «2»; 11–20 – «3»; 21–40 – «4»; 41–80 – «5», 81–160 – «6», 161–320 – «7», 321–640 – «8» (враховуючи, що в межах Харкова не виявлено дискретних груп, у яких було більш ніж 640 кущів омели, розроблена шкала була обмежена індексом чисельності «8»).

У літературі з біометрії (напр.: Песенко, 1982) зазначається, що вимірювання логарифму чисельності популяції – най адекватніша характеристика процесу відповідно основної теорії динаміки популяцій. За географічним аналізом змін чисельності логарифмічний масштаб має низку переваг (зручність застосування при великих змін чисельності, чіткіше проявлення закономірностей відносної зміни чисельності, більш згладжений вигляд графіків порівняно з лінійними), тому представлена шкала побудована на напівлогарифмічній основі.

Під час розробки шкали бальної оцінки чисельності омели брали до уваги наявні шкали вітчизняних дослідників, напрацьовані науковцями Національного ботанічного саду ім. М. М. Гришка НАН України, Національного дендропарку «Софіївка» НАН України (Рум'янков, 2010; Таран та ін., 2008; Шлапак та ін., 2010) тощо, але під час проведення обліків цього виду в умовах міста Харків вони виявилися нерепрезентативними, оскільки за цими методиками всі уражені омелою дерева мали бути віднесені до одного класу. Тож градації індексів чисельності омели для даного дослідження підібрано індивідуально на основі виявлення емпіричних закономірностей за результатами суцільного обліку всіх кущів омели

Таблиця 1.

Вікові групи омели білої

Вікова група <i>Age class</i>	<i>j</i> – ювенільні рослини (омела «молода») <i>juvenile plants</i>	$(g_1 + g_2)$ – рослини 1-го та 2-го генеративного віку (омела «зріла») <i>plants of the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> generative age</i>	<i>s</i> – сенільні рослини (омела «стара») <i>senile plants</i>
Віковий інтервал	1–5 років/уґс	6–20 років/уґс	21–45+ років/уґс
Вигляд рослини на гілці дерева-живителя			
Діаметр куща омели,	$D < 20$ (cm)	$20 \leq D \leq 55$ (cm)	$D > 55$ (cm)
Характерні ознаки	Віялоподібна форма куща (Zuber 2004)	Кулеподібна форма куща (Zuber 2004)	Досить висока щільність листя та пагонів

на кожному окремому дереві ( $n = 1096$ ), рис. 2 під час попередніх (2005–2006 рр.) досліджень розповсюдження цього виду в районі Павлова Поля у північно-західній частині міста.

Для відображення приблизного співвідношення кущів омели за віком у кожній окремій дискретній групі використовували популяційно-демографічний коефіцієнт  $K[j-g-s]$  (автори: І. О. Рибалка, Ю. І. Вергелес), який відображає співвідношення ювенільних рослин (*j*), рослин 1-го і 2-го генеративного віку (*g*) та сенільних (*s*) рослин (таблиця 1). Записували його, використовуючи символи: 0 (рослин відповідної вікової групи немає), 1, 2, і 3 залежно від частки кущів відповідного віку у дискретній групі (табл. 1, 2).

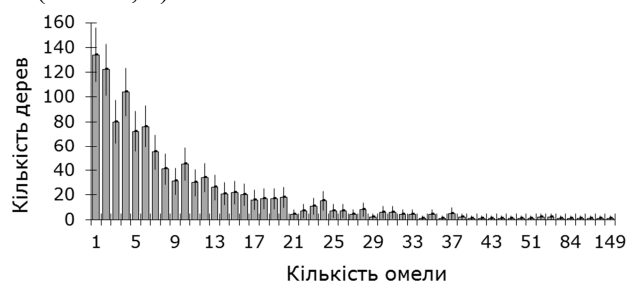


Рис. 2. Розподіл чисельності дерев-живителів відповідно до кількості на них кущів омели на пробних ділянках в районі Павлова Поля (м. Харків, 2005–2006)

Fig. 2. Frequency distribution of the host trees with certain number of the mistletoe dwarves from the field survey on the study area in the Pavlove Pole district (the city of Kharkiv, 2005–2006)

Table 1.

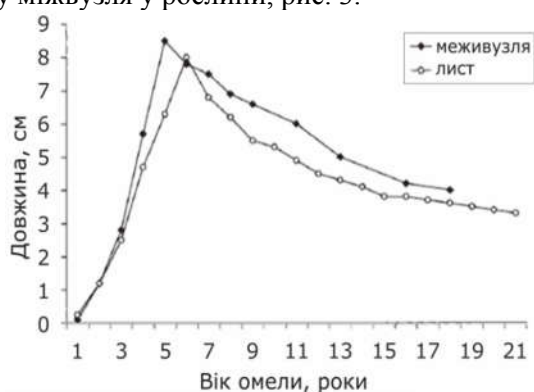
Age classes of the White Mistletoe

**Таблиця 2.**  
**Характеристика вікової структури**  
**популяції омели**

**Table 2.**  
**Representation of the age structure of the mistletoe**  
**populations with the population-demography coefficient  $K[j-g-s]$**

Співвідношення вікових груп <i>Age classes ratio</i>	Популяційно-демографічний коефіцієнт $K[j-g-s]$ <i>Population-demography coefficient</i>	Тип популяції за динамікою <i>Types of population dynamics</i>
$j = g = 0; s \neq 0$	K001	одновікова зі старими рослинами
$j = s = 0; g \neq 0$	K010	одновікова із середньовіковими рослинами
$j = 0; g = s \neq 0$	K011	згасаюча, із двома віковими групами
$j = 0; g < s$	K012	згасаюча, із двома віковими групами
$j = 0; g > s$	K021	стабільна, із двома віковими групами
$j \neq 0; g = s = 0$	K100	одновікова із молодими рослинами
$g = 0; j = s \neq 0$	K101	що стабілізується, з розривом поколінь
$j < s; g = 0$	K102	згасаюча, з розривом поколінь
$j = g; s = 0$	K110	що стабілізується, з двома віковими групами
$j = g = s \neq 0$	K111	що стабілізується
$j = g < s$	K112	згасаюча
$j < g; s = 0$	K120	що стабілізується, з двома віковими групами
$j = s < g$	K121	стабільна
$j < g = s$	K122	згасаюча
$j < g < s$	K123	згасаюча
$j < s < g$	K132	стабільна
$j > s; g = 0$	K201	що росте, з розривом поколінь
$j > g; s = 0$	K210	що росте, з двома віковими групами
$j > g = s$	K211	що росте
$j = s > g$	K212	що стабілізується
$g < j < s$	K213	що стабілізується
$j = g > s$	K221	що стабілізується
$g > j > s$	K231	стабільна
$j > s > g$	K312	що стабілізується
$j > g > s$	K321	що росте

Для визначення вікових груп омели білої враховували біологічні особливості виду, а також спиралися на матеріали Д. Цубера (Zuber, 2004), зокрема на відомості про динаміку росту міжвузля у рослини, рис. 3.



**Рис. 3. Динаміка росту листя та міжвузля омели білої (Zuber 2004)**

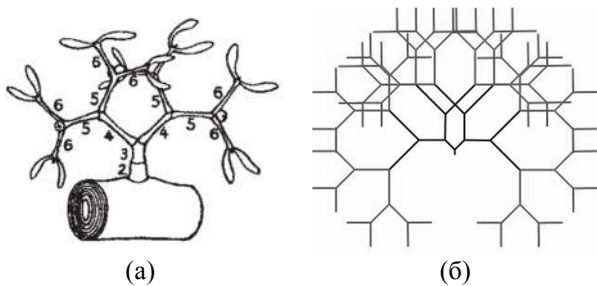
**Fig. 3. Growth dynamics (length vs. age, yrs) of leaves (white plots) and internodes (black plots) in the White Mistletoe (Zuber, 2004)**

Так, розвиток омели починається з фіксації та проростання її насінини на гілці дерева-живителя (перший рік розвитку рослини). Далі формується

складна ендofітна система паразита. Перша пара листя на омелі з'являється впродовж другого – третього років розвитку. У омели білої щороку виростає паросток, який на кінці розгалужується на один короткий та один довгий відростки (Zuber 2004); вважається, що за допомогою дихотомії можна визначати вік рослини (Stypiński, 1997).

Базуючись на даних статті (Zuber 2004), із застосуванням програмного забезпечення *AutoCAD 2013* було створено тривимірну модель куща омели (кут між гілками у дихотомії омели становив  $90^\circ$ , рис. 4).

За результатами моделювання встановлено, що з досягненням 21-річного віку кущ омели може досягати до 2 м у діаметрі. У Харкові у рамках попередніх досліджень омели білої кущів такого розміру не виявлено, тож вікові групи омели було виділено на основі додаткових досліджень, здійснених у районі Павлова Поля. Кущі омели різного діаметра ( $N = 20$ ) були відібрано в паркових насадженнях після обрізки дерев. На кожному досліджуваному кущі було визначено кількість (отже, точний вік рослин) і розміри меживузль.



**Рис. 4. Моделювання омели білої:**  
**(а) – приклад визначення віку рослини**  
**(Zoobler 2004); (б) – створення 3D-моделі куща омели у**  
**середовищі AutoCAD 2013 (показано формування**  
**меживузлів у 8-річній рослині)**

**Fig. 4. Fractal modeling of the White Mistletoe shrub:**  
**(a) – an example of age identification of the single shrub**  
**(Zuber 2004); (b) – 3D-modelling of the mistletoe shrub by**  
**means of AutoCAD® 2013 software (internode**  
**development in a 8-year old shrub)**

Статистичні характеристики величин росту меживузлів наведено у табл. 3. На основі розрахованих середніх величин приросту меживузлів (рис. 5) із застосуванням програмного забезпечення *AutoCAD 2013* побудовано графічну фрактальну модель розвитку куща омели від ювенільної до сенільної фази розвитку, рис. 6.

Літературні джерела свідчать (Zuber, 2004), що приблизно з четвертого – п'ятого років розвитку омела біла починає плодоносити, тому ювенільними вважалися рослини віком від 1 до 5 років. За результатами 3D-моделювання визначено, що за досягненням 5-річного віку омела має діаметр (з урахуванням річного приросту меживузлів і листя) 20 см та віялоподібну форму (рис. 6, а). Додатковою ознакою ювенільних рослин на місцевості є відсутність плодів.



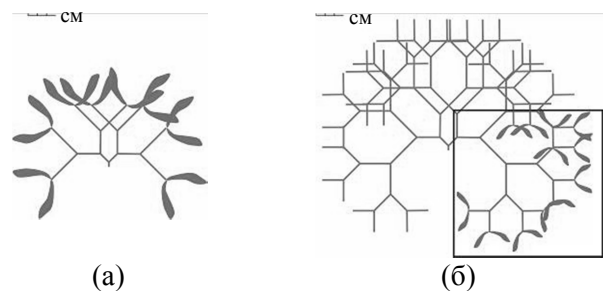
**Рис. 5. Динаміка росту меживузлів у**  
**омели білої на території м. Харків**

**Fig. 5. Internode length vs. age in the White**  
**Mistletoe shrubs in the city of Kharkiv (N=20)**

Вік омели генеративного віку визначали приблизно за точкою перегину, коли графік річного приросту меживузлів втрачав свою кривизну і виходив на приблизно постійний рівень (рис. 5), при цьому враховували тільки ті значення ліворуч від вказаної точки і до позначки «6 років». Цей вік дорівнює 6–21 року. За 3D-моделлю визначено, що із досягненням 21-річного віку омела набуває 55 см у діаметрі, а за рахунок щорічного приросту листкової маси та меживузлів – майже ідеальної кулеподібної форми із невисокою щільністю гілок і листя. Додатковою ознакою рослин генеративного віку на місцевості є наявність білих ягід. Рослини сенільного віку мають приблизно однаковий річний приріст меживузлів (рис. 4), їх вік становить від 21 до 45 років (граничний вік омели, (Styriński 1997)). Кущі сенільної фази розвитку досягли в діаметрі понад 55 см, характеризувалися майже ідеальною кулеподібною формою на тлі високої щільності листя і гілок. Виявлені зовнішні ознаки кущів омели не суперечать літературним даним (Zuber 2004).

Усі дискретні групи омели на ділянці відображалися на карті місцевості (масштаб 1:10 000). Картування проводилося у період зимового спокою деревних рослин.

З урахуванням біологічних особливостей омели (обмежений період розмноження, поширення через посередників – птахів, ріст на гілках дерев, що дає змогу їй уникати багатьох видів фітофагів, які можуть нею жититися) для імітаційного моделювання динаміки популяції омели було застосовано підхід, використаний М. Вільямсоном (Прокопенко и др. 1997).



**Рис. 6. Моделювання куща омели за даними,**  
**зібраними на території м. Харків: (а) – приклад**  
**створення ювенільної рослини; (б) – приклад**  
**створення рослини генеративного віку**

**Fig. 6. Fractal modeling of juvenile (a) and**  
**generative (b) mistletoe shrubs based on the calculated**  
**mean internode increments**

**Таблиця 3.**  
**Результати статистичного аналізу динаміки**  
**росту меживузь у омели білої**

**Table 3.**  
**Results of statistical analysis of the internode annual**  
**increments in the White Mistletoe**

Вік омели, у роках <i>Age, yrs</i>	Розмір вибірки ( <i>N</i> )	Середнє, мм, похибка <i>Mean±S.E.</i>	Min	Max	Стандартне відхилення <i>S.D.</i>	Достовірність різниці між середніми значеннями величин річних кілець уражених дерев порівняно із контролем	
						$t_{\text{факт.}}^*$	$t_{0,001}$
2	20	0,5±0,05	0,2	1,0	10,29	3,88	20
3	20	1,3±0,14	0,1	2,5	9,43	3,88	20
4	20	2,5±0,08	1,5	2,7	32,15	3,88	20
5	20	4±0,06	3,5	4,3	71,84	3,88	20
6	20	3,3±0,09	2,5	3,9	36,88	3,88	20
7	19	2,5±0,05	2,0	2,7	50,44	3,92	19
8	19	2,3±0,03	2,1	2,5	80,69	3,92	19
9	19	1,6±0,03	1,4	1,8	48,89	3,92	19
10	19	1,4±0,04	1,1	1,6	35,72	3,92	19
11	19	1,4±0,10	0,6	1,9	14,66	3,92	19
12	18	1,2±0,06	0,8	1,7	18,77	3,97	18
13	17	1,2±0,04	0,8	1,4	26,96	4,02	17
14	17	1,1±0,05	0,8	1,4	23,22	4,02	17
15	16	0,9±0,05	0,5	1,2	19,35	4,07	16
16	15	1,0±0,10	0,5	1,7	10,31	4,14	15
17	15	0,8±0,04	0,5	1,0	18,87	4,14	15
18	15	0,9±0,04	0,6	1,1	22,59	4,14	15
19	15	0,8±0,03	0,6	1,0	24,87	4,14	15
20	13	0,9±0,04	0,7	1,1	21,54	4,32	13
21	11	0,8±0,04	0,6	1,0	18,35	4,59	11
22	10	0,8±0,05	0,5	1,0	17,14	4,78	10
23	9	0,8±0,05	0,6	1,0	17,59	5,04	9
24	6	0,8±0,04	0,7	0,9	18,97	6,87	6

Примітки: \* – зв'язок достовірний на рівні значущості  $p \leq 0,001$ .

Зміни структури і чисельності популяції омели можна описати за допомогою матричної моделі, яка має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} m_{1,t+1} \\ m_{2,t+1} \\ \vdots \\ m_{N,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,N} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{N,1} & T_{N,2} & \dots & T_{N,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,t} \\ m_{2,t} \\ \vdots \\ m_{N,t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

де  $m_{i,t}$  – очікувана кількість особин  $i$ -го року розвитку у році з порядковим номером  $t$ ;

$T_{ij}$  – елемент матриці переходу, що визначає очікуване число особин  $i$ -го року розвитку, які з'являться в році  $t+1$  від особин  $j$ -го року розвитку попереднього року  $t$ .

Указана модель є варіантом моделі А. А. Маркова, у термінах якої елементи матриці переходу  $T_{ij}$  є імовірностями переходу елементів у системі зі стану  $j$  у стан  $i$ , тобто, на відміну від моделі М. Вільямсона, не можуть бути більше одиниці.

Особливо цікавим є «рівноважний» стан популяції омели, за якого розподіл особин за віком зберігається в часі. При цьому розмір усієї

популяції може змінюватися. Такий стан популяції рано чи пізно обов'язково досягається у стабільних зовнішніх умовах. Зокрема такий стан характеризується тим, що чисельність особин омели  $i$ -го року розвитку (віку) виражається залежністю:

$$m_{i,t} = a_t \cdot q^{i-1} \quad (2)$$

де  $a_t$  – кількість однорічних омель у році  $t$ ;  
 $q$  – співвідношення чисельності омель  $i$ -го ( $m_{i,t}$ ) і  $i+1$ -го ( $m_{i+1,t}$ ) років розвитку:

$$q = \frac{m_{i+1,t}}{m_{i,t}}, \quad (3)$$

яке не змінюється з часом.

Позначимо символами  $I_1, E_2$  (визначається як  $I_2 = E_2 - I_1$ ) і  $E_3$  ( $I_3 = E_3 - E_2$  відповідно) максимальний вік омели, за яким вона може бути віднесена до групи «молодих», «зрілих» і «старих» особин відповідно. Тоді чисельності

$M_{1,t}$ ,  $M_{2,t}$ ,  $M_{3,t}$  омели в межах кожної з цих груп у році  $t$  можна знайти у вигляді сум геометричних прогресій:

$$M_{1,t} = a_t + a_t q + a_t q^2 + \dots + a_t q^{t-1} = a_t \cdot \frac{1 - q^t}{1 - q}, \quad (4)$$

$$M_{2,t} = a_t q^{t_1} + a_t q^{t_1+1} + \dots + a_t q^{t_1+t-1} = a_t q^{t_1} \cdot \frac{1 - q^t}{1 - q}, \quad (5)$$

$$M_{3,t} = a_t q^{t_1+t_2} + a_t q^{t_1+t_2+1} + \dots + a_t q^{t_1+t_2+t-1} = a_t q^{t_1+t_2} \cdot \frac{1 - q^t}{1 - q}. \quad (6)$$

Розділивши рівняння (5) на рівняння (6) знайдемо:

$$\frac{M_{2,t}}{M_{3,t}} = \frac{q^{-t_2} - 1}{1 - q^{t_3}}. \quad (7)$$

Із рівняння (7) випливає, що:

$$q = \frac{1}{\left[1 + \frac{M_2}{M_3} (1 - q^{t_3})\right]^{\frac{1}{t_2}}}. \quad (8)$$

Рівняння (8) є по суті рекурентним співвідношенням, що дозволяє розрахувати величину  $q$  методом послідовних наближень, якщо відомі інші величини, які до неї входять. За вирахованою величиною  $q$  параметр розподілу  $a_t$  знаходиться з рівняння (9) у такому вигляді:

$$a_t = \frac{M_2 \cdot (1 - q)}{q^{t_1} \cdot (1 - q^{t_2})}. \quad (9)$$

Максимальний час  $T$  (у роках) розвитку популяції омели від моменту появи перших особин у році  $t$  визначається за співвідношенням

$$a_t q^{T-1} = 1, \quad (10)$$

звідси випливає, що:

$$T = \frac{\ln(a_t^{-1})}{\ln(q)} + 1. \quad (11)$$

У зв'язку з припущенням, що у омели майже немає природних ворогів (після проростання молода омела росте на гілках дерев, що дає змогу

їй уникати багатьох видів тварин, які можуть нею житися, наприклад кролів, козуль, оленів, кіз, овець та мишей (Zuber 2004)), елементи матриці переходу за проміжок часу, що дорівнює одному року, можуть бути представлені у вигляді:

$$T_{i,j} = \begin{cases} \lambda, & \text{якщо } i = 1 \text{ і } E_n \leq j \leq E_3 \\ 1, & \text{якщо } i > 1 \text{ і } j = i - 1 \\ 0, & \text{у інших випадках} \end{cases}, \quad (12)$$

де  $\lambda$  – середній за віком коефіцієнт розмноження;

$E_n$  – вік омели, з якого вона здатна плодоносити.

Коефіцієнт розмноження  $\lambda$  – єдиний параметр матричної моделі, який необхідно визначити.

У наш час механічне видалення уражених омелою дерев чи гілок у містах України (в межах яких спектр природних ворогів омели звужується до людини) має локальний характер, бо вимагає значних капіталовкладень, а тому у даній моделі не розглядається як суттєвий чинник впливу на популяцію омели в цілому.

У зв'язку із припущенням про відсутність смертності омели в період досягнення нею граничного віку 45 років, можна дійти висновку, що

$$m_{r,t} = \lambda \sum_{i \geq E_n} m_{i,t-r} = \lambda \sum_{i \geq E_n} m_{i+r,t}. \quad (13)$$

Звідси знаходимо співвідношення для визначення коефіцієнта розмноження, яке має такий вигляд:

$$\lambda = \frac{m_{1,t}}{\sum_{i \geq E_n} m_{i+1,t}}. \quad (14)$$

Результати натурних спостережень на чотирьох досліджених ділянках у межах міської території дозволили визначити загальну кількість кущів омели білої, кількість та щільність уражених нею дерев (таблиця 4).

Із таблиці 1 випливає, що на території площею 2000 га (тільки 6 % від загальної площі Харкова) омелою білою вражено 2300 дерев. Максимальна щільність напівпаразита (в середньому 82,54 кущ./га) – у південно-східній частині міста, дещо нижчий цей показник у центрі (28,09 кущ./га), а мінімальна щільність особин омели – у північній та північно-східній частинах (відповідно 0,92 та 0,74 кущ./га).

Таблиця 4.  
Загальні підсумки поширення омели білої на території м. Харків

Table 4.  
General results of the White Mistletoe survey in the study areas across the city of Kharkiv

Показник <i>Indices</i>	Частина міста /Study areas				Загалом на території <i>Total</i>	
	Північна <i>North</i>	Північно-східна <i>North-Eastern</i>	Центральна <i>Central</i>	Південно-східна <i>South-Eastern</i>		
Кількість дискретних груп омели <i>The number of discrete groups</i>	21	115	749	215	1100	
Щільність дискретних груп омели (1/га) <i>Density of discrete groups, ha<sup>-1</sup></i>	0,14	0,12	1,08	3,06	0,59	
Кількість кущів омели <i>Number of shrubs</i>	мінімум / <i>min</i>	86	398	12972	3895	17351
	максимум / <i>max</i>	185	1005	26040	7705	34935
Щільність омели (кущ./га) <i>Shrub density, ha<sup>-1</sup></i>	мінімум / <i>min</i>	0,58	0,42	18,68	55,43	9,28
	максимум / <i>max</i>	1,26	1,05	37,49	109,64	18,68
Кількість уражених омолою дерев <i>Number of host trees infested with the White Mistletoe</i>	21	204	1528	547	2300	
Щільність уражених омолою дерев (1/га) <i>Density of infested host trees, ha<sup>-1</sup></i>	0,14	0,21	2,19	7,78	1,22	

За результатами натурних спостережень на ділянках № 1–4 виявлено, що видами-живителями омели білої були клени сріблястий (*Acer saccharinum* L.) ясенелистий (*A. negundo* L.), гостролистий (*A. platanoides* L.), тополі бальзамічна (*Populus balsamifera* L.), пірамідальна (*P. italica* (DuRoi) Moench.), біла (*P. alba* L.), чорна (*P. nigra* L.), осика звичайна (*P. tremula* L.), робінія несправжньоакацієва (*Robinia pseudoacacia* L.), горобина звичайна (*Sorbus aucuparia* L.), ясени зелений (*Fraxinus lanceolata* Borkh.), високий (*Fraxinus excelsior* L.), липи серцелиста (*Tilia cordata* Mill.), європейська (*T. europaea* L.), береза повисла (*Betula pendula* Roth), каштан кінський звичайний (*Aesculus hippocastanum* L.), верба біла (*Salix alba* L.), яблуня домашня (*Malus domestica* Borkh.), та ін., всього 18 видів. Видові назви деревних рослин наведено згідно з «Определителем высших растений Украины» (Определитель... 1987).

Стосовно розподілу чисельності омели білої на дослідженій території, найчастіше траплялися дискретні групи омели, в яких було від 1 до 5 кущів (індекс чисельності – «1»). Це свідчить, що розповсюдження рослини в ще не заселені нею місця триває (найбільше таких дискретних груп виявлено в центральній частині міста, рис. 7).

Також за результатами натурних вибіркового дослідження розповсюдження омели білої в м. Харків було розраховано кількість «молодих», «зрілих» та «старих» кущів омели на кожній із досліджених ділянок (табл. 5).

Як видно із таблиці 2, найбільш заселені омолою були ділянки № 3 (центр міста) і № 4

(район селища Харківського тракторного заводу (ХТЗ) у південно-східній, а найменше заселені – ділянки № 1 (селище імені М. Є. Жуковського) і № 2 (Північна Салтівка) у північно-східній частинах міста.

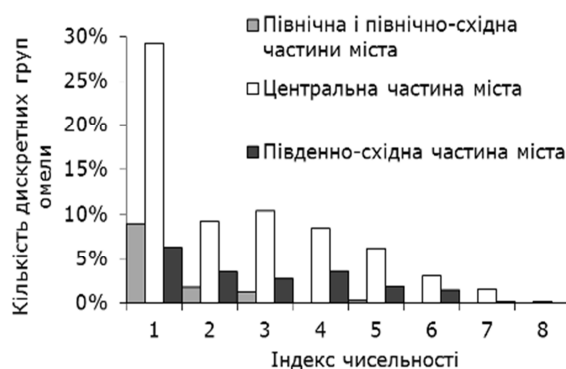


Рис. 7. Графік розподілу дискретних груп омели за індексами чисельності

Fig. 7. Frequency diagram of distribution of the White Mistletoe abundance classes in discrete groups in the north and north-eastern (grey charts), central (white charts) and south-eastern (black charts) parts of the city

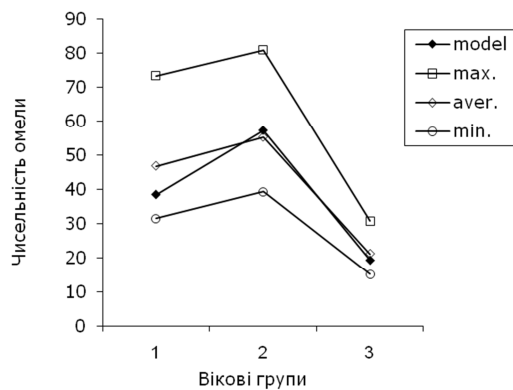
Налаштування моделі тривало у два етапи. На першому етапі, задавшись середнім значенням чисельності популяції омели зрілого  $M_{2,t}$  і старого  $M_{3,t}$  віку для кожної із ділянок, за рекурентним співвідношенням (8) розраховували відповідні величини знаменника геометричної прогресії  $q$ , і за формулою (9) – чисельність  $a_t$  рослин першого року розвитку. Далі, за формулою (2) розраховано стабільні розподіли чисельності особин за віком і чисельності трьох вікових груп омели  $M_{1,t}$ ,  $M_{2,t}$ ,  $M_{3,t}$ . Якщо під час порівняння чисельність першої



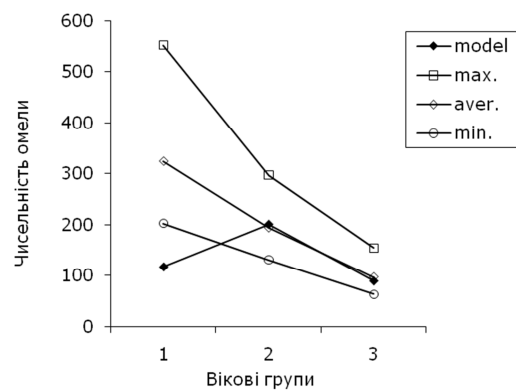
**Таблиця 5.**  
**Розподіл кущів омели білої за віком**

**Table 5.**  
**Age class distribution of the Mistletoe shrubs**

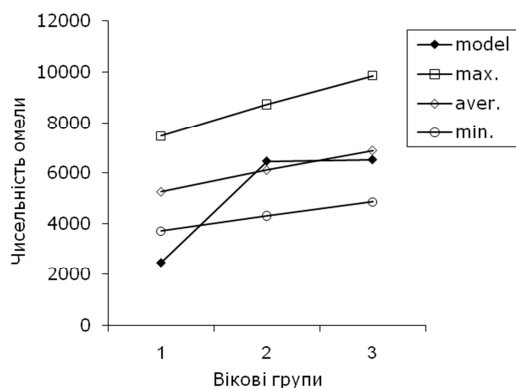
Вік кущів <i>Shrub age, yrs</i>	Кількість кущів (візуальна оцінка) <i>The number of shrubs</i>	Ділянка № / <i>Sample area No.</i>			
		1	2	3	4
молоді / <i>juvenile</i> 1–5 років	мінімальна ( <i>min</i> )	32	203	3747	1229
	середня ( <i>geometric mean</i> ) ± 0,50	47	324	5272	1719
	максимальна ( <i>max</i> )	73	553	7472	2423
зрілі / <i>generative</i> 6–20 років	мінімальна ( <i>min</i> )	39	131	4342	1734
	середня ( <i>geometric mean</i> ) ± 0,51	55	194	6125	2438
	максимальна ( <i>max</i> )	81	298	8722	3457
старі / <i>senile</i> 21–45 років	мінімальна ( <i>min</i> )	15	64	4884	932
	середня ( <i>geometric mean</i> ) ± 0,63	21	97	6902	1303
	максимальна ( <i>max</i> )	31	155	9851	1826



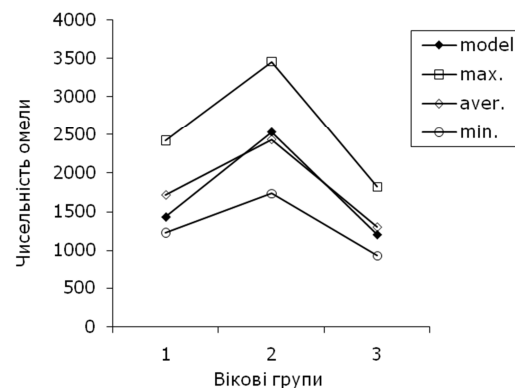
**Рис. 8.** Чисельність вікових груп омели на ділянці № 1 ( $q = 0,924$ ;  $a_t = 9$ )  
**Fig. 8.** Abundance of mistletoe age classes on the study area No. 1



**Рис. 9.** Чисельність вікових груп омели на ділянці № 2 ( $q = 0,939$ ;  $a_t = 27$ )  
**Fig. 9.** Abundance of mistletoe age classes on the study area No. 2



**Рис. 10.** Чисельність вікових груп омели на ділянці № 3 ( $q = 0,980$ ;  $a_t = 517$ )  
**Fig. 10.** Abundance of mistletoe age classes on the study area No. 3



**Рис. 11.** Чисельність вікових груп омели на ділянці № 4 ( $q = 0,942$ ;  $a_t = 322$ )  
**Fig. 11.** Abundance of mistletoe age classes on the study area No. 4

вікової групи (молоді кущі) не виходила за межі інтервалу, обмеженого мінімальною і максимальною граничною величиною спостережень (табл. 5), то припускалося, що перший етап налаштування успішно завершено.

На рис. 8–11 представлено модельні величини чисельності трьох вікових груп омели разом із даними натурних спостережень, що визначають довірчі інтервали величин.

Таблиця 6.

Модельні характеристики популяції омели білої

№ ділянки	Q	$a_t$	$\lambda$ , 1/рік	$M_{1,t}$	$M_{2,t}$	$M_{3,t}$	M
1	0,924	9	0,1270	38	55	21	114
3	0,953	964	0,0735	4386	8288	5479	18153
4	0,942	322	0,0914	1434	2438	1303	5175

Table 6.

Model parameters of the White Mistletoe populations

Як випливає із наведених рисунків, модельні чисельності  $M_{1,t}$  групи молодих рослин на ділянках № 1 і № 4 перебувають в довірчих інтервалах. Це дозволяє вважати, що гіпотеза розподілу чисельності омел за віком згідно з геометричною прогресією (2) не може бути відхилена з огляду на наявні натурні спостереження (табл. 5) і вважається робочою.

Величини  $M_{1,t}$  на ділянках № 2 і № 3 виходять за межі довірчих інтервалів. Із цієї причини на другому етапі налаштування параметрів моделі для ділянок № 2 і № 3 здійснювалися спроби підібрати величину  $q$  так, щоб чисельності усіх трьох груп не виходили за довірчі інтервали, вказані в табл. 2. Для ділянки № 2 ці спроби виявилися безуспішними, тому її було виключено із подальшого розгляду.

Для ділянки № 3 зниження величини  $q$  до значення 0,953 забезпечило входження чисельності усіх трьох вікових груп омели у довірчих інтервалах (рис. 12).

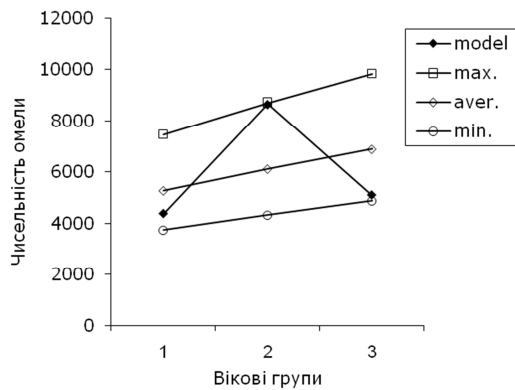
Рис. 12. Чисельність вікових груп омели на ділянці № 3 ( $q = 0,953$ ;  $a_t = 964$ )

Fig. 12. Abundance of mistletoe age classes on the study area No. 3

Для ділянки № 2 такий результат можна пояснити тим, що на ній популяція омели білої щойно з'явилася, тобто відносно молода (рис. 13). Тож дослідити її через матричну модель (2) «рівноважного» стану популяції, за якого розподіл особин за віком зберігається у часі, а розмір усієї популяції змінюється, неможливо.

Отже, дані натурних спостережень не дозволяють спростувати сформульовану модельну гіпотезу (2) щодо стабільного

розподілу чисельності омел за віком і для ділянки № 3.

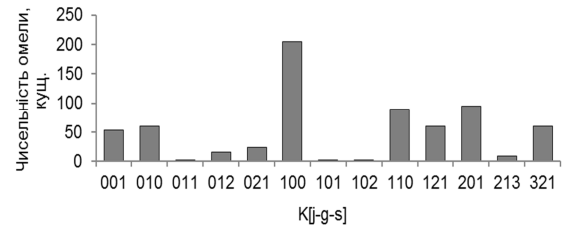


Рис. 13. Розподіл дискретних груп омели за популяційно-демографічними коефіцієнтами чисельності на ділянці № 2

Fig. 13. Distribution of the mistletoe discrete groups according to assigned population-demography indexes (for explanation see Table 2) on the study area No. 2

За формулою (14) розраховано величини коефіцієнта розмноження  $\lambda$  для трьох ділянок. Результати розрахунку разом із іншими модельними характеристиками популяції омели білої на зазначених ділянках наведено в таблиці 6.

На рис. 14 представлено відповідний модельний розподіл особин популяції омели білої за віком для ділянки № 1.

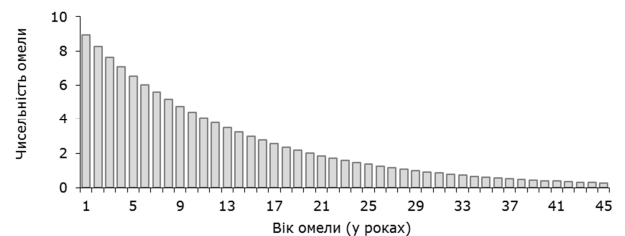


Рис. 14. Розподіл чисельності омели за віком на ділянці № 1

Fig. 14. Distribution of the modeled mistletoe number of individual shrubs by age (yrs) on the study area No. 1

Отримане значення коефіцієнта розмноження  $\lambda$  за даними обстеження ділянки № 3 (найбільш заселена омолою) дозволяє встановити, що матриця переходу (12) має єдине дійсне власне число  $e = 1,01852$ , якому відповідає власний вектор  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{45})$ , де  $v_1 = 0,21115$  і

$$v_1 = 0,9818 v_1. \quad (15)$$

Компоненти власного вектора  $v_1$  показують стабільний розподіл чисельності омели за віком (у відносних одиницях). При цьому, множник у (15) практично точно збігається з оцінкою

величиною  $q$ , отриманою за рекурентним співвідношенням (8), що дозволяє стверджувати про узгодженість цих оцінок.

Аналогічну процедуру налаштування матричної моделі здійснено й за даними обстеження на четвертій ділянці (також досить заселена омелою). Отримані результати такі:  $q = 0,942$ ,  $M_{1,t} = 1434$ ,  $M_{2,t} = 2438$ ,  $M_{3,t} = 1303$ ;  $m_{1,t} = 322$ ;  $\lambda = 0,09142$ ;  $e = 1,05795$ ;  $v_1 = 0,32746$  та  $v_1 + 1 = 0,945 v_1$ .

**Висновки.** Розроблено матричну модель динаміки чисельності популяції омели білої, яка надає можливість проаналізувати зміни у часі чисельності кущів омели, розподілу їх за віком як у ретроспективі, так і на перспективу.

Ріст чисельності та поширення омели у міському ландшафті може призвести до негативних наслідків для стану зелених насаджень. Моделювання популяції омели білої (зокрема запровадження сценаріїв щодо змін її чисельності на перспективу) може стати одним із інструментів, який допоможе визначити пріоритетність заходів зменшення шкідливого впливу цієї рослини-напівпаразита у містах.

Напрацьована нами модель досить зручна у застосуванні. Для того, щоб нею скористатися, необхідно здійснити натурні спостереження за омелою на певній території за вищеописаною методикою. На основі зібраних даних (у вигляді індексів чисельності та популяційно-демографічних коефіцієнтів) можливо розрахувати мінімальні, середні та максимальні значення чисельності омели в межах трьох вікових груп (молоді, зрілі та старі). Далі за усередненими значеннями (формула 8) визначають величину знаменника геометричної прогресії, а за формулою (9) – кількість омел першого року розвитку. (Якщо усі спроби підібрати величину  $q$  методом послідовних наближень марні, то це означає, що популяція омели ще не досягла рівноважного стану і тому не може бути досліджена за допомогою представленої моделі). Після цих процедур за формулою (11) можна визначити, коли саме омела проникла на ту чи іншу територію. Для запровадження сценаріїв розвитку популяції на перспективу необхідно за формулою (2) розрахувати стабільний розподіл омели за віком, а за формулою (14) – визначити коефіцієнт розмноження омели  $\lambda$ . Кількість кущів омели першого року розвитку в кожного наступного року  $t+1$  дорівнює добутку коефіцієнта розмноження  $\lambda$  на кількість кущів омели, здатних плодоносити (віком від 6 до 45 років) у поточному році  $t$ .

Подальші дослідження потрібно спрямувати на розробку комплексних екологічно

обґрунтованих рекомендацій щодо управління популяцією омели білої у міському ландшафті.

### Список літератури:

1. Особливості організації результативної боротьби з омелою білою / А. І. Івченко, О. П. Божок, І. М. Пацура та ін. // Науковий вісник НЛТУ України. – 2014. – № 24(5). – С. 12–18.
2. Лисенко М. Зелені насадження в урбанізованому середовищі міста Івано-Франківська // Вісник Прикарпатського національного університету імені В. Стефаника. Сер. «Біологія». – 2007. – № 7. – С. 236–240.
3. Миняева О. Распространение омелы и борьба с ней (США) // Сельскохозяйственная экспресс-информация. – Москва : Наука, 1975. – 34 с.
4. Определитель высших растений Украины / [Д. Н. Доброчаева, М. И. Котов, Ю. Н. Прокудин и др.] – Киев : Наукова думка, 1987. – 548 с.
5. Песенко Ю. А. Принципы и методы количественного анализа в фаунистических исследованиях. – М. : Наука, 1982. – 287 с.
6. Прокопенко А. И., Вайнер В. Г., Галкин В. Л. Экономико-экологическое моделирование. – Харьков : АО «Бизнес Информ», 1997. – 360 с.
7. Біологія розвитку *Viscum album* L. та екологічний моніторинг її поширення в лісопаркових біоценозах / Н. Ю. Таран, Н. Б. Светлова, Л. М. Бацманова та ін. // Український ботанічний журнал. – 2008. – № 2. – С. 242–251.
8. Визначення ступеня ураження омелою білою (*Viscum album* L.) деревних рослин парку «Піонерський» в місті Умань / В. П. Шлапак, Н. І. Козак, Ю. Ф. Терещенко та ін. // Науковий вісник НЛТУ України. – 2013. – № 23(6). – С. 324–328.
9. Baltazár, T., Pejcha, M., Varga, I. (2015). Modelling of the distribution of european mistletoe (*Viscum album*) with dependence on local factors in the Castle Park in Lednice. Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis, 63(5), 1441–1452.
10. Díaz-Limón, M. P., Cano-Santana, Z., Queijeiro-Bolaños, M. E. (2016). Mistletoe infection in an urban forest in Mexico City. Urban Forestry & Urban Greening, 17, 126–134.
11. Prochazka, F. (2004). A centre of occurrence of *Viscum album* subsp. *album* in eastern Bohemia and an overview of the diversity of its host plants in the Czech Republic. Preslia, 76, 349–359.
12. Sovern S. G. Nest reuse by Northern Spotted Owls on the east slope of the Cascade Range, Washington / S. G. Sovern, M. Taylor, E. D. Forsman // Northwestern Naturalist. – 2011. – Vol. 92. – P. 101–106.
13. Stypiński P. Biologia i ekologia jemioly pospolitej (*Viscum album*, Viscaceae) w Polsce / P. Stypiński // Fragmenta Floristica et Geobotanica Series Polonica. – 1997. – Vol. 1. – С. 3–115.
14. Watson D. M. Mistletoe as a keystone resource: an experimental test / D. M. Watson, M. Herring // Biological Sciences. – 2012. – Vol. 279. – P. 3853–3860.

15. Zuber, D. (2004). Biological flora of Central Europe: *Viscum album* L. Flora, 18, 181–203.

## References:

1. Ivchenko, A.I. et al., 2014. [Features of the effective management to suppress the White Mistletoe development]. *Naukovyi visnyk NLTU Ukrayiny*, 24(5): 12-18. (in Ukrainian)
2. Lysenko, M., 2007. [Urban tree stands of the city of Ivano-Frankivsk]. *Visnyk Prykarpats'kogo natsional'nogo universytetu imeni V. Stefanyka*, 7: 236-240. (in Ukrainian)
3. Minyaeva, O., 1975. [Mistletoe distribution and management (USA)]. *Sel'skohozyaistvennaya informatsiya*, Moscow, 'Nauka' Publ., 1975. – 34 p. (in Russian)
4. Prokudin, Yu.N., ed., 1987. [Identification guide of the higher vascular plants of Ukraine], Kyiv, 'Naukova dumka' Publ., 1987. – 548 p. (in Russian)
5. Pesenko, Yu.A., 1982. [Principles and methods of numerical analysis in the faunistic research]. Moscow, 'Nauka' Publ., 1982. – 287 p. (in Russian)
6. Prokopenko, A.I., Vainer, V.G. and Galkin, V.L., 1997. [Economic environmental modeling], Kharkiv, JSV "Biznes Inform", 1997. – 360 p. (in Russian)
7. Taran, N.Yu. et al., 2008. [Development biology of *Viscum album* L. and ecological monitoring of its distribution in urban forests]. *Ukrayinskiy botanichnyi zhurnal*, 2008, No. 2: 242-251. (in Ukrainian)
8. Shlapak, V.P. et al., 2013. [Determination of the infestation degree of the host trees by the White Mistletoe (*Viscum album* L.) in the 'Pionerski' Park, the city of Uman']. *Naukovyi visnyk NLTU Ukrayiny*, 23(6): 324-328. (in Ukrainian)
9. Baltazár, T., Pejcha, M., Varga, I. (2015). Modelling of the distribution of european mistletoe (*Viscum album*) with dependence on local factors in the Castle Park in Lednice. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*, 63(5), 1441–1452.
10. Diaz-Limón, M. P., Cano-Santana, Z., Queijeiro-Bolaños, M. E. (2016). Mistletoe infection in an urban forest in Mexico City. *Urban Forestry & Urban Greening*, 17, 126–134.
11. Prochazka, F. (2004). A centre of occurrence of *Viscum album* subsp. *album* in eastern Bohemia and an overview of the diversity of its host plants in the Czech Republic. *Preslia*, 76, 349–359.
12. Sovern S. G. Nest reuse by Northern Spotted Owls on the east slope of the Cascade Range, Washington / S. G. Sovern, M. Taylor, E. D. Forsman // *Northwestern Naturalist*. – 2011. – Vol. 92. – P. 101–106.
13. Stypiński P. *Biologia i ekologia jemioly pospolitej (Viscum album, Viscaceae) w Polsce* / P. Stypiński // *Fragmenta Floristica et Geobotanica Series Polonica*. – 1997. – Vol. 1. – C. 3–115.
14. Watson D. M. Mistletoe as a keystone resource: an experimental test / D. M. Watson, M. Herring // *Biological Sciences*. – 2012. – Vol. 279. – P. 3853–3860.
15. Zuber, D. (2004). Biological flora of Central Europe: *Viscum album* L. Flora, 18, 181–203.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE WHITE MISTLETOE (*VISCUM ALBUM* L.) POPULATIONS FOR SUSTAINABLE URBAN HORTICULTURE

I. O. Rybalka, Yu. I. Vergeles, V. O. Barannik

*The paper deals with the control of the White Mistletoe (*Viscum album* L.) population growth in urban landscapes in order to enhance sustainable horticulture. Nowadays, the White Mistletoe has been an invasive alien species that poses harmful effects to urban tree stands. At the same time it is a keystone species in urban ecosystems. Hence ecologically sound strategies to curb this species' excessive spread should be undertaken to reduce its damages to urban forestry.*

*The White Mistletoe populations were surveyed in 2006-2010 on the study areas located in the north (147 ha), north-eastern (959 ha), central (736 ha) and south-eastern (158 ha) parts of the city of Kharkiv, Ukraine. Totally ca. 6% of the city area was surveyed with the use of the original technique for mistletoe census and population analysis. To assess the mistletoe abundance on study areas the semi-logarithmic index was developed as follows: "1" is assigned to a discrete group of 1 to 5 individual mistletoe dwarves, "2" corresponds to the number of 6 to 10 dwarves, "3" – to 11-20, "4" – to 21-40, and so on to the maximal observed abundance of more than 500 individual mistletoe dwarves in a single discrete group (abundance index "8"). While analyzing the age structure of local mistletoe populations viewed as discrete groups the specially designed population-demography coefficient  $K[j-g-s]$  was applied to reflect the ratio among juvenile, generative and senile shrubs: digits 0, 1, 2, and 3 were combined into single operator to describe the relative share of each age class in the local population.*

*The survey data were used to develop a matrix model of the White Mistletoe population dynamics similar to the M. Williamson's model. The basic assumption was as follows: the population becomes stable, i.e. age class ratio is constant over time, but the population size may change, if the number of individual shrubs of the  $i$ -th age makes a geometric progression. The proposed model can be used for both prospective and retrospective analysis of population dynamics. Hence, the modeling approach introduced in the paper implying different scenarios allows developing a tool of prioritization of the White Mistletoe management interventions towards reduction of this species' harm to urban horticulture.*

*Keywords: the White Mistletoe, *Viscum album* L., modelling, population dynamics, urban horticulture.*

Отримано редколегією 15.11.2016

309