УДК 519.6

Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ НЕГЛАДКИХ ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ

Numerical method of finding the extremum of random nonsmooth concave functions with use new approach of non-classical Newton majorants and diagrams of functions defined in tabular form is considered.

Побудовано чисельний метод відшукання екстремуму довільних негладких вгнутих функцій з використанням нового підходу до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

1. Вступ. В [1–5] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та багатьох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій, розробки чисельних методів обчислення визначених інтегралів, розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку та їхніх систем. Оскільки для певного класу функцій некласична мажоранта Ньютона збігається зі самою функцією, то побудовані чисельні методи для цього класу функцій є точними, якщо не враховувати операцій заокруглення.

В [6–9] розглянуто інший підхід до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, який використано для розробки чисельних методів розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь та їхніх систем, які є точними на іншому класі функцій, якщо не враховувати операцій заокруглення.

У статті побудуємо чисельний метод відшукання максимального значення довільної негладкої вгнутої функції однієї дійсної змінної, використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [8].

2. Основний результат. Нехай функція дійсної змінної $y = f(x)$ задана своїми значеннями у деяких точках x_i $(i = 0, 1, ..., n)$: $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, ..., n$, де $y_i \le M$, $i = 0, 1, ..., n$, а M — деяка стала.

Припустимо, що для $f(x)$ ми побудували некласичні діаграму Ньютона $\tilde{\delta}_f$ і мажоранту Ньютона $\tilde{M}_f(x)$ [8]. Нехай $\tilde{M}_f(x_i) = H_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – множина вершинних індексів діаграми $\tilde{\delta}_f$. Введемо числові нахили діаграми $\tilde{\delta}_f$ за формулою

$$\tilde{R}_i = \frac{\mathrm{e}^{H_{i+1}}}{\mathrm{e}^{H_i}} = \mathrm{e}^{H_{i+1}-H_i}, i = 0, 1, \ldots, n-1, \tilde{R}_n = 0.$$

Тоді для числових нахилів будуть виконуватись умови:

$$\tilde{R}_{i_1} > \tilde{R}_{i_2} > \ldots > \tilde{R}_{i_{k-1}} > \tilde{R}_{i_k} = 0, \tilde{R}_{i_s} = \tilde{R}_{i_{s+1}} = \ldots = \tilde{R}_{i_{s+1}-1}.$$

Припустимо, що $f(x)$ – довільна негладка вгнута функція на проміжку $[a, b]$. Виберемо на $[a, b]$ систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

$x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$ і знайдемо значення функції $y = f(x)$ у цих точках. $f(x_i) = a_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Оскільки $f(x)$ – вгнута функція на проміжку $[a, b]$, то числові нахили некласичної діаграми Ньютона, побудованої за значеннями функції в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ визначатимуться за формулою $\tilde{R}_i = \mathrm{e}^{a_{i+1}-a_i}, i = 0, 1, \ldots, n-1, \tilde{R}_n = 0$. У цьому випадку $\tilde{R}_0 > \tilde{R}_1 > \ldots > \tilde{R}_{n-1} > \tilde{R}_n$.

Алгоритм відшукання максимального значення функції $f(x)$ є таким. Спочатку визначаємо $\tilde{R}_0$. Якщо $\tilde{R}_0 \leq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо точку x_0. Якщо $\tilde{R}_0 > 1$, то визначаємо $\tilde{R}_{n-1}$. При $\tilde{R}_{n-1} \geq 1$ за точку максимуму функції приймаємо x_n. Припустимо, що $\tilde{R}_0 > 1$ і $\tilde{R}_{n-1} < 1$. Тоді шукаємо найменше значення ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, для якого виконується умова $\tilde{R}_\nu \geq 1$, $\tilde{R}_{\nu+1} < 1$ або $\tilde{R}_\nu > 1$, $\tilde{R}_{\nu+1} \leq 1$.
Тоді в першому випадку за точку максимуму функції $f(x)$ приймаємо x_ν, а в другому – $x_{\nu+1}$. Очевидно, якщо $x = \alpha \in [a, b]$ є точкою максимуму функції, а $\bar{x}$ – знайдена згідно алгоритму точка максимуму, то $|\bar{x} - \alpha| < h$.

Приклад 1. *Знайти максимум функції* $y = 5xe^{-x}+2$ *(рис. 1) на проміжку [0; 2] з кроком* $h = 0.1$.

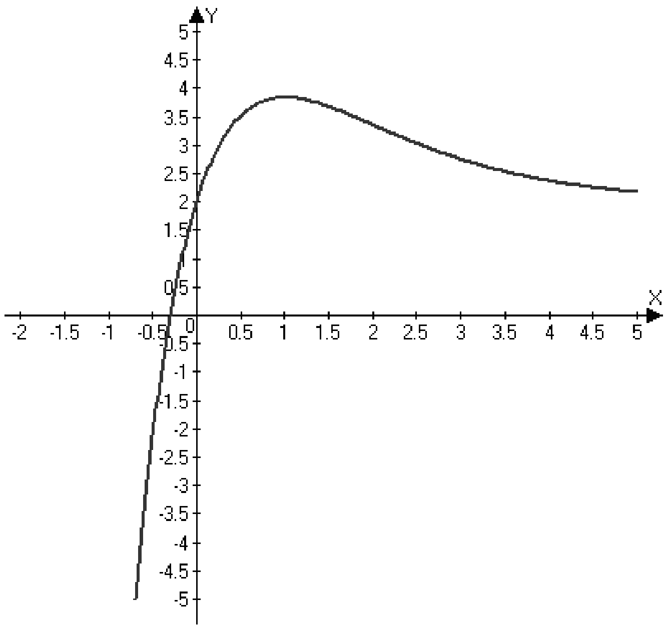

Рис. 1. Графік функції $y = 5xe^{-x} + 2$.

У табл. 1 наведено значення числових нахилів $\tilde{R}_i$, *які необхідно обчислити для відшукання максимуму. Шукане значення* $\bar{x} = 0.9$ *з точністю* $O(h)$.

Таблиця 1

i	0	1	2	3	4	5
$\tilde{R}_i$	1.57211	1.44241	1.33977	1.25786	1.19206	1.13895
i	6	7	8	9	10	
$\tilde{R}_i$	1.09594	1.06106	1.03277	1.00988	0.99143	

У табл. 2 наведено значення максимуму $\bar{x}$, *обчислені при різних* h.

Таблиця 2

h	$\bar{x}$ – максимум
0.1	0.9
0.01	0.99
0.001	0.999
0.0001	0.9999

Приклад 2. *У табл. 3 наведені значення максимуму різних вгнутих функцій, обчислених з кроком* $h = 0.001$.

Таблиця 3

Функція	проміжок	$\bar{x}$ – максимум
$y = x - e^x + 2$	[-1; 1]	-0.001
$y = 5x - x^2$	[2; 3]	2.499
$y = 2\ln x - e^x + 3$	[0.2; 1]	0.852

Висновки. Розроблено чисельний метод відшукання екстремуму довільних негладких вгнутих функцій з використанням нового підходу до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

Список використаної літератури

1. *Цегелик Г. Г.* Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке / Г. Г. Цегелик // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. - №6. – С. 18–19.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение / Г. Г. Цегелик // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №9. – С. 1273–1276.
3. *Цегелик Г. Г.* Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь /Г. Г. Цегелик // Прикладні проблеми механіки і иатематики: наук. зб. – 2005. – Вип.3. – С. 21–27.
4. *Цегелик Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г. Цегелик, М. Глебена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2010. – Вип. 16. – С. 64–69.
5. *Цегелик Г. Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2013. – 190с.
6. *Підківка Л.* Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь / Л. Підківка, Г. Цегелик // Вісник Львів. ун-ту. Серія приклад. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 26–31.
7. *Фундак Л.* Екстраполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь / Л. Фундак, Г. Цегелик // Вісник Львів. ун-ту. Серія приклад. матем. та інформ. – 2005. – Вип. 10. – С. 41–48.
8. *Фундак Л. І.* Новий підхід ло побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій та його застосування / Фундак Л. І., Цегелик Г. Г. // Волинський математичний вісник. Серія приклад. матем.– 2005. – Вип. 3(12). – С. 186-200.
9. *Фундак Л І.* Про обчислювальну стійкість інтерполяційного методу мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь / Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 151-156.

Одержано 10.06.2015