УДК 512.643.4

І. В. Шапочка, Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО МАТРИЧНЕ РІВНЯННЯ СІЛЬВЕСТРА НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

An algorithm of finding solutions of the Sylvester matrix equation over a principal ideals domain has been given in the paper.

Приведено алгоритм знаходження розв'язків матричного рівняння Сільвестра над областю головних ідеалів.

Нехай $\mathcal{D}$ — деяка область головних ідеалів, а $\mathcal{D}_{m\times n}$ — множина всіх $m \times n$-матриць над областю $\mathcal{D}$ для деяких натуральних чисел m і n. Нагадаємо, що рівнянням Сільвестра називається матричне рівняння вигляду

$$AX + XB = C, \tag{1}$$

де A, B, C — задані матриці, причому $A \in \mathcal{D}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{D}_{n\times n}$, $C \in \mathcal{D}_{m\times n}$, а X — невідома $m \times n$-матриця. У випадку коли $\mathcal{D}$ є полем дійсних або комплексних чисел такого роду рівняння виникають у багатьох прикладних задачах різноманітних теорій, наприклад в теорії стійкості, теорії керування, квантовій теорії і т. д. В [1–9] наведено різні способи розв'язування рівняння (1) над полями дійсних та комплексних чисел. В нашій статті запропоновано спосіб знаходження розв'язків матричного рівняння (1) над областю головних ідеалів, який можна реалізувати у вигляді алгоритму для комп'ютерної алгебраїчної системи GAP для тих областей головних ідеалів, що є в наявності у бібліотеці або можуть бути побудовані її засобами (див. [10]). Потреба у розв'язанні матричного рівняння (1) над кільцем цілих p-адичних чисел, наприклад, виникає при класифікації неізоморфних p-груп Чернікова (див. [11]).

Відомо (див. [1, 2]), що будь-який розв'язок X' матричного рівняння (1), якщо такий існує, представляється у вигляді суми $X' = X_0+X_1$, деякого розв'язку X_0 однорідного матричного рівняння

$$AX + XB = O, \tag{2}$$

та деякого фіксованого наперед заданого розв'язку X_1 матричного рівняння (1) (O — нульова $m \times n$-матриця). Різниця ж довільних розв'язків матричного рівняння (1) є розв'язком однорідного матричного рівняння (2). Оскільки $\mathcal{D}_{m\times n}$ є вільним $\mathcal{D}$-модулем відносно звичайних операцій додавання матриць та множення на скаляр, то нескладно переконатися, що множина всіх розв'язків однорідного матричного рівняння є вільним $\mathcal{D}$-підмодулем модуля $\mathcal{D}_{m\times n}$. У свою чергу множина розв'язків матричного рівняння (1) є суміжним класом за цим підмодулем. За аналогією із звичайними системами лінійних однорідних рівнянь домовимося називати множину розв'язків однорідного матричного рівняння (2) модулем розв'язків, а його базис фундаментальною системою розв'язків однорідного матричного рівняння.

Із [2] слідує, що для знаходження множини розв'язків матричного рівняння (1) досить знайти множину розв'язків системи звичайних алгебраїчних лінійних рівнянь з матрицею

$$A \otimes I_n + I_m \otimes B^T, \tag{3}$$

де $\otimes$ — кронекерівський добуток матриць, I_k — одинична матриця порядку k, B^T — матриця транспонована до матриці B, та стовпцем вільних членів, що одержується у результаті транспонування, так званої, по-рядкової розгортки матриці C.

Означення 1. *По-рядковою розгорткою матриці*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

будемо називати mn*-вимірний вектор* (*або, що теж саме,* $1 \times mn$*-матрицю*)

$$\mathcal{RS}(C) = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn}).$$

Відображення $\mathcal{RS} : \mathcal{D}_{m\times n} \to \mathcal{D}_{1\times mn}$ *таке, що довільній матриці* $X \in \mathcal{D}_{m\times n}$ *ставить у відповідність вектор* $\mathcal{RS}(C)$ *будемо називати по-рядковою розгорткою.*

Очевидно, по-рядкова розгортка $\mathcal{RS}$ є ізоморфізмом $\mathcal{D}$-модулів $\mathcal{D}_{m\times n}$ і $\mathcal{D}_{1\times mn}$, а тому можна говорити про обернене відображення $\mathcal{RS}^{-1}$.

Таким чином, якщо X' є розв'язком матричного рівняння (1), то $\mathcal{RS}(X')$ є розв'язком системи лінійних рівнянь з матрицею (3) і стовпцем вільних членів $(\mathcal{RS}(C))^T$. Навпаки, якщо x' є розв'язком такої системи лінійних рівнянь, то $\mathcal{RS}^{-1}(x')$ є розв'язком матричного рівняння (1).

Розглянемо тепер систему з k звичайних алгебраїчних лінійних рівнянь з l невідомими x_1, x_2, ..., x_l з коефіцієнтами та вільними членами із області $\mathcal{D}$. Нехай

$$Gx = c \tag{4}$$

— її матричний запис, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)^T$. Добре відомо (див. [1,2]), що $k \times l$-матриця G еквівалентна матриці нормальної форми Сміта або, інакше кажуть, канонічній діагональній матриці. Тобто існують оборотні матриці U порядку k та V порядку l, що

$$UGV = \operatorname{diag}(z_1, z_2, \dots, z_r) = Z,$$

де $r = \min\{k, l\}$ і кожний ненульовий елемент z_i на діагоналі, починаючи з другого, ділиться на попередній та визначається однозначно з точністю до оборотного елемента області $\mathcal{D}$. Нагадаємо, що для елементів u і v із $\mathcal{D}$, де $v \neq 0$, кажуть, що u ділиться на v, якщо існує елемент $w \in \mathcal{D}$, що $u = vw$. Оскільки $\mathcal{D}$ область головних ідеалів, то елемент w визначається елементами u і v однозначно. Введемо для нього позначення $w = \frac{u}{v}$.

Далі, якщо x' є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), то $V^{-1}x'$ є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$Zx = c', \tag{5}$$

де $c' = Uc$. Навпаки, якщо x'' є розв'язком системи лінійних рівнянь (5), то Vx'' є розв'язком системи лінійних рівнянь (4).

Нарешті, кожне рівняння системи лінійних рівнянь (5) має вигляд $\omega\chi = \gamma$, де ω, $\gamma \in \mathcal{D}$, χ — невідома. Таке рівняння або немає розв'язку, у випадку, коли γ не ділиться на ω, або має єдиний розв'язок $\frac{\gamma}{\omega}$, якщо γ ділиться на ω, або ж будь-який елемент області $\mathcal{D}$ є його розв'язком, якщо $\omega = \gamma = 0$.

Для $k \times l$-матриці V через V_{*j} будемо позначати j-й стовпець матриці V, де $j \in \{1, 2, \dots n\}$.

Із вище сказаного, як наслідок, одержуємо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{D}$ є областю головних ідеалів, m і n — натуральні числа, A і B — деякі задані $\mathcal{D}$-матриці відповідно порядків m і n і $G = A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$. Якщо ранг r матриці G менше за mn і U, V — оборотні $\mathcal{D}$-матриці порядку mn такі, що добуток UGV є матрицею нормальної форми Сміта, то $\mathcal{RS}^{-1}(V^T_{*r+1})$, $\mathcal{RS}^{-1}(V^T_{*r+2})$, $\dots$, $\mathcal{RS}^{-1}(V^T_{*mn})$ є фундаментальною системою розв'язків однорідного матричного рівняння $AX + XB = O$.*

Приклад 1. Розв'язати матричне рівняння Сільвестра $AX + XB = C$ над кільцем цілих раціональних чисел, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 16 \\ -8 & -29 & 26 \\ -26 & -47 & 4 \\ -3 & -21 & 22 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Нехай виконуються умови задачі.

```
gap> A:=[[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,8,7,6],[5,4,3,2]];;
gap> B:=[[1,0,2],[0,3,0],[2,0,4]];;
gap> C:=[[1, -18, 16], [-8, -29, 26], [-26, -47, 4], [-3, -21, 22]];;
```

Обчислюємо матрицю $G = A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$.

```
gap> G:=KroneckerProduct(A,One(B))+KroneckerProduct(One(A),TransposedMat(B));;
```

Шукаємо по-рядкову розгортку $\mathcal{RS}(C)$ матриці C.

```
gap> mxn:=DimensionsMat(C);;m:=mxn[1];;n:=mxn[2];;
gap> c:=[];; for i in [1..m] do Append(c,C[i]); od;; c:=TransposedMat([c]);;
```

Знаходимо нормальну форму Сміта Z (в GAP ZZ) цілочислової матриці G разом з матрицями U і V перетворень відповідно над рядками та стовпцями матриці G.

```
gap> UGV:=ElementaryDivisorsTransformationsMat(Integers,G);;
gap> ZZ:=UGV.normal;;U:=UGV.rowtrans;;V:=UGV.coltrans;;
```

Перевіряємо чи є сумісною над кільцем цілих чисел система лінійних рівнянь з матрицею Z і стовпцем вільних членів $U \cdot \mathcal{RS}(C)^T$. Для цього знаходимо ранг r матриці Z.

```
gap> cc:=U*c;; r:=RankMat(ZZ);;
gap> solve:="?";; for i in [r+1..m*n] do if cc[i][1]<>0 then solve:="Не існує розв'язків";
break; fi; od; solve;;
gap> for i in [1..r] do if not IsInt(cc[i][1]/ZZ[i][i]) then solve:="Не існує розв'язків";
break; else solve:="Розв'язок існує"; fi; od; solve;
```

У разі сумісності такої системи лінійних рівнянь знаходимо деякий частинний її розв'язок X_1. Якщо ранг матриці Z дорівнює її порядку, тобто якщо $r = mn$, то цей розв'язок є єдиним. Шуканим частинним розв'язком заданого в умові матричного рівняння Сільвестра є матриця

$$\mathcal{RS}^{-1}(X_1 \cdot V^T) = \begin{pmatrix} 32 & -3 & -11 \\ -61 & 0 & 35 \\ 27 & -2 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
gap> X1:=[];; for i in [1..r] do Append(X1, [cc[i][1]/ZZ[i][i]]); od;
for i in [r+1..m*n] do Append(X1,[0]); od; X1:=[X1];;
gap> X1:=V*TransposedMat(X1);
gap> XX:=[];; for i in [1..m] do row:=[]; for j in [1..n] do k:=(i-1)*n+j;
Append(row,[X1[k][1]]); od; Append(XX,[row]); od;
```

І насамкінець, знаходимо фундаментальну систему розв'язків відповідного до заданого однорідного матричного рівняння, як це вказано у теоремі 1.

```
gap> FundamentalSolutions:=[];
gap> for t in [r+1.. m*n] do Xx:=[];; for i in [1..m] do row:=[]; for j in [1..n] do
k:=(i-1)*n+j; Append(row,[V[k][t]]); od; Append(Xx,[row]); od;
Append(FundamentalSolutions,[Xx]); od;
```

У нашому випадку фундаментальна система розв'язків складається з двох матриць

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 34 & 0 & -17 \\ -14 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, множина

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha - 18\beta + 32 & -3 & -\alpha + 9\beta - 11 \\ -4\alpha + 34\beta - 61 & 0 & 2\alpha - 17\beta + 35 \\ 2\alpha - 14\beta + 27 & -2 & -\alpha + 7\beta - 21 \\ -2\beta & 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \right\}$$

є модулем розв'язків заданого в умові матричного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння Сільвестра $AX + XB = C$ над кільцем многочленів $\mathbb{Q}[x]$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, де

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 + 1 & 2x^2 - 2 \\ -2x^3 + 5x^2 - 3x & 2x^3 - 3x^2 - x + 3 & -4x^3 + 6x^2 + 4x - 6 \\ 0 & x^3 - x^2 - x + 1 & -2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -6x^3+3x^2+6x-2 & -3x^2+3 \\ 12x^4-10x^3-10x^2+10x-2 & 6x^3-2x^2-6x+3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \\ x^4 & x^5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Застосуємо описаний вище алгоритм з невеликою адаптацією в GAP до кільця многочленів $\mathbb{Q}[x]$.

```
gap> Qx:=PolynomialRing(Rationals,["x"]);;
gap> x:=Indeterminate(Rationals,"x");;
gap> I:=One(Qx);;
gap> A:=[[x^2,-x^2+1,2*x^2-2], [-2*x^3+5*x^2-3*x,2*x^3-3*x^2-x+3,
-4*x^3+6*x^2+4*x-6], [0,x^3-x^2-x+1,-2*x^3+3*x^2+2*x-2]]*I;;
gap> B:=[[-6*x^3+3*x^2+6*x-2, -3*x^2+3], [12*x^4-10*x^3-10*x^2+10*x-2,
6*x^3-2*x^2-6*x+3]]*I;;
gap> C:=[[1,x],[x^2,x^3],[x^4,x^5]]*I;;
gap> G:=KroneckerProduct(A,One(B))+KroneckerProduct(One(A),TransposedMat(B));;
gap> mxn:=DimensionsMat(C);;m:=mxn[1];;n:=mxn[2];;
gap> UGV:=ElementaryDivisorsTransformationsMat(Qx,G);;
gap> U:=UGV.rowtrans;;V:=UGV.coltrans;;ZZ:=UGV.normal;;
gap> cc:=U*c;;
gap> solve:="?";;for i in [r+1..m*n] do if cc[i][1]<>0 then solve:="Не існує розв'язків";
fi; od; solve;
"?"
gap> for i in [1..r] do if not IsPolynomial(cc[i][1]/ZZ[i][i]) then solve:="Не існує
розв'язків"; break; else solve:="Розв'язок існує"; fi; od; solve;
"Не існує розв'язків"
```

У результаті одержимо, що дане в умові матричне рівняння не має розв'язку, через те що п'ятий елементарний дільник матриці G не ділить відповідну компоненту вектор-стовпця $U \cdot \mathcal{RS}(C)^T$.

Список використаної літератури

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — Москва: Наука, 1967. — 576 с.
2. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The theory of matrices. – New York: Academic Press, 1985. – 570 p.
3. *Rosenblun M.* On the operator equation // Duke. Math. J. – 1956. – **23**. – P. 263–269.
4. *Jameson A.* Solution of equation $AX + XB = C$ by inversion of an $M \times M$ or $N \times N$ matrix // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – **16**, №5. – P. 1020–1023.
5. *Bartels R. H., Stewart G. W.* Solution of the matrix equation $AX + XB = C$: Algorithm 432 // Commun. ACM. – 1972. – **15**. P. 820–826.
6. *Jones J. Jr.* Solution of certain matrix equations // Proc. of the AMS. – 1972. – **31**, №2. – P. 333–339.
7. *Golub G. H., Nash S., Van Loan C. F.* A Hessenberg–Schur method for the problem $AX + XB = C$ // IEEE Trans. Automat. Control AC. – 1979. – **24**. – P. 909–913.
8. *Tongxing Lu.* Solution of the matrix equation // Computing. – 1986. – 37. – P. 351–355.
9. *Hu Q., Cheng D.* The polynomial solution to the Sylvester matrix equation // Applied Mathematics Letters. – 2006. – **19**. – P. 859–864.
10. GAP — ReferenceManual. Release 4.7.8, 09-Jun-2015: [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.gap-system.org/Doc/manuals.html.
11. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.

Одержано 07.06.2015