УДК 517.95

З. М. Нитребич (Нац. ун-т „Львівська політехніка”),
О. М. Маланчук (Львівський нац. медичний ун-т ім. Данила Галицького)

ОДНОРІДНА ЗАДАЧА З ЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ НА ГРАНИЦІ СМУГИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

We investigate a homogeneous problem for partial differential equation with two variables of second order in one (time) variable in which the boundary conditions on a strip bound are set, and generally infinite order in another (spatial) variable. We find the conditions of existence of only trivial solution of the problem. In case when those conditions are violated, we specify a method of constructing non-trivial solutions.

Досліджено однорідну задачу для рівняння із частинними похідними з двома змінними другого порядку за однією (часовою) змінною, за якою задано крайові умови на границі смуги, та загалом нескінченного порядку за іншою (просторовою) змінною. Знайдено умови існування лише тривіального розв’язку задачі, а у випадку їх невиконання вказано спосіб побудови нетривіальних її розв’язків.

Вступ. Задачі з даними на границі області, зокрема смуги, для диференціальних рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами [1, 9, 10]. Прикладами таких задач є задача для рівняння коливань струни

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U\left(t,x\right) = 0, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}, \tag{1}$$

з умовами Діріхле

$$U\left(0,x\right) = \varphi_1\left(x\right), \quad U\left(h,x\right) = \varphi_2\left(x\right), \quad h > 0, \tag{2}$$

та задача для рівняння (1) з умовами Неймана

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(0,x\right) = \varphi_1\left(x\right), \ \ \frac{\partial U}{\partial t}\left(h,x\right) = \varphi_2\left(x\right) \tag{3}$$

на границі часової смуги $S_h \equiv \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2\colon \ t \in (0,h)\,, \ x \in \mathbb{R}\right\}$. Некоректність задач (1), (2) та (1), (3) зумовлюється тим, що ядра цих задач, тобто множини нетривіальних розв’язків відповідних однорідних задач, не є порожніми. Нетривіальними розв’язками рівняння (1), що задовольняють однорідні умови Діріхле та однорідні умови Неймана на границі S_h, є функції вигляду

$$U_k\left(t,x\right) = \sin\frac{\pi k t}{h}\sin\frac{\pi k x}{ah},$$

$$U_k\left(t,x\right) = \cos\frac{\pi k t}{h}\sin\frac{\pi k x}{ah}, \quad k \in \mathbb{N},$$

відповідно.

Отже, актуальним є питання дослідження розв’язків однорідних задач з більш загальними умовами на границі часової смуги S_h та для загальнішого диференціального рівняння – диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом і загалом нескінченного порядку за просторовою змінною. Питанню побудови нетривіальних розв'язків однієї з таких задач за допомогою диференціально-символьного методу [4,6] з умовами Діріхле присвячена праця [3]. Методику використання диференціально-символьного методу для побудови елементів ядра задачі з нелокальною умовою запропоновано в [5]. Задачу типу Діріхле у смузі S_h для диференціального рівняння, однорідного за порядком диференціювання, досліджено в [8].

1. Формулювання задачі. У даній праці досліджується множина розв'язків однорідного рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\equiv\frac{\partial^2U}{\partial t^2}+2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}+b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U=0,\quad t\in(0,h),\ x\in\mathbb{R},\tag{4}$$

що задовольняють крайові умови на границі смуги S_h

$$\begin{aligned} l_1U\,(t,x)&\equiv A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x)+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\\ l_2U\,(t,x)&\equiv B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(h,x)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=0,\quad x\in\mathbb{R},\end{aligned}\tag{5}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази з дійсними коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з дійсними коефіцієнтами.

Надалі вважаємо, що символи $a\,(\nu)$, $b\,(\nu)$, $A_1\,(\nu)$, $B_1\,(\nu)$, $A_2\,(\nu)$, $B_2\,(\nu)$ відповідних диференціальних виразів для $\nu\in\mathbb{C}$ є цілими функціями. Якщо $a\,(\nu)$, $b\,(\nu)$ – поліноми, то позначимо через $p_a\in\mathbb{Z}_+$ та $p_b\in\mathbb{Z}_+$ їх степені, а також вважатимемо, що $p_a=\infty$, $p_b=\infty$, якщо $a\,(\nu)$, $b\,(\nu)$ не є поліномами, крім того, $A_1^2\,(\xi)+A_2^2\,(\xi)\neq0$, $B_1^2\,(\xi)+B_2^2\,(\xi)\neq0$ для $\xi\in\mathbb{R}$.

Зауваження 1. *Дію диференціального виразу $c\left(\frac{d}{dx}\right)$ з цілим символом*

$$c\,(\nu)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\nu^j,\quad c_j\in\mathbb{R},$$

на нескінченно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію $U=U(x)$ розуміємо так:

$$c\left(\frac{d}{dx}\right)U=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\frac{d^jU}{dx^j}.$$

Однорідна задача (4), (5), очевидно, має тривіальний розв'язок. У цій праці вкажемо умови на диференціальні вирази $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та відповідні вирази в умовах (5), за яких існує лише тривіальний розв'язок задачі, а також у випадку існування нетривіального її розв'язку знайдемо елементи ядра за допомогою диференціально-символьного методу.

2. Основні результати.

2.1. Розв'язність задачі. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)\equiv\left(\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\right)T(t,\nu)=0,\quad\nu\in\mathbb{C},\tag{6}$$

яке побудовано на основі рівняння із частинними похідними (4).

Функції вигляду

$$
\begin{gathered}
T_0(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}+\operatorname{ch}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},\\
T_1(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},
\end{gathered}
\tag{7}
$$

в яких $D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu)$ ($4D(\nu)$ – дискримінант полінома $L(\lambda,\nu)=\lambda^2+2a(\nu)\lambda+b(\nu)$), утворюють нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (6), тобто є його розв'язками і задовольняють такі початкові умови

$$
T_0(0,\nu)=1,\ \ \frac{dT_0}{dt}(0,\nu)=0,\ \ T_1(0,\nu)=0,\ \ \frac{dT_1}{dt}(0,\nu)=1.
$$

Зауваження 2. *Оскільки $a(\nu)$, $b(\nu)$ – цілі функції, то за теоремою Пуанкаре* ([11], с. 59) *функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ вигляду* (7) *є цілими функціями стосовно параметра ν. Зокрема, якщо $D(\nu_0)=0$, то $L(\lambda,\nu_0)=(\lambda+a(\nu_0))^2$ і*

$$
T_0(t,\nu_0)=e^{-a(\nu_0)t}\left\{a(\nu_0)t+1\right\},\quad T_1(t,\nu_0)=te^{-a(\nu_0)t}.
$$

Порядок p цілих стосовно ν функцій $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ визначають ([2], с. 83) *за степенями p_a та p_b диференціальних поліномів $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ за формулою $p=\max\{p_a,\,p_b/2\}$. Крім того, вважаємо, що $p=\infty$, якщо $p_a=\infty$ або $p_b=\infty$.*

Запишемо визначник вигляду (характеристичний визначник задачі (4), (5)):

$$
\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} l_1T_0(t,\nu) & l_1T_1(t,\nu)\\ l_2T_0(t,\nu) & l_2T_1(t,\nu)\end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix} A_1(\nu) & A_2(\nu)\\ B_1(\nu)T_0(h,\nu)+B_2(\nu)T_0{}'(h,\nu) & B_1(\nu)T_1(h,\nu)+B_2(\nu)T_1{}'(h,\nu)\end{vmatrix},
$$

тобто

$$
\begin{gathered}
\Delta(\nu)=A_1(\nu)\left[B_1(\nu)T_1(h,\nu)+B_2(\nu)T_1{}'(h,\nu)\right]-\\
-A_2(\nu)\left[B_1(\nu)T_0(h,\nu)+B_2(\nu)T_0{}'(h,\nu)\right].
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Якщо в (5) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$, то отримуємо умови Діріхле і визначник $\Delta(\nu)$ набуде вигляду

$$
\Delta(\nu)=T_1(h,\nu)=e^{-a(\nu)h}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}.
$$

Для $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$ задача (4), (5) є задачею Неймана і визначник $\Delta(\nu)$ має вигляд

$$
\Delta(\nu)=-T_0{}'(h,\nu)=e^{-a(\nu)h}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}b(\nu).
$$

Якщо в (5) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=1$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\beta\in\mathbb{R}$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\gamma\in\mathbb{R}$, то отримуємо крайові умови третього роду і визначник $\Delta(\nu)$ набуде вигляду:

$$\Delta(\nu)=T_1(h,\nu)+\gamma T_1{}'(h,\nu)-\beta\left[T_0(h,\nu)+\gamma T_0{}'(h,\nu)\right]=$$

$$=e^{-a(\nu)h}\left\{\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\left[1-a(\nu)(\beta+\gamma)+\beta\gamma b(\nu)\right]+\operatorname{ch}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right](\gamma-\beta)\right\}.$$

Для характеристичного визначника $\Delta(\nu)$ є можливими три випадки:
1) $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}$;
2) $\Delta(\nu)\equiv 0$;
3) $P\equiv\{\nu\in\mathbb{C}\colon\ \Delta(\nu)=0\}\neq\varnothing$, причому $P\neq\mathbb{C}$.
Дослідимо у цій статті лише перші два випадки.

2.1.1. Випадок $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}$.

Доведемо, що задача (4), (5) для $(t,x)\in(0,h)\times\mathbb{R}$ у класі цілих функцій має лише тривіальний розв'язок. Припустимо протилежне, що в S_h існує ненульовий цілий розв'язок $U(t,x)$ рівняння (4), що задовольняє умови $l_1U(t,x)=l_2U(t,x)=0$. Позначимо $U(0,x)=\varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$, тоді $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – цілі функції. Запишемо цей розв'язок задачі (4), (5) згідно з диференціально-символьним методом ([6], с. 106]) як розв'язок задачі Коші з початковими даними φ та ψ:

$$U(t,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Оскільки $T_0(t,\nu)$ та $T_1(t,\nu)$ є цілими за ν функціями порядку p, то припускаємо, що цілі функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ мають „спряжений" ([7], с. 316) до p порядок q, тобто $q=p/(p-1)$ для $1<p<\infty$, $q=\infty$ для $p\leq 1$, $q=1$ для $p=\infty$.

З умов $l_1U(t,x)=l_2U(t,x)\equiv 0$ в S_h одержуємо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}l_1T_0(t,\nu)\right\}\big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}l_1T_1(t,\nu)\right\}\big|_{\nu=0}\equiv 0,\\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}l_2T_0(t,\nu)\right\}\big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}l_2T_1(t,\nu)\right\}\big|_{\nu=0}\equiv 0.\end{cases}\tag{9}$$

Покажемо, що система (9) має лише тривіальний розв'язок $\varphi(x)\equiv\psi(x)\equiv 0$. Справді, на першу тотожність системи (9) подіємо диференціальним виразом $l_2T_1(t,\frac{\partial}{\partial x})\equiv B_1(\frac{\partial}{\partial x})T_1(h,\frac{\partial}{\partial x})+B_2(\frac{\partial}{\partial x})T_1{}'(h,\frac{\partial}{\partial x})$, на другу тотожність відповідно виразом $l_1T_1(t,\frac{\partial}{\partial x})\equiv A_1(\frac{\partial}{\partial x})$, після чого від першої тотожності віднімемо другу. Одержимо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}\Delta(\nu)\right\}\Big|_{\nu=0}\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Оскільки $\Delta(\nu)$ – ціла функція, причому $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}$, то функція $\frac{1}{\Delta(\nu)}$ є також цілою. Подіявши на останню тотожність диференціальним виразом $\frac{1}{\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}$, отримаємо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}\cdot\frac{1}{\Delta(\nu)}\cdot\Delta(\nu)\right\}\Big|_{\nu=0}\equiv 0,$$

звідки маємо $\varphi(x)\ \{e^{\nu x}\}|_{\nu=0} \equiv 0$ або $\varphi(x) \equiv 0$.

Цілком аналогічно, подіявши на першу тотожність системи (9) диференціальним виразом $-l_2 T_0(t, \frac{\partial}{\partial x})$ і на другу тотожність виразом $l_1 T_0(t, \frac{\partial}{\partial x})$, а потім додавши отримані тотожності, отримуємо, що $\psi(x) \equiv 0$. Маємо тотожність $U(t,x) \equiv 0$, яка протирічить припущенню про нетривіальність розв'язку задачі (4), (5).

Приклад 1. *Розв'язати в області S_h задачу*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^2 U(t,x) = 0, \tag{10}$$

$$U(0,x) = U(h,x) = 0. \tag{11}$$

Розв'язання. Задача (10), (11) є задачею (4), (5), в якій $b(\nu) = a^2(\nu)$, $D(\nu) = 0$, $A_1(\nu) = 1$, $A_2(\nu) = 0$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння $\left(\frac{d}{dt} + a(\nu)\right)^2 T(t,\nu) = 0$ (див. зауваження 2) має вигляд:

$$T_0(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\,t + 1\right\}, \quad T_1(t,\nu) = te^{-a(\nu)t}.$$

Характеристичний визначник задачі є таким:

$$\Delta(\nu) = T_1(h,\nu) = he^{-a(\nu)h}.$$

Оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\forall \nu \in \mathbb{C}$, то задача (10), (11) у класі цілих функцій має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі є порожнім.

Приклад 2. *У смузі S_1 знайти розв'язки рівняння*

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0;1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

що задовольняють на границі смуги умови

$$U(0,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(1,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Розв'язання. Дана задача є задачею (4), (5), в якій $a(\nu) = -\nu$, $b(\nu) = -2\nu - 1$, $D(\nu) = (\nu+1)^2$, $A_1(\nu) = 1$, $A_2(\nu) = -1$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 1$.

В даному випадку

$$T_0(t,\nu) = e^{\nu t}\left\{-\nu\frac{\operatorname{sh}[t(\nu+1)]}{\nu+1} + \operatorname{ch}[t(\nu+1)]\right\}, \quad T_1(t,\nu) = e^{\nu t}\frac{\operatorname{sh}[t(\nu+1)]}{\nu+1}.$$

Визначник $\Delta(\nu)$ має вигляд:

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ T_0(1,\nu) + T_0{}'(1,\nu) & T_1(1,\nu) + T_1{}'(1,\nu) \end{vmatrix} =$$

$$= T_1(1,\nu) + T_1{}'(1,\nu) + T_0(1,\nu) + T_0{}'(1,\nu) = 2e^{2\nu+1}.$$

Оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\forall \nu \in \mathbb{C}$, то задача (12), (13) у класі цілих функцій має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі є порожнім.

2.1.2. Випадок $\Delta(\nu)\equiv 0$. З урахуванням (8) маємо

$$A_1(\nu)\left[B_1(\nu)T_1(h,\nu)+B_2(\nu){T_1}'(h,\nu)\right]-A_2(\nu)\left[B_1(\nu)T_0(h,\nu)+B_2(\nu){T_0}'(h,\nu)\right]\equiv 0. \tag{14}$$

Доведемо, що ядро задачі (4), (5) для $(t,x)\in(0,h)\times\mathbb{R}$ у класі цілих функцій не є порожнім, причому вкажемо вигляд елементів ядра.

Відповідно до диференціально-символьного методу нетривіальні цілі розв'язки задачі (4), (5) шукаємо у вигляді розв'язку

$$U\,(t,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_2(\nu)T_0\,(t,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1(\nu)T_1\,(t,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}$$

рівняння (4) з довільними невідомими цілими функціями φ, ψ порядку q.

Зауважимо, що функції $A_2(\nu)T_0\,(t,\nu)\,e^{\nu x}$, $A_1(\nu)T_1\,(t,\nu)\,e^{\nu x}$ є цілими, як і функції $T_0\,(t,\nu)$, $T_1\,(t,\nu)$, причому того ж порядку p.

З першої умови (5) отримаємо співвідношення:

$$0\equiv A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x)+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=$$

$$=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1(\nu)A_2(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1(\nu)A_2(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]\left\{A_1(\nu)A_2(\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big[\varphi(x)+\psi(x)\Big],$$

звідки $\varphi+\psi\in\ker(A_1A_2)$, тобто $\psi\,(x)+\varphi\,(x)\equiv\omega(x)$, де $\omega\in\ker(A_1A_2)$. Оскільки φ, ψ, ω – цілі функції, то $\psi+\varphi\equiv\omega$ на $\mathbb{C}$.

Друга умова (5) виконується, зокрема, коли ω належить до підмножини $\ker(A_1)\cap\ker(A_2)$ множини $\ker(A_1A_2)$. Справді, використовуючи тотожність (14) і тотожність $\psi\equiv-\varphi+\omega$ на $\mathbb{C}$ маємо:

$$B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(h,x)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=$$

$$=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\left[A_2(\nu)B_1(\nu)T_0\,(h,\nu)+A_2(\nu)B_2(\nu){T_0}'\,(h,\nu)\right]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\left[A_1(\nu)B_1(\nu)T_1\,(h,\nu)+A_1(\nu)B_2(\nu){T_1}'\,(h,\nu)\right]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]\left\{A_2(\nu)\left[B_1(\nu)T_0\,(h,\nu)+B_2(\nu){T_0}'\,(h,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\omega\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_2(\nu)\left[B_1(\nu)T_0\,(h,\nu)+B_2(\nu){T_0}'\,(h,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}\equiv 0.$$

Оскільки

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1(\nu)T_1\,(t,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}\equiv 0,$$

то нетривіальні цілі розв'язки задачі (4), (5) можна знайти у вигляді

$$U\,(t,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\left[A_2(\nu)T_0\,(t,\nu)-A_1(\nu)T_1\,(t,\nu)\right]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}. \tag{15}$$

У формулі (15) φ – довільна ціла функція, що має „спряжений” порядок до порядку цілої функції $[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)T_1(t,\nu)]\,e^{\nu x}$.

Зауваження 3. *Ціла функція* $[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)T_1(t,\nu)]\,e^{\nu x}$ *має порядок* p', *причому* $p' \le p$. *У випадку* $p' = 1$ *на функцію* φ *можна накладати значно слабші умови – замість її цілості досить вимагати її неперервної диференційовності до деякого порядку в області* $\mathbb{R}$ *(див. далі приклади 3–6).*

Приклад 3. *Розв'язати у смузі* S_h *задачу*

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(-1 - 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right]U(t,x) = 0, \tag{16}$$

$$A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[U(0,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)\right] = 0, \quad B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[U(h,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(h,x)\right] = 0. \tag{17}$$

Розв'язання. Дана задача є задачею (4), (5), в якій $b(\nu) = -1 - 2a(\nu)$, $B_1(\nu) = -B_2(\nu)$, $A_1(\nu) = -A_2(\nu)$, $A_1(\nu) \not\equiv 0$, $B_1(\nu) \not\equiv 0$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2a(\nu)\frac{d}{dt} + (-1 - 2a(\nu))\right]T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$T_0(t,\nu) = \frac{2a(\nu) + 1 + e^{-2(a(\nu)+1)t}}{2a(\nu) + 2}e^t, \quad T_1(t,\nu) = \frac{1 - e^{-2(a(\nu)+1)t}}{2a(\nu) + 2}e^t.$$

Характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ задачі (16), (17) є таким:

$$\Delta(\nu) = A_1(\nu)B_1(\nu)\left[T_1(h,\nu) - T_1{}'(h,\nu) + T_0(h,\nu) - T_0{}'(h,\nu)\right] =$$

$$= A_1(\nu)B_1(\nu)\,e^{-a(\nu)h}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\left[(1 + a(\nu))^2 - D(\nu)\right].$$

Оскільки $D(\nu) = (1 + a(\nu))^2$, то $\Delta(\nu) \equiv 0$.

З формули (15) одержуємо

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{[-A_1(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)T_1(t,\nu)]\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{[-A_1(\nu)\left(T_0(t,\nu) + T_1(t,\nu)\right)]\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{[-A_1(\nu)e^t]\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{-A_1(\nu)e^{t+\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}.$$

Порядок p' цілої функції $-A_1(\nu)e^{t+\nu x}$ дорівнює 1 (див. зауваження 3). Останню функцію можна записати у вигляді

$$U(t,x) = -A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{e^{t+\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}.$$

З урахуванням формули $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}\}|_{\nu=0} = \varphi(x)$ для цілої функції $\varphi(x)$ розв'язок задачі (16), (17) набуває вигляду

$$U(t,x) = -e^t A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x).$$

Позначимо $-A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \varphi_1(x)$, тоді

$$U(t,x) = e^t\varphi_1(x).$$

Остання формула визначає розв'язок задачі (16), (17), де φ_1 – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, тобто $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R})$. Ядро цієї задачі є нескінченновимірним.

Приклад 4. *Знайти розв'язок диференціально-функціонального рівняння*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x) + 2\frac{\partial}{\partial t}U(t,x+1) + 2U(t,x+1) - U(t,x) = 0, \tag{18}$$

що задовольняє на границі смуги S_h умови

$$U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(h,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0. \tag{19}$$

Розв'язання. Диференціально-функціональне рівняння (18) подамо у вигляді такого диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2e^{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial t} + \left(2e^{\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)\right]U(t,x) = 0.$$

Задача (18), (19) є задачею (4), (5), в якій $a(\nu) = e^\nu$, $b(\nu) = 2e^\nu - 1$, $A_1(\nu) = A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $D(\nu) = (e^\nu - 1)^2$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2e^\nu\frac{d}{dt} + (2e^\nu - 1)\right]T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$T_0(t,\nu) = \frac{2e^\nu - 1 - e^{-2(e^\nu-1)t}}{2(e^\nu - 1)}e^{-t}, \quad T_1(t,\nu) = \frac{1 - e^{-2(e^\nu-1)t}}{2(e^\nu - 1)}e^{-t}.$$

Характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ задачі (18), (19) є таким:

$$\Delta(\nu) = T_1(h,\nu) + T_1{}'(h,\nu) - T_0(h,\nu) - T_0{}'(h,\nu) =$$

$$= e^{-e^\nu h}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\left[(e^\nu - 1)^2 - D(\nu)\right].$$

Оскільки $D(\nu) = (e^\nu - 1)^2$, то $\Delta(\nu) \equiv 0$.

За формулою (15) маємо

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{[T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)]\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{-t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = e^{-t}\varphi\left(x\right).$$

Як бачимо функції $T_0\left(t,\nu\right)$ та $T_1\left(t,\nu\right)$ є цілими за ν функціями нескінченного порядку, однак функція $\left[T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x} = e^{-t+\nu x}$ має перший порядок (див. зауваження 3).

Отже, розв'язок задачі (18), (19) набуває вигляду

$$U\left(t,x\right) = e^{-t}\varphi\left(x\right),$$

де φ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, тобто $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. Ядро цієї задачі є нескінченновимірним.

Приклад 5. *У смузі S_π розв'язати задачу*

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]U\left(t,x\right) = 0, \tag{20}$$

$$\alpha U(0,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad \alpha U(\pi,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = 0, \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Розв'язання. Дана задача є задачею (4), (5), в якій $a\left(\nu\right) = \nu$, $b(\nu) = \nu^2+1$, $h = \pi$, $A_1(\nu) = \alpha$, $A_2(\nu) = \beta$, $B_1(\nu) = \alpha$, $B_2(\nu) = \beta$, $D(\nu) = -1$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\nu\frac{d}{dt} + \left(1+\nu^2\right)\right]T\left(t,\nu\right) = 0$$

має вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right) = e^{-\nu t}\left[\nu \sin t + \cos t\right], \quad T_1\left(t,\nu\right) = e^{-\nu t}\sin t,$$

а характеристичний визначник задачі є таким:

$$\Delta\left(\nu\right) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha e^{-\pi\nu} & -\beta e^{-\pi\nu} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Нетривіальні розв'язки задачі (20), (21) шукаємо у вигляді (15):

$$U\left(t,x\right) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[\beta T_0(t,\nu) - \alpha T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left((\beta\nu - \alpha)\sin t + \beta\cos t\right)e^{\nu x - \nu t}\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

З урахуванням формул

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\nu e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \varphi'(x)$$

для цілої функції φ, отримуємо

$$U(t,x) = \beta\,\varphi(x-t)\cos t - \alpha\varphi(x-t)\sin t\, + \beta\varphi'(x-t)\sin t,$$

причому в останній формулі достатньо вважати, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$. Ядро цієї задачі є нескінченновимірним.

Зауважимо, що для $\alpha = 0,\ \beta = 1$ умови (21) є умовами Неймана у смузі, тоді нетривіальними розв'язками задачі (20), (21) будуть функції

$$U(t,x) = \varphi(x-t)\cos t + \varphi'(x-t)\sin t,$$

де $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$.

Якщо ж $\alpha = 1,\ \beta = 0$, то маємо задачу Діріхле, нетривіальними розв'язками якої є такі функції $U(t,x) = \varphi(x-t)\sin t$, де $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ (такий результат отримано у [3]).

Приклад 6. *У смузі S_h розв'язати задачу*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\pi^2 k^2}{h^2} + a^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)U = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$\alpha U(0,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad \alpha U(h,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0,\ \ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

де $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Розв'язання. Задача (20), (21) є частковим випадком задачі (22), (23) для $k = 1$, $h = \pi$, $a\,(\nu) = \nu$. Для задачі (22), (23) маємо

$$T_0\,(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\left\{\frac{h\,a\,(\nu)\sin\frac{\pi k t}{h}}{\pi k} + \cos\frac{\pi k t}{h}\right\}, \quad T_1\,(t,\nu) = h\,e^{-a(\nu)t}\frac{\sin\frac{\pi k t}{h}}{\pi k}.$$

Характеристичний визначник задачі має вигляд:

$$\Delta\,(\nu) = e^{-a(\nu)h}\frac{h\sin[\pi k]}{\pi k}\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta a\,(\nu) + \beta^2\left(a^2\,(\nu) + \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\right)\right) \equiv 0.$$

Шукаючи нетривіальні розв'язки задачі (22), (23) у вигляді (15) для $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\begin{aligned} U_k(t,x) = \frac{h\sin\dfrac{\pi k t}{h}}{\pi k}\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\left(\beta a\,(\nu) - \alpha\right)\right\}\Big|_{\nu=0} + \\ +\beta\cos\frac{\pi k t}{h}\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}. \end{aligned} \tag{24}$$

Розв'язки (24) будуть цілими розв'язками задачі (22), (23), якщо φ є цілою функцією, порядок q якої має такі обмеження ([7], с. 316):

1) $q = 1$, якщо $a\,(\nu)$ не є поліномом ($p_a = \infty$);
2) $1 < q < \frac{p_a}{p_a - 1} \leq 2$, якщо $2 \leq p_a < \infty$;
3) $q = \infty$, якщо $p_a \leq 1$, тобто $a\,(\nu)$ – лінійна функція.

Для лінійної функції $a\,(\nu) = A\nu + B$, де $A, B \in \mathbb{R}$, отримуємо нетривіальні класичні розв'язки задачі (22), (23) у вигляді

$$U_k\,(t,x) =$$

$$= e^{-Bt}\left[\frac{h\sin\frac{\pi kt}{h}}{\pi k}\left\{\beta A\varphi'\,(x-At)+\beta\,(B-\alpha)\,\varphi\,(x-At)\right\}+\beta\cos\frac{\pi kt}{h}\varphi\,(x-At)\right],$$

де $k\in\mathbb{N},\ \varphi\in C^3(\mathbb{R})$.

Висновки. Доведено, що ядро задачі $(4),(5)$ у часовій смузі є порожнім у класі цілих функцій, якщо характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ є відмінним від нуля для всіх $\nu\in\mathbb{C}$. Якщо ж $\Delta(\nu)\equiv 0$, то ядро задачі є нескінченновимірним і визначається класом цілих або неперервно диференційовних до деякого порядку на $\mathbb{R}$ функцій. Для досліджень використано диференціально-символьний метод.

У перспективі цікавими є дослідження щодо знаходження розв'язків такої ж задачі у часовій смузі для випадку, коли множина $P\equiv\{\nu\in\mathbb{C}\colon\ \Delta(\nu)=0\}\neq\varnothing$ і не збігається з $\mathbb{C}$, а також аналогічної задачі у часовому шарі $(t,x)\in\mathbb{R}^{s+1}$, де $t\in[0,h]$, $x\in\mathbb{R}^s$, $s\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Список використаної літератури

1. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. – 1968. – **183**, №5. – С. 995–998.
2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
3. *Ільків В.С., Нитребич З.М.* Про розв'язки однорідної задачі Діріхле у часовій смузі для рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною // Вісник Львівського університету. Серія мех-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 65–77.
4. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.
5. *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №2. – С. 7–15.
6. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
7. *Леонтьев А.Ф.* Обобщение рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.
8. *Нитребич З.М.* Крайова задача у безмежній смузі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994, №37. – С. 16–21.
   Те саме: *Nytrebych Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1388–1392.
9. *Пташник Б.И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Одержано 03.11.2015