ЕКРАНУВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ У СЛАБОРЕЛЯТИВІСТИЧНОМУ ВИРОДЖЕНОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ГАЗІ

Б.В.Будний

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005
e-mail: bohdan@ktf.franko.lviv.ua

Розглядається вироджений електронний газ на основі моделі з однорідним компенсуючим фоном. Для опису електромагнітної взаємодії у такій системі використовується формалізм квантової електродинаміки при скінченній температурі і густині. Релятивістичні поправки враховуються у слаборелятивістичному наближенні. В наближенні хаотичних фаз отримано Фур'є-образи скалярного і векторного потенціалів, які створюються слабким статичним джерелом в електронному газі. Показано, що векторний потенціал не екранується. Скалярний потенціал екранується при температурі, відмінній від нуля. При нульовій температурі потенціал спадає з відстанню за степеневим законом.

Екранування далекосяжної взаємодії у класичній плазмі є добре вивченим ефектом. Релятивістичні поправки до класичних результатів досліджувалися на основі моделі Дарвіна електромагнітної взаємодії у слаборелятивістичному наближенні. Як зазначено в роботі [1], ця модель не дає надійних результатів. У зв'язку з цим для коректного опису повної електромагнітної взаємодії у плазмі навіть у слаборелятивістичному наближенні необхідно використовувати квантову електродинаміку, а точніше, її розширення на область скінченної температури і густини. Такі розрахунки вже проводилися для випадку нульової температури, зокрема у [2, 3], і ще раніше в ультрарелятивістичній границі [4]. У роботі [1] розглянуто екранування у слаборелятивістичній і слабовиродженій плазмі. Сильно вироджений електронний газ у рамках моделі Томаса-Фермі досліджувався у [5].

У даній роботі з перших принципів розраховується ефект впливу середовища на електромагнітні потенціали статичного розподілу заряду і струму. Як середовище розглядається модель сильно виродженого електронного газу з компенсуючим фоном. У результатах враховується перша релятивістична поправка. Така модель може описувати, для прикладу, електронний газ у білих карликах. Взагалі кажучи, квантова теорія поля передбачає існування також газу позитронів, але, як буде показано нижче, у слаборелятивістичному наближенні позитронним внеском можна знехтувати. У сильно виродженій Фермі-системі релятивістичні поправки дають помітний внесок при високій густині, що означає слабку неідеальність. Тому виправданим є використання при розрахунках наближення хаотичних фаз.

Декілька слів про позначення. Грецькі індекси позначають компоненти чотиривимірних векторів, латинські – тривимірних. Нульова компонента ферміонного 4-імпульсу при відмінній від нуля температурі відрізняється від такої ж компоненти для бозонів [6], тому відповідні 4-вектори будемо позначати q і $\tilde{k}$:

$$q=\left(\frac{i\omega_n}{c\hbar},\mathbf{q}\right),\omega_n=\frac{(2n+1)\pi}{\beta};\quad \tilde{k}=\left(\frac{i\tilde{\omega}_n}{c\hbar},\mathbf{k}\right),\tilde{\omega}_n=\frac{2\pi n}{\beta},\tag{1}$$

де β – обернена температура. Якщо так вибрати компоненти 4-векторів, то потрібно використовувати метрику простору Мінковського. Якщо ж нульову компоненту вибрати дійсною, як у [6], то метрика має бути евклідовою.

Для того, щоб у межах теорії лінійного відгуку знайти потенціали, які створює в середовищі слабке класичне джерело $j^{\mu}=(\rho,\mathbf{j})$, потрібно мати фотонний пропагатор (чи функцію Ґріна) $\tilde{G}_{\mu\nu,\tilde{k}}$ [6], який можна записати через поляризаційний оператор $\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}$ у вигляді

$$\tilde{G}_{\mu\nu,\tilde{k}}=\left(\tilde{G}^{(0)}_{\mu\nu,\tilde{k}}{}^{-1}+\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}\right)^{-1},\tag{2}$$

де $\tilde{G}^{(0)}_{\mu\nu,\tilde{k}}{}^{-1}$ – функція Ґріна невзаємодіючих фотонів. Надалі будемо розглядати статичний розподіл зарядів і струмів, тому нульову компоненту 4-імпульсу $\tilde{k}$ у результатах покладемо рівною нулю. У наближенні хаотичних фаз поляризаційний оператор досить розрахувати в першому порядку за константою взаємодії. Оскільки розглядаємо квантову електродинаміку при скінченній температурі, то відповідний вираз має вигляд

$$\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}=\frac{4\pi e^2}{\beta V}\sum_q \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu G_q^{(0)}\gamma_\nu G_{q-\tilde{k}}^{(0)}\right),\tag{3}$$

де γ_μ – матриці Дірака, $G_q^{(0)}$ – пропагатор вільних електронів,

$$G_q^{(0)}=\frac{c\hbar Q_\nu\gamma^\nu+mc^2}{m^2c^4-c^2\hbar^2Q^2},\quad Q_\nu=\left(\frac{i\omega_n+\mu}{c\hbar},\mathbf{q}\right),\tag{4}$$

μ – хімічний потенціал. У термодинамічній границі маємо

$$\frac{1}{\beta V}\sum_q \to\frac{1}{\beta(2\pi)^3}\sum_n\int d\mathbf{q}.$$

Як і у звичайній квантовій електродинаміці, вираз (3) містить ультрафіолетову розбіжність, яку усувають за допомогою перенормування. Можна показати, що у квантовій теорії поля при скінченній температурі температурна частина діаграм Фейнмана не містить ультрафіолетових розбіжностей завдяки обрізуючому фактору розподілу Фермі чи Бозе, тому перенормування при скінченній температурі не відрізняється від відповідної процедури при нульовій температурі [6]. Так, для поляризаційного оператора маємо

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}&=\mathrm{reg}\left(\Pi_{\mu\nu,\tilde{k};T=0,\mu=0}\right)+\Delta\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}},\\ \Delta\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}&=\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}-\Pi_{\mu\nu,\tilde{k};T=0,\mu=0},\end{aligned}\tag{5}$$

тобто від поляризаційного оператора віднімається і додається відповідний вираз при нульовій температурі і густині [7]. Різниця $\Delta\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}$ не містить ультрафіолетових розбіжностей, а поляризаційний оператор при нульовій температурі і густині перенормовується стандартним методом, після чого отримуємо (потрібно пам'ятати, що у нашому випадку $\tilde{k}\le 0$) [8]:

$$\mathrm{reg}\left(\Pi_{\mu\nu,\tilde{k};T=0,\mu=0}\right)\equiv\Pi_{\mu\nu,\tilde{k},reg}=F_{\tilde{k}}\left(g_{\mu\nu}-\frac{\tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu}{\tilde{k}^2}\right),\tag{6}$$

де

$$F_{\tilde{k}} = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{5}{9}\tilde{k}^2 + \frac{4}{3}k_c^2 - \frac{1}{3}\left(\tilde{k}^2 + 2k_c^2\right)\sqrt{1-4\left(k_c/\tilde{k}\right)^2}\ \ln\left(\frac{\sqrt{1-4\left(k_c/\tilde{k}\right)^2}+1}{\sqrt{1-4\left(k_c/\tilde{k}\right)^2}-1}\right)\right). \qquad (7)$$

В останній формулі $\alpha = e^2/\hbar c$ – постійна тонкої структури, а $1/k_c$ – комптонівська довжина хвилі електрона. Отже, для фотонного пропагатора отримуємо

$$\tilde{G}_{\mu\nu,\tilde{k}} = \left(\tilde{G}^{(0)}_{\mu\nu,\tilde{k}}{}^{-1} + \Pi_{\mu\nu,\tilde{k},reg} + \Delta\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}\right)^{-1}. \qquad (8)$$

Основне завдання – розрахувати температурну частину поляризаційного оператора. Зручно перед цим записати тензор $\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}}$ у вигляді розкладу на поперечну і поздовжню компоненти [6]:

$$\Pi_{\mu\nu,\tilde{k}} = T_{\tilde{k}}\,\mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} + L_{\tilde{k}}\,\mathrm{P}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}\ , \qquad (9)$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{00} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{0i} = 0\,;\ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{ij} = g_{ij} + \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \quad \mathrm{P}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu}{\tilde{k}^2} - \mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}\ , \qquad (10)$$

$$T_{\tilde{k}} = \frac{\Pi^{\mu\nu}_{\tilde{k}}\,\mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\nu\mu}}{2}\,;\ L_{\tilde{k}} = \Pi^{\mu\nu}_{\tilde{k}}\,\mathrm{P}^{\mathrm{L}}_{\nu\mu}\,. \qquad (11)$$

З формул (5, 6) легко бачити, що

$$T_{\tilde{k}} = F_{\tilde{k}} + \Delta T_{\tilde{k}}\ , \quad L_{\tilde{k}} = F_{\tilde{k}} + \Delta L_{\tilde{k}}\,. \qquad (12)$$

Якщо систему координат, у якій відбувається інтегрування за $\mathbf{q}$ у формулі (3), вибрати так, щоб вектор $\mathbf{k}$ був напрямлений по осі z, то для температурних частин коефіцієнтів при поперечному і поздовжньому тензорах будемо мати

$$\Delta T_{\tilde{k}} = -\frac{1}{2}\left(\Delta\Pi_{xx,\tilde{k}} + \Delta\Pi_{yy,\tilde{k}}\right);\ \Delta L_{\tilde{k}} = \Delta\Pi_{00,\tilde{k}} - \Delta\Pi_{zz,\tilde{k}}\,. \qquad (13)$$

Схема розрахунку цих величин така. Взявши суму за n у формулі (3), отримаємо вираз, який буде містити доданки з розподілом Фермі для електронів і позитронів і розбіжні доданки, які віднімаються згідно з формулою (5). Далі, доданками, які містять розподіл Фермі для позитронів, можна знехтувати. Справді, для сильно виродженої слаборелятивістичної системи маємо два малих параметри

$$\frac{1}{\beta\mu^*} \ll 1\ ;\ \frac{\mu^*}{mc^2} \ll 1\ , \qquad (14)$$

де $\mu^* = \mu - mc^2$ – класичний хімічний потенціал, який відрізняється від релятивістичного на енергію спокою. Звідси можна записати ще одну нерівність:

$$\beta mc^2 \gg 1\ . \qquad (15)$$

Тоді розподіл Фермі для позитронів [6]

$$n[\beta(\varepsilon+\mu)] = \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}} \sim e^{-2\beta mc^2} \qquad (16)$$

оскільки у слаборелятивістичному випадку $\varepsilon + \mu \sim 2\beta mc^2$. Якщо ще проінтегрувати за кутами в інтегралі за $\mathbf{q}$, знерозмірити його, позначивши

$$\bar{k} \equiv \frac{k}{k_c}, \quad \bar{\mu} \equiv \frac{\mu^*}{mc^2}, \quad q \to k_c q\ , \qquad (17)$$

і зробити заміну змінних

$$q = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}\ , \qquad (18)$$

то для статичних коефіцієнтів знайдемо

$$\Delta L_{\mathbf{k}} = \frac{4\alpha k_c^2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\varepsilon\left(\frac{(\varepsilon+1)^2-\dfrac{\bar{k}^2}{4}}{\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}-\dfrac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}+\dfrac{\bar{k}}{2}}\right|-\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)n\left[\beta mc^2(\varepsilon-\bar{\mu})\right], \quad (19)$$

$$\Delta T_{\mathbf{k}} = -\frac{2\alpha k_c^2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2+2\varepsilon+\dfrac{\bar{k}^2}{4}}{\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}-\dfrac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}+\dfrac{\bar{k}}{2}}\right|+\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)n\left[\beta mc^2(\varepsilon-\bar{\mu})\right]. \quad (20)$$

Для розрахунку асимптотики подібних інтегралів при $\beta\mu^*>>1$ існує метод Зоммерфельда, згідно з яким

$$\int\limits_0^\infty f(\varepsilon)n\left[\beta mc^2(\varepsilon-\bar{\mu})\right]d\varepsilon \simeq \int\limits_0^{\bar{\mu}} f(\varepsilon)d\varepsilon+\frac{\pi^2\bar{\mu}^2}{6\left(\beta\mu^*\right)^2}f'(\bar{\mu}). \quad (21)$$

Але безпосередньо застосувати цей метод до виразів (19, 20) не можна, оскільки в даному випадку функція $f(\varepsilon)$ неаналітична. Для того, щоб розрахувати температурну асимптотику, аналітично продовжимо цю функцію на верхню комплексну півплощину і будемо інтегрувати по прямокутному контуру з вершинами $0, R, R+i2\pi/\beta mc^2, i2\pi/\beta mc^2$, де $R\to\infty$, обходячи точки розгалуження на дійсній осі. В результатах фігуруватиме невідомий хімічний потенціал μ^*. Оскільки ми працюємо у першому наближенні за константою взаємодії, то його можна замінити хімічним потенціалом невзаємодіючої системи, який знаходиться з формули для концентрації

$$n=\frac{1}{\beta V}\sum_q \mathrm{Tr}(\gamma^0 G_q^{(0)})=\frac{k_c^3}{\pi^2}\int\limits_0^\infty d\varepsilon(\varepsilon+1)\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\,n\left[\beta mc^2(\varepsilon-\bar{\mu})\right]. \quad (22)$$

У слабореляцивістичному і сильно виродженому випадку отримаємо

$$\bar{\mu}\simeq\bar{\mu}_0\left[1-\frac{\bar{\mu}_0}{2}-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(1+3\bar{\mu}_0)\right], \quad (23)$$

де позначено $\bar{\mu}_0\equiv\mu_0^*/mc^2$, $\lambda\equiv\beta\mu_0^*$ і $\mu_0^*=\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}\hbar^2/2m$ – енергія Фермі.

Остаточні вирази для $\Delta L_{\mathbf{k}}, \Delta T_{\mathbf{k}}$ з врахуванням прийнятих наближень мають вигляд

$$\Delta L_{\mathbf{k}}=\frac{4\alpha k_c^2}{\pi}$$

$$\times\left\{\left[\bar{\mu}_0\left(1+\frac{\bar{\mu}_0}{2}-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(1+49\bar{\mu}_0)-\frac{\bar{k}^2}{4}\left[1-\frac{\bar{\mu}_0}{2}-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(1+3\bar{\mu}_0)\right]\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\bar{k}^2}{2}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}-1\right)-\frac{\bar{k}^2}{12}\right]\right.$$

$$\times\frac{1}{\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\dfrac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\dfrac{11}{4}-\bar{\mu}_0\right)+i\dfrac{\pi}{\lambda}(1+\bar{\mu}_0)\right]-\dfrac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\dfrac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\dfrac{11}{4}-\bar{\mu}_0\right)+i\dfrac{\pi}{\lambda}(1+\bar{\mu}_0)\right]+\dfrac{\bar{k}}{2}}\right|+\frac{4\pi^2\bar{\mu}_0^2}{\lambda^2\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\dfrac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\dfrac{\pi}{2\lambda}\right]-\dfrac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\dfrac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\dfrac{\pi}{2\lambda}\right]+\dfrac{\bar{k}}{2}}\right|$$

$$+\frac{2\pi\bar{\mu}_0}{\lambda\bar{k}}\left(1-\frac{\bar{k}^2}{4}+2\bar{\mu}_0\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\,(1+\bar{\mu}_0)\bar{k}\left[\frac{\bar{k}^2}{8}-\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2\bar{\mu}_0}{12\lambda^2}(13+16\bar{\mu}_0)\right]}{\frac{\bar{k}^4}{16}-\bar{k}^2\bar{\mu}_0\left[1+\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(2-13\bar{\mu}_0)\right]+4\bar{\mu}_0^2\left[1+\frac{\pi^2}{6\lambda^2}(14+11\bar{\mu}_0)\right]}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\bar{k}^2}{2}-1\right)\left\{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\frac{\bar{\mu}_0}{3}+\frac{\pi^2}{8\lambda^2}\left(\frac{11}{3}+3\bar{\mu}_0\right)\right]-\frac{\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}}{\bar{k}}\right. \tag{24}$$

$$\times\ln\left|\frac{1-\bar{\mu}_0\left(1-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\frac{2\pi}{\lambda}\right)+\frac{\bar{k}}{2}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2}{24\lambda^2}(11+35\bar{\mu}_0)+i\frac{\pi}{\lambda}(1-2\bar{\mu}_0)\right]+\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}}{1-\bar{\mu}_0\left(1-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\frac{2\pi}{\lambda}\right)-\frac{\bar{k}}{2}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2}{24\lambda^2}(11+35\bar{\mu}_0)+i\frac{\pi}{\lambda}(1-2\bar{\mu}_0)\right]+\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}}\right|\left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\}$$

$$+\frac{\pi^2}{12\lambda^2}\sqrt{2}\bar{\mu}_0^{3/2}(1+\bar{\mu}_0)\frac{\frac{\bar{k}^4}{16}-\bar{k}^2\left[\frac{1}{4}+\bar{\mu}_0\left(1-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}\right)\right]+2\bar{\mu}_0\left[1+2\bar{\mu}_0-\frac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\frac{1}{2}-32\bar{\mu}_0\right)\right]}{\frac{\bar{k}^4}{16}-\bar{k}^2\bar{\mu}_0\left[1-\frac{\pi^2}{3\lambda^2}\left(\frac{1}{4}+7\bar{\mu}_0\right)\right]+4\bar{\mu}_0^2\left[1+\frac{\pi^2}{3\lambda^2}\left(\frac{23}{2}+10\bar{\mu}_0\right)\right]}$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}}{3}\left[1+\frac{7}{3}\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2}{24\lambda^2}(11-17\bar{\mu}_0)\right]\right]\right\},$$

$$\Delta T_{\mathbf{k}}=\frac{2\alpha k_c^2}{\pi}$$

$$\times\left\{\left[\bar{\mu}_0^2\left(-1+\frac{23\pi^2}{6\lambda^2}\right)-\frac{\bar{k}^2}{4}\bar{\mu}_0\left(1-\frac{\bar{\mu}_0}{2}-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(1+3\bar{\mu}_0)\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{\bar{k}^2}{2}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}-1\right)+\frac{\bar{k}^2}{12}\right]\right.$$

$$\times\frac{1}{\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\frac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\frac{11}{4}-\bar{\mu}_0\right)+i\frac{\pi}{\lambda}(1+\bar{\mu}_0)\right]-\frac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\frac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\frac{11}{4}-\bar{\mu}_0\right)+i\frac{\pi}{\lambda}(1+\bar{\mu}_0)\right]+\frac{\bar{k}}{2}}\right|-\frac{4\pi^2\bar{\mu}_0^2}{\lambda^2\bar{k}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\frac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\frac{\pi}{2\lambda}\right]-\frac{\bar{k}}{2}}{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\frac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\frac{\pi}{2\lambda}\right]+\frac{\bar{k}}{2}}\right|$$

$$-\frac{2\pi\bar{\mu}_0}{\lambda\bar{k}}\left(\frac{\bar{k}^2}{4}+2\bar{\mu}_0\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\,(1+\bar{\mu}_0)\bar{k}\left[\frac{\bar{k}^2}{8}-\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2\bar{\mu}_0}{12\lambda^2}(13+16\bar{\mu}_0)\right]}{\frac{\bar{k}^4}{16}-\bar{k}^2\bar{\mu}_0\left[1+\frac{\pi^2}{12\lambda^2}(2-13\bar{\mu}_0)\right]+4\bar{\mu}_0^2\left[1+\frac{\pi^2}{6\lambda^2}(14+11\bar{\mu}_0)\right]}\right)$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\bar{k}^2}{2}-1\right)\left\{\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\frac{\bar{\mu}_0}{3}+\frac{\pi^2}{8\lambda^2}\left(\frac{11}{3}+3\bar{\mu}_0\right)\right]-\frac{\sqrt{1+\frac{\bar{k}^2}{4}}}{\bar{k}}\right. \tag{25}$$

$$\times \ln \left| \frac{1-\bar{\mu}_0\left(1-\dfrac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)+\dfrac{\bar{k}}{2}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\bar{\mu}_0+\dfrac{\pi^2}{24\lambda^2}\left(11+35\bar{\mu}_0\right)+i\dfrac{\pi}{\lambda}\left(1-2\bar{\mu}_0\right)\right]+\sqrt{1+\dfrac{\bar{k}^2}{4}}}{1-\bar{\mu}_0\left(1-\dfrac{\pi^2}{12\lambda^2}+i\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)-\dfrac{\bar{k}}{2}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1-\bar{\mu}_0+\dfrac{\pi^2}{24\lambda^2}\left(11+35\bar{\mu}_0\right)+i\dfrac{\pi}{\lambda}\left(1-2\bar{\mu}_0\right)\right]+\sqrt{1+\dfrac{\bar{k}^2}{4}}} \right| \Bigg\}$$

$$\left. -\frac{\pi^2}{12\lambda^2}\sqrt{2}\bar{\mu}_0^{3/2}\,\frac{4\bar{\mu}_0^2\left(1+\dfrac{23\pi^2}{6\lambda^2}\right)-\dfrac{\bar{k}^4}{16}}{\dfrac{\bar{k}^4}{16}-\bar{k}^2\bar{\mu}_0\left(1-\dfrac{\pi^2}{12\lambda^2}\right)+4\bar{\mu}_0^2\left(1+\dfrac{23\pi^2}{6\lambda^2}\right)}+\frac{\sqrt{2\bar{\mu}_0}}{3}\left[1-\frac{5}{3}\bar{\mu}_0+\frac{\pi^2}{24\lambda^2}\left(11-17\bar{\mu}_0\right)\right]\right\}.$$

Маючи коефіцієнти $L_{\mathbf{k}}, T_{\mathbf{k}}$, можна відразу записати Фур'є-компоненти статичних потенціалів, створених пробними джерелами в електронному газі [6]:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}}}{k^2 - L_{\mathbf{k}}}, \tag{26}$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{c}\frac{\mathbf{j}_{\mathbf{k}}}{k^2 - T_{\mathbf{k}}}. \tag{27}$$

Розглянемо спочатку наближення Дебая, яке отримується, якщо замість повних виразів $L_{\mathbf{k}}$ і $T_{\mathbf{k}}$ підставити їхні значення при $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ (при цьому $F_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}=0$):

$$L_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = -\frac{4\alpha k_c^2}{\pi}\sqrt{2\bar{\mu}_0}\left[1+\bar{\mu}_0-\frac{\pi^2}{12\lambda^2}\left(1+2\bar{\mu}_0\right)\right], \quad T_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}=0. \tag{28}$$

Як бачимо, скалярний потенціал екранується з радіусом екранування $r_D = 1/\sqrt{-L_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}}$. Релятивістичні поправки зменшують радіус екранування, а температурні збільшують. Подібний радіус екранування було знайдено в роботі [5], хоча коефіцієнти при поправках відрізняються. Статична магнітна взаємодія не екранується, і це не залежить від застосованих наближень, оскільки в загальному випадку вираз (27) має полюс у точці $\mathbf{k}=\mathbf{0}$. У цьому легко переконатися, спрямувавши $\mathbf{k}$ до нуля у загальній формулі (20). Це означає, що статичний векторний потенціал на великих (порівняно з комптонівською довжиною хвилі електрона) відстанях поводить себе як $1/r$. Такий же результат отримано в ультрарелятивістичній границі, для прикладу, в [6].

Зробимо також якісні зауваження щодо повного виразу для $L_{\mathbf{k}}$. Якщо підставити його у формулу для скалярного потенціала і зробити обернене перетворення Фур'є, то отримаємо осцилюючу функцію r, яка прямує до нуля на нескінченності. Як відомо з теорії Фур'є-перетворення, асимптотика функції на великих віддалях визначається особливими точками її Фур'є-перетворення. У даному випадку маємо кілька комплексних полюсів [3] і точки розгалуження логарифмів. При температурі, відмінній від нуля, всі особливі точки мають уявну частину, що забезпечує експоненційне спадання потенціала з відстанню, тобто екранування. При нульовій температурі перший логарифм у формулі (24) має точки розгалуження на дійсній осі $\bar{k} = \pm 2\sqrt{2\bar{\mu}_0}$, які дають головний внесок в асимптотику на великій відстані. Залежність потенціала від відстані у цьому випадку має вигляд осцилюючого загасання за степеневим законом, відомого у класичній теорії як осциляції Фріделя. Цей ефект має загальний характер і пояснюється тим, що при нульовій температурі розподіл Фермі є розривною функцією.

Література

1. W.Appel, A.Alastuey, Phys. Rev. E 59, 4542 (1999).
2. J.Kapusta, T.Toimela, Phys. Rev. D 37, 3731 (1988).
3. H.D.Sivak, A.Pérez, J.Diaz-Alonso, hep-ph/0106032.
4. E.S.Fradkin, Proc. Lebedev Inst. 29, 6 (1965).
5. B.K.Shivamoggi, P.Musler, Phys. Rev. A 54, 4830 (1996).
6. M.Le Bellac, Thermal Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
7. B.A.Freedman, L.D.McLerran, Phys. Rev. D 16, 1130 (1977).
8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Квантовые поля (Наука, Москва, 1980).

ELECTROMAGNETIC INTERACTION SCREENING IN A WEAKLY RELATIVISTIC DEGENERATE ELECTRON GAS

B.V.Budnyj

Lviv National University, Drahomanov st. 12, Lviv, 79005
email: bohdan@ktf.franko.lviv.ua

Degenerate electron gas based on the model with gomogeneous positive background is considered. Electromagnetic interaction in such a system is treated with thermal QED formalism. Relativistic corrections are taken into account in weakly relativistic approximation. Fourier transforms of scalar and vector potentials created by a weak static source in the electron gas are obtained in RPA approximation. Vector potential is shown not to be screened. Scalar potential is screened at nonzero temperature. At zero temperature it decays with the distance by power law.