УДК 519.21, 519.718

Ю. М. Перестюк (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО РОЗРИВНІ КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІМПУЛЬСНІЙ СИСТЕМІ

We study the existence of oscillatory solutions of a system of differential equations with impulse perturbation.

В роботі досліджується існування коливних розв'язків однієї системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

Розглянемо двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x_1} = Ax + \epsilon f_0(x), \qquad x_2 \neq kx_1; \quad \Delta x\Big|_{x_2=kx_1} = Bx, \tag{1}$$

в якій $x = col(x_1, x_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad f_0(x) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

В роботі [1] досліджено достатні умови існування одно- і двоімпульсних циклів у випадку, коли особлива точка відповідної лінійної диференціальної системи є сідлом. Виявляється, що аналогічні дослідження можна провести, коли ця точка є вузлом. Тут ми розглядаємо випадок виродженого вузла, причому вважатимемо цей вузол асимптотично стійким, тобто вважатимемо, що $\lambda < 0$.

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення $(E + B) : x \rightarrow (E + B)x$ площини (x_1Ox_2) в себе переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}.$$

В лінійному випадку, тобто коли $\epsilon = 0$ система (1) досліджена нами в [2].

Зокрема, тут встановлено, що поведінка розв'язків визначається числом

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Якщо це число за модулем менше від одиниці, то всі розв'язки, що виходять із точок прямої $x_2 = \mu x_1$, з часом прямують до нуля, коли $t \to \infty$. Якщо ж $|\gamma| > 1$, то всі такі розв'язки прямують до нескінченності, коли $t \to \infty$.

Значенню $|\gamma| = 1$ відповідають періодичні розв'язки. Коли $\gamma = 1$, то в системі є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів, кожен з яких - кусок кривої

$$x_2 = x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^0}\right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1.$$

Рух фазової точки по такому циклу є періодичним з періодом $T = k - \mu$.

Якщо ж

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = -1,$$

то в системі є однопараметрична сім'я двоімпульсних циклів, відмінних від одноімпульсних.

Двоімпульсний цикл задається двома кусками фазових кривих:

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1,$$

і

$$x_2 = -x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{-x_1}{x_1^0} \right), \quad -1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Рух фазової точки по кожному двоімпульсному циклу є періодичним з періодом $T = 2(k - \mu)$.

При $\epsilon \neq 0$ траєкторія системи (1), що вийшла з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$ не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*)

$$x_1^* = x_1^0 e^{\lambda(k-\mu)}.$$

Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої по модулю менша від $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж в точці, абсциса якої по модулю більша від $|x_1^*|$ (фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який з цих випадків має місце розглянемо приріст величини

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{\lambda} \ln |x_1|$$

за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1). Виведемо наближену формулу для приросту величини $E(x_1, x_2)$.

Обчислимо повну похідну функції $E(x_1, x_2)$ вздовж розв'язків системи (1)

$$\frac{d}{dt} E(x_1, x_2) = \frac{\epsilon}{x_1^2} [x_1 g(x_1, x_2) - (x_2 + \frac{x_1}{\lambda}) f(x_1, x_2)].$$

Траєкторія системи (1), що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, на величину порядка ϵ відрізняється від куска лінії

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^0} (\mu x_1^0 + \frac{x_1^0}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0}),$$

а тому приріст функції $E(x_1, x_2)$ з точністю до величини $O(\epsilon)$ дорівнює значенню інтеграла від $\dot{E}(x_1, x_2)$, обчисленого по куску цієї лінії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$, тобто

$$\Delta E = \epsilon \int\limits_0^{k-\mu} \frac{e^{-2\lambda\tau}}{(x_1^0)^2} [x_1^0 e^{\lambda\tau} g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0 \tau) e^{\lambda\tau}) -$$

$$-(x_2^0 + x_1^0 \tau + \frac{x_1^0}{\lambda}) e^{\lambda\tau} f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0 \tau) e^{\lambda\tau}] d\tau + \epsilon^2 =$$

$$= \epsilon F(x_1^0) + 0(\epsilon^2),$$

де

$$F(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0} \int\limits_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau}[g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) -$$

$$(\mu+\tau+\frac{1}{\lambda}) f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})]d\tau.$$

За властивостями функції $F(x_1^0)$ можна робити висновок про поведінку розв'язків системи (1) (при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$). Якщо ця функція додатна при $x > 0$ і від'ємна при $x < 0$, то в секторі між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$ відбувається коливання з наростаючою амплітудою, а якщо ця функція від'ємна при $x > 0$ і додатна при $x < 0$, то ці коливання загасаючі. Точки x_1^*, в яких $F(x_1^*) = 0$ породжують при малих ϵ ізольовані одноімпульсні цикли в системі (1).

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Нехай в системі* (1) $\lambda < 0$, *функції* $f(x_1, x_2)$ *і* $g(x_1, x_2)$ *є неперервно диференційовними в деякому крузі* $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ *і параметри системи такі, що* $\mu < k$ *і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = 1.$$

Якщо рівняння $F(x_1) = 0$ *має ізольований корінь* x_1^*, *такий, що* $F'(x_1^*) \neq 0$ *то при достатньо малих значеннях параметра* $\epsilon > 0$ *система* (1) *має розривний одноімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо* $F'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* > 0$, *або ж* $F'(x_1^*) > 0$, *а* $x_1^* < 0$, *і нестійким, якщо* $F'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* > 0$ *або ж* $F'(x_1*) < 0$ *і* $x_1^* < 0$. *Цей цикл міститься в деякому* $U(\epsilon)$*-околі* ($U(\epsilon) \to 0$, *коли* $\epsilon \to 0$) *лінії*

$$x_2 = x_1(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^*}), \qquad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

З'ясуємо питання існування двоімпульсних циклів в системі рівнянь (1). В лінійній системі (при $\epsilon = 0$) такі цикли є, коли параметри системи задовольняють рівність $\gamma = -1$.

Як і при дослідженні одноімпульсних циклів розглянемо приріст величини $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1), а після результату імпульсної дії, рухаючись по траєкторії системи (1), знову попаде на пряму $x_2 = kx_1$. Використовуючи вираз повної похідної від $E(x_1, x_2)$, складеної в силу системи (1), обчислюємо приріст $E(x_1, x_2)$:

$$\Delta E = \epsilon F_1(x_1^0) + O(\epsilon^2),$$

де

$$F_1(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0} \int\limits_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau}((g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) - g(-x_0 e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})$$

$$-(\mu+\tau+\frac{1}{\lambda})(f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau}) - f(-x_1^0 e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu+\tau)e^{\lambda\tau})))d\tau.$$

А тому справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай в системі* (1) $\lambda < 0$, *функції* $f(x_1, x_2)$ *і* $g(x_1, x_2)$ *неперервно диференційовні в деякому крузі* $x_1^2 + x_2^2 \le r^2$ *і параметри системи такі, що* $\mu < k$ *і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = -1.$$

Якщо рівняння $F_1(x_1) = 0$ *має ізольований корінь* x_1^*, *такий, що* $F_1'(x_1^*) \neq 0$ *то при достатньо малих значеннях параметра* $\epsilon > 0$ *система* (1) *має розривний двоімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо* $F_1'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* > 0$, *або ж* $F'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* < 0$ *і нестійким, якщо* $F_1'(x_1^*) > 0$ *і* $x_1^* > 0$ *або ж* $F'(x_1^*) < 0$ *і* $x_1^* < 0$. *Цей цикл належить деякому* $U(\epsilon)$*-околу* ($U(\epsilon) \to 0$, *коли* $\epsilon \to 0$ *ліній:*

$$x_2 = x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^*}\right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \le \frac{x_1}{x_1^*} \le 1.$$

і

$$x_2 = -x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{-x_1}{x_1^*}\right), \quad -1 \le \frac{x_1}{x_1^*} \le -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Як приклад розглянемо можливість коливних рухів в системі маятникового типу з великим тертям:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x})$$

Зрозуміло, що при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ ніяких коливних рухів в такій системі не буде, бо при $\epsilon = 0$ (лінійний випадок) маятник не здійснює коливань, а зразу прямує до нульового положення рівноваги: його швидкість $\dot{x}(t)$ з часом змінює знак не більше одного разу. Разом з тим за рахунок імпульсного збурення в системі можливі коливання.

Нехай маятник піддається імпульсному збуренню в момент проходження ним положення $\dot{x} = 0$ в фазовій площині $(xO\dot{x})$. Відносно імпульсного збурення вважатимемо, що воно приводить до збільшення (зменшення) швидкості руху на величину, пропорційну положенню x, з коефіцієнтом пропорційності α.

Таким чином, маємо систему з імпульсним збуренням:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} \neq 0; \quad \Delta\dot{x}\Big|_{\dot{x}=0} = \alpha x. \tag{2}$$

При $\epsilon = 0$ ця система досліджена нами в [2], де показано, що при $\alpha = \alpha^*$, тут α^* - від'ємний корінь рівняння

$$(1 + \alpha)e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} = -1, \tag{3}$$

в системі є однопараметрична сім'я двоімпульсних циклів, тобто маятник з імпульсним збуренням здійснює періодичні коливання з періодом

$$T = \frac{2\alpha^*}{1 + \alpha^*}.$$

З'ясуємо можливість коливання в системі (2) при $\epsilon > 0$, за умови, що $\alpha = \alpha^*$. Заміна змінних

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

зводить систему (1) до вигляду

$$\dot{u} = -u - \epsilon f(-u-v, v), \quad v \neq 0, \quad \dot{v} = u - v + \epsilon f(-u-v, v),$$

$$\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Bigg|_{v=0} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \alpha^* \\ -\alpha^* & -\alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо переконуємося, що

$$\mu = \frac{b_{21} + k(1+b_{22})}{1 + b_{11} + kb_{12}} = \frac{b_{21}}{1+b_{11}} = \frac{-\alpha^*}{1+\alpha^*},$$

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = (1+\alpha^*)e^{-\frac{\alpha^*}{1+\alpha^*}},$$

а

$$F_1(u_0) = \frac{1}{u_0}\int\limits_0^{-\mu} e^{\tau}([f((1-\mu-\tau)u_0e^{-\tau}, \ \ (\mu+\tau)u_0e^{-\tau})-$$

$$-f(-(1-\mu-\tau)u_oe^{-\tau}, \ \ -(\mu+\tau)u_0e^{-\tau})]+$$

$$+(\mu+\tau-1)[f(-(1+\mu+\tau)u_0e^{-\tau}, \ \ (\mu+\tau)u_0e^{-\tau})-$$

$$-f((1+\mu+\tau)u_0e^{-\tau}, \ \ -(\mu+\tau)u_0e^{-\tau})].)d\tau$$

Цей вираз спрощується, коли функція $f(x,\dot{x})$ задовольняє додаткову умову:

$$f(-x,-\dot{x}) = -f(x,\dot{x})$$

У цьому випадку

$$F_1(u_0) = \frac{2}{u_0}\int\limits_0^{-\mu} e^{\tau}[f((1-\mu-\tau)u_0e^{-\tau}, (\mu+\tau)u_0e^{-\tau})-$$

$$-(1-\mu-\tau)f(-(1+\mu+\tau)u_0e^{-\tau}, (\mu+\tau)u_0e^{-\tau})]d\tau,$$

і ізольовані нулі функції $F_1(u_0)$ при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ породжують двоімпульсні цикли в системі (2).

Розглянемо конкретну систему з імпульсним збуренням

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \epsilon(1-x^2)\dot{x}, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\Delta\dot{x}\Bigg|_{\dot{x}=0} = \alpha^* x,$$

в якій α^* - від'ємний корінь рівняння (3).

Обчислюємо функцію $F_1(u_0)$, враховуючи, що

$$f(x,\dot{x}) = (1-x^2)\dot{x}, \quad f(-u-v,v) = (1-(u+v)^2)v.$$

Маємо

$$F_1(u_0) = \frac{2}{u_0}\int\limits_0^{-\mu} e^{\tau}(\mu+\tau)[1-(1+\mu+\tau)^2u_0^2e^{-2\tau}](\mu+\tau)u_0e^{-\tau}2\tau =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{-\mu}(\mu+\tau)^2[1-(1+\mu+\tau)^2u_0^2e^{-2\tau}]d\tau =$$

$$= 2\int\limits_{\mu}^{0}[s^2-s^2(1+s)^2e^{-2s}e^{2\mu}u_0^2]d\tau = -\frac{2}{3}\mu^3 - bu_0^2,$$

де через b позначено додатну величину

$$b = 2e^{\mu}\int\limits_{\mu}^{0}s^2(1+s)^2e^{-2s}ds.$$

Таким чином, рівняння $F_1(u_0) = 0$ має два ізольовані корені

$$u_1^* = \sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\mu^3}{b}} \quad \text{i} \quad u_2^* = -\sqrt{-\frac{2}{3}\frac{\mu^3}{b}},$$

причому

$$F_1'(u_1^*) < 0, \quad \text{a} \quad F'(u_2^*) > 0.$$

Кожен з цих коренів породжує при достатньо малих значеннях $\epsilon > 0$ один і той самий двоімпульсний асимптотично стійкий цикл.

1. *Перестюк Ю.М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі// Нелінійні коливання. – 2012. – Том. 15, №4. – С. 494-503.
2. *Kateryna Mamsa, Yuriy Perestyuk,* A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane, Mathematical analysis, differential equations and their applications, Sofia, 2011, 121-128 p.
3. *A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk,* Impulsive Differential Equations, Singapore, World Scientific, 1995, 462 p.
4. *Nikolai A. Perestyuk, Viktor A. Plotnikov, Anatolii M. Samoilenko, Natalia V. Skripnik,* Differential Equations With Impulse effects, Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities, De Gruyter, 2011, 307 p.

Одержано 11.10.2012