УДК 517.925

А. В. Дрожжина (Одеський нац. ун-т імені. І.І. Мечникова)

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-го ПОРЯДКУ, ЩО Є АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКИМИ ДО РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

The conditions of the existence and asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$– solutions of the differential equations n - th order that are asymptotically close in a certain sense to the equations with regularly varying nonlinearities are established.

Встановлюються умови існування та асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$– розв'язків диференціальних рівнянь n- го порядку, що у деякому сенсі є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями.

1. Вступ. Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1}$$

де $n \geq 2$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_j дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — деякий односторонній окіл Y_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Означення 1. *Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$- розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{2}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

Випадок, коли $\lambda_0 = \pm\infty$ є особливим при вивченні таких розв'язків і потребує окремого розгляду. Кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$- розв'язок при $t \uparrow \omega$ володіє (див. [1], Розділ 3, §10) наступними апріорними асимптотичними властивостями:

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-1)}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \tag{3}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Асимптотична поведінка таких розв'язків в роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко [2] та В.М. Євтухова, А.М. Клопота [3] досліджувалась для неавтономних диференціальних рівнянь n- го порядку, що містять у правій частині один або декілька доданків з правильно змінними нелінійностями, і в роботі Л.И. Кусік [4] для рівняння (1) загального виду при $n = 2$, тобто у випадку диференціального рівняння другого порядку. При цьому в [4] припускалося, що рівняння (1) є у деякому сенсі асимптотично близьким до рівняння виду

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'),$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна і правильно змінна при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функція порядку σ_j, Y_j дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — деякий односторонній окіл Y_j, $j = 0, 1$.

Теорія правильно змінних функцій докладно викладена в монографіях Е. Сенета [5] і N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [6]. Згідно з цією теорією кожна правильно змінна при $y \to Y$ функція $\varphi : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ порядку σ, де Y дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_Y — деякий односторонній окіл Y, допускає зображення виду

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \tag{4}$$

в якому $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ – повільно змінна функція при $y \to Y$, тобто така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0. \tag{5}$$

Серед властивостей повільно змінних при $y \to Y$ функцій $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, де Y дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_Y – деякий односторонній окіл Y, відзначимо наступні.

$\mathcal{M}_1$. Граничне співвідношення (5) виконується рівномірно за λ на будь-якому відрізку $[c, d] \subset]0, +\infty[$.

$\mathcal{M}_2$. $\lim\limits_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \dfrac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0.$

$\mathcal{M}_3$. Існує неперервно диференційовна функція $L_0 : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, яка носить назву нормалізована повільно змінна функція при $y \to Y$, така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \qquad \lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{y L_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

$\mathcal{M}_4$. При $\gamma \ne 0$

$$\int\limits_B^y \frac{|z|^{\gamma-1}\, dz}{L(z)} = \frac{\nu |y|^\gamma}{\gamma L(y)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

де

$$\nu = \operatorname{sign} y, \quad B = \begin{cases} y_0, & \text{якщо} \quad \left| \int\limits_{y_0}^{Y} \frac{|z|^{\gamma-1}\, dz}{L(z)} \right| = +\infty, \\ Y, & \text{якщо} \quad \left| \int\limits_{y_0}^{Y} \frac{|z|^{\gamma-1}\, dz}{L(z)} \right| < +\infty, \end{cases} \qquad y_0 \in \Delta_Y.$$

Крім того, введемо для повільно змінних функцій умову S_0.

Означення 2. *Будемо казати, що повільно змінна при $y \to Y$ функція $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, де Y дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, и Δ_Y- односторонній окіл Y, задовольняє умову S_0, якщо*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

де $\nu = \operatorname{sign} y$.

Умову S_0 свідомо задовольняють функції, що мають відмінну від нуля скінчену границю при $y \to Y$ і функції виду

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Метою даної роботи є поширення результатів з [4] на випадок довільного $n \geq 2$, а саме встановлення умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$– розв'язків і асимптотичних зображень для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Для цих розв'язків $n-1$-а похідна є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$.

2. Основні результати.

Означення 3. *Будемо казати, що функція f у диференціальному рівнянні (1) задовольняє умову $(RN)_\infty$, якщо існує число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, неперервна функція $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при $z_j \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$, такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_j : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$, які задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = n-j-1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{6}$$

має місце асимптотичне зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{7}$$

Оскільки в (7) кожна з функцій φ_j є правильно змінною функцією порядку σ_j при $z_j \to Y_j$, то згідно з (4)

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{8}$$

де кожна $L_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ – неперервна повільно змінна функція при $z_j \to Y_j$.

При виконанні умови $(RN)_\infty$ поряд з (8) будемо використовувати наступні позначення:

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \mu_n = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j(n-j-1), \quad C_n = \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_j};$$

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad Y_j = +\infty, \quad \text{або} \\ & Y_j = 0 \quad \text{і} \quad \Delta_{Y_j} - \text{правий окіл нуля,} \\ -1, & \text{якщо} \quad Y_j = -\infty, \quad \text{або} \\ & Y_j = 0 \quad \text{і} \quad \Delta_{Y_j} - \text{лівий окіл нуля,} \end{cases} \quad (j = \overline{0, n-1});$$

$$J_n(t) = \int\limits_{A_n}^{t} p(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds,$$

де

$$A_n = \begin{cases} t_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{t_0}^{t} p(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{t_0}^{t} p(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds < +\infty, \end{cases} \qquad (t_0 \in [a,\omega[).$$

Теорема 1. *Нехай функція f задовольняє умову $(RN)_\infty$, $\gamma \neq 0$ і повільно змінні функції L_j $(j = \overline{0,n-2})$ задовольняють умову S_0. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності*

$$\nu_j\nu_{n-1}\pi_\omega^{n-j-1}(t) > 0 \quad (j = \overline{0,n-2}), \quad \alpha_0\nu_{n-1}\gamma J_n(t) > 0 \tag{9}$$

в деякому лівому околі ω і умови

$$\nu_j \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_j \quad (j = \overline{0,n-2}), \quad \nu_{n-1} \lim_{t\uparrow\omega} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_{n-1}, \tag{10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_n'(t)}{J_n(t)} = 0. \tag{11}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\, y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = \overline{0,n-2}), \tag{12}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_n(t)[1+o(1)], \tag{13}$$

причому таких розв'язків у випадку, коли $\omega = +\infty$ існує n-параметрична сім'я, якщо $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma > 0$, і $n-1$-параметрична сім'я, якщо $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma < 0$, а у випадку, коли $\omega < +\infty$ і $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma > 0$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$– $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язок диференціального рівняння (1). Тоді в силу умов (2) означення 1 існує $t_1 \in [t_0,\omega[$ таке, що на проміжку $[t_1,\omega[$ цей розв'язок і його похідні до порядку $n-1$ включно зберігають знаки, причому $\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \nu_j$ $\;(j = \overline{0,n-1})$ при $t \in [t_1,\omega[$. Крім того, в силу апріорних властивостей $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язків мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення (3), з яких, зокрема, випливає справедливість виконання перших з нерівностей (9) на проміжку $[t_1,\omega[$, асимптотичних зображень (12) і граничних співвідношень

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = n-j-1 \quad (j = \overline{0,n-1}). \tag{14}$$

З (14) ясно, що для функцій $z_j(t) = y^{(j)}(t)$ $(j = \overline{0, n-1})$ виконуються умови (6), і тому згідно з умовою $(RN)_\infty$ і видом рівняння (1) одержуємо асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

або з урахуванням (8), (3), означень μ_n, γ і C_n– асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 C_n p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}|y^{(n-1)}(t)|^{1-\gamma} \prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (15)$$

Оскільки в силу (14)

$$\ln|y^{(j)}(t)| = [n - j - 1 + o(1)]\ln|\pi_\omega(t)| =$$

$$= [1 + o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \quad (j = \overline{0, n-2}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

і функції L_j $(j = \overline{0, n-2})$ задовольняють умову S_0, то

$$L_j\left(y^{(j)}(t)\right) = L_j\left(\nu_j e^{[1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}}\right) =$$

$$= L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-2}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому з (15) отримуємо при $t \uparrow \omega$ асимптотичне співвідношення виду

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{L_n\left(y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_0 p(t) C_n |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1 + o(1)]. \quad (16)$$

Крім того, з вищевикладеного і (2) ясно, що виконуються перші з умов (10) і функції $L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)$ $(j = \overline{0, n-2})$ визначенні на деякому проміжку $[t_2, \omega[$, де $t_2 \in [t_1, \omega[$.

Інтегруючи тепер (16) на проміжку від t_2 до t, одержимо

$$\int_{y_0}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L_{n-1}(z)} = \alpha_0 C_n \int_{t_2}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)[1 + o(1)]\,d\tau,$$

де $y_0 = y^{(n-1)}(t_2)$.

Оскільки тут $y^{(n-1)}(t) \longrightarrow Y_{n-1}$ при $t \uparrow \omega$, то невласні інтеграли

$$\int_{y_0}^{Y_{n-1}} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L_{n-1}(z)} \quad \text{і} \quad \int_{t_2}^{\omega} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)d\tau$$

або одночасно збігаються, або розбігаються. У випадку, коли вони розбігаються з використанням властивості $\mathcal{M}_4$ повільно змінних функцій отримуємо співвідношення виду

$$\frac{\nu_{n-1}|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\gamma L_n\left(y^{(n-1)}(t)\right)}[1 + o(1)] = \alpha_0 C_n J_n(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де в J_n границя інтегрування A_n дорівнює t_2, а у випадку, коли вони збігаються — співвідношення

$$C_{01}+\int\limits_{Y_{n-1}}^{y^{(n-1)}(t)}\frac{|z|^{\gamma-1}}{L_n(z)}=C_{02}+\alpha_0 C_n\int\limits_{\omega}^{t}p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-2}L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)]\,d\tau,$$

де C_{01}, C_{02} – деякі сталі, з якого випливає, що $C_{01}=C_{02}$, і тому з використанням $\mathcal{M}_4$ одержуємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{\nu_{n-1}|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\gamma L_n\left(y^{(n-1)}(t)\right)}[1+o(1)]=\alpha_0 C_n J_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

де в J_n границя інтегрування A_n дорівнює ω.

З отриманих двох співвідношень ясно, що має місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичне зображення (13).

В свою чергу з (13) випливає виконання другої з нерівностей (9) і другої з умов (10).

Крім того, з (13) і (16) маємо, що

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}=\frac{J_n'(t)}{\gamma J_n(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{17}$$

Звідси з урахуванням другого асимптотичного співвідношення (3) одержуємо умову (13).

Достатність. Нехай виконуються умови (9)-(11). Доведемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (1) має $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язок, який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (12), (13), а також з'ясуємо питання про кількість розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

Розглянемо спочатку співвідношення

$$\frac{|Y|^\gamma}{L_{0n-1}(Y)}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_n(t)[1+v_n], \tag{18}$$

де $L_{0n-1}:\Delta_{Y_{n-1}}\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервно диференційовна повільно змінна функція при $Y\to Y_{n-1}$, що існує згідно з властивістю $\mathcal{M}_3$ повільно змінних функцій, яка задовольняє умови

$$\lim_{\substack{Y\to Y_{n-1}\\ Y\in\Delta_{Y_{n-1}}}}\frac{L_{n-1}(Y)}{L_{0n-1}(Y)}=1, \qquad \lim_{\substack{Y\to Y_{n-1}\\ Y\in\Delta_{Y_{n-1}}}}\frac{YL_{0n-1}'(Y)}{L_{0n-1}(Y)}=0. \tag{19}$$

Аналогічно тому, як при доведенні теореми 2.1 у роботі [3], встановлюємо з використанням умов (9)- (11) і принципу стислих відображень, що співвідношення (18) однозначно визначає неперервно диференційовну на множині $[t_0,\omega[\times\{v_n\in\mathbb{R}:|v_n|\le\frac{1}{2}\}$, де t_0 – деяке число з проміжку $[a,\omega[$, неявну функцію $Y(t,v_n)$ з наступними властивостями

$$Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_{n-1}} \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \quad v_n\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \tag{20}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_n) = Y_{n-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J_n(t)(Y(t,v_n))'_t}{J'_n(t)Y(t,v_n)} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{рівномірно за } v_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (21)$$

Тепер рівняння (1) за допомогою замін

$$\frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!}[1+v_j] \quad (j = \overline{1, n-1}), \tag{22}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t)} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t)[1+v_n], \tag{23}$$

і урахуванням того, що тут $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n)$, зведемо до системи диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[(n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j - (1+v_j)G(t, v_1, \dots, v_n)\right], \\ j = 0, 1, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-v_{n-1} - (1+v_{n-1})G(t, v_1, \dots, v_n)\right], \\ v'_n = \frac{1+v_n}{\pi_\omega(t)}\left[G(t, v_1, \dots, v_n)\left(\gamma - \frac{Y(t,v_n)(L_{0n-1}(Y(t,v_n))'_t}{L_{0n-1}(Y(t,v_n))}\right) - \frac{\pi_\omega(t)J'_n(t)}{J_n(t)}\right], \end{cases} \tag{24}$$

де

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\pi_\omega(t)}{Y(t,v_n)} f\left(t, Y_0(t,v_n)(1+v_1), \dots, Y_{n-2}(t,v_n)(1+v_{n-1}), Y(t,v_n)\right),$$

$$Y_j(t, v_n) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} Y(t, v_n) \quad (j = \overline{0, n-2}).$$

Оскільки для функцій

$$z_j(t, v_n, v_{j+1}) = Y_j(t,v_n)(1+v_{j+1}) \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad z_{n-1}(t, v_n) = Y(t, v_n)$$

в силу (21) і (11) виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(z_j(t,v_n,v_{j+1})\right)'_t}{z_j(t,v_n,v_{j+1})} = n-j-1 \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(z_{n-1}(t,v_n)\right)'_t}{z_{n-1}(t,v_n)} = 0$$

рівномірно за $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_i| \le \frac{1}{2}, \ i = \overline{1, n}\right\}$, то згідно з умовою $(RN)_\infty$, яку задовольняє функція f, одержуємо асимптотичне співвідношення

$$f\left(t, Y_0(t,v_n)(1+v_1), \dots, Y_{n-2}(t,v_n)(1+v_{n-1}), Y(t,v_n)\right) =$$

$$= \alpha_0 p(t) \varphi_{n-1}(Y(t,v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j\left(\frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right)[1+r_1(t, v_1, \dots, v_n)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Звідси з урахуванням того, що мають місце зображення (8), виконуються умови (21), (20), (11) і функції L_j $(j = \overline{0, n-2})$ задовольняють умову S_0, а L_{n-1} – першу з умов (19), отримуємо

$$f\left(t, Y_0(t, v_n)(1+v_1), \ldots, Y_{n-2}(t, v_n)(1+v_{n-1}), Y(t, v_n)\right) = \alpha_0 C_n p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \times$$

$$\times |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{n-1}\left(Y(t, v_n)\right) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} L_j\left(Y_j(t, v_n)(1 + v_{j+1})\right) \times$$

$$\times [1 + r_1(t, v_1, \ldots, v_n)] = \alpha_0 C_n p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{0n-1}\left(Y(t, v_n)\right) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right) |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} [1 + r_2(t, v_1, \ldots, v_n)] =$$

$$= \alpha_0 C_n |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{0n-1}(Y(t, v_n)) J_n'(t) [1 + r_2(t, v_1, \ldots, v_n)] \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j},$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t, v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Якщо, крім того, врахувати, що функція $Y = Y(t, v_n)$ задовольняє рівність (18) і умову (20), то одержимо для функції G представлення

$$G(t, v_1, \ldots, v_n) = \frac{\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j}}{\gamma(1 + v_n)} [1 + r_2(t, v_1, \ldots, v_n)].$$

В силу цього виду функції G, умови (11), властивостей (20), (21) функції Y, а також другої з властивостей $\mathcal{M}_3$ повільно змінних функцій, система дифференціальних рівнянь (24) має наступний вид

$$\begin{cases} v_j' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[F_j(t, v_1, \ldots, v_n) + (n-j) v_{j+1} - (n-j) v_j\right], \\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ \\ v_{n-1}' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[F_{n-1}(t, v_1, \ldots, v_n) - v_{n-1}\right], \\ \\ v_n' = \frac{J_n'(t)}{J_n(t)} \left[F_n(t, v_1, \ldots, v_n) - v_n + \sum\limits_{j=0}^{n-2} \sigma_{j+1} v_j + V(v_1, \ldots, v_{n-1})\right], \end{cases} \tag{25}$$

де функції F_j $(j = \overline{1, n})$ неперервні на множині $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ і такі, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} F_j(t, v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

а V- функція виду

$$V(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} - 1 - \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j v_{j+1},$$

що задовольняє умови

$$V(0,\ldots,0)=0, \quad \frac{\partial V(0,\ldots,0)}{\partial v_j}=0 \quad (j=\overline{1,n-1}).$$

Таким чином, система (25) є системою дифференціальних рівнянь такого ж типу, які розглядались у роботі В.М. Євтухова, А.М. Самойленко [7]. Ця система за допомогою додаткового перетворення

$$v_j(t)=\delta y_j(t) \quad (j=\overline{1,n-1}), \quad v_n(t)=y_n(t), \tag{26}$$

де стала $\delta>0$ обрана так, щоб виконувалась нерівність

$$0\le \delta\sum_{j=0}^{n-2}|\sigma_j|<1,$$

зводиться до системи дифференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_j'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{1}{\delta}F_j(t,\delta y_1,\ldots,\delta y_{n-1},y_n)+(n-j)y_{j+1}-(n-j)y_j\right], \\ j=0,1,\ldots,n-2, \\ \\ y_{n-1}'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{1}{\delta}F_{n-1}(t,\delta y_1,\ldots,\delta y_{n-1},y_n)-y_{n-1}\right], \\ \\ y_n'=\frac{J_n'(t)}{J_n(t)}\left[F_n(t,\delta y_1,\ldots,\delta y_{n-1},y_n)-y_n+\delta\sum\limits_{j=0}^{n-2}\sigma_{j+1}y_j+V(\delta y_1,\ldots,\delta y_{n-1})\right], \end{cases} \tag{27}$$

яка задовольняє всі умови теореми 2.1 з роботи [7]. Згідно з цієї теоремою система (27) має хоча б один розв'язок $(y_j)_{j=1}^n : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_1\in[t_0,\omega[)$, що прямує до нуля при $t\uparrow\omega$. Більш того, з даної теореми випливає, що при $\omega=+\infty$ існує n-параметрична сім'я таких розв'язків у випадку коли $J_n(t)>0$ при $t\in]t_0,\omega[$, тобто з урахуванням другої з умов (9), коли виконується нерівність $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma>0$, і $n-1$- параметрична сім'я - у випадку, коли $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma<0$, а при $\omega<+\infty$ існує однопараметрична сім'я зникаючих в точці ω розв'язків у випадку, коли $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma>0$. Кожному такому розв'язку системи дифференціальних рівнянь (27) в силу замін (22), (23) і (26) відповідає $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язок $y:[t_1,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ диференціального рівняння (1), для якого мають місце асимптотичні зображення (12) і

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t))}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_nJ_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Враховуючи першу з умов (19), помічаємо, що остання з асимптотичних формул може бути записана у вигляді (13). Теорему повністю доведено.

В теоремі 1 асимптотична формула (13) неявно визначає асимптотику $n-1$- ї похідної $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язку диференціального рівняння (1). Наступна теорема вказує умови при яких асимптотики $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-0},\pm\infty)$- розв'язку та всіх його похідних до порядку $n-1$ включно записуються у явному вигляді.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і функція L_{n-1} задовольняє умову S_0. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язку диференціального рівняння* (1) *(у випадку їх існування) мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні співвідношення*

$$y^{(j)}(t)\sim\frac{\nu_{n-1}[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\left|\gamma C_n J_n(t)L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}\quad (j=\overline{0,n-1}).\quad (28)$$

Доведення. Нехай диференціальне рівняння (1) має $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язок $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$. Тоді згідно з теоремою 1 виконуються умови (9) – (11) і для цього розв'язку мають місце асимптотичні співвідношення (12), (13). Крім того, як було доведено в першій частині цієї теореми, для даного розв'язку має місце також асимптотичне співвідношення (17), з якого випливає, що

$$\ln|y^{(n-1)}(t)|=[1+o(1)]\ln|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Тоді, враховуючи, що функція L_{n-1} задовольняє умову S_0, будемо мати

$$L_{n-1}(y^{(n-1)}(t))=L_{n-1}\left(\nu_{n-1}e^{\ln|y^{(n-1)}|}\right)=L_{n-1}\left(\nu_{n-1}e^{[1+o(1)]\ln|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}}\right)=$$

$$=L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Використовуючи це асимптотичне співвідношення перепишемо (13) у вигляді

$$|y^{(n-1)}(t)|^\gamma=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_nJ_n(t)L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

звідки випливає, що

$$y^{(n-1)}(t)=\nu_{n-1}\left|\gamma C_nJ_n(t)L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Тому з (12) і (13) отримуємо явні асимптотичні співвідношення (28). Теорему доведено.

3. Приклад одного класу диференціальних рівнянь.

Розглянемо клас істотно нелінійних диференціальних рівнянь виду

$$y^{(n)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_kp_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)})}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_kp_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)})},\quad (29)$$

де $\alpha_k\in\{-1,1\}$, $p_k:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервна функція, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, $\varphi_{kj}:\Delta_{Y_j}\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервна та правильно змінна при $y^{(j)}\to Y_j$ функція порядку σ_{kj}, Y_j дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_j}– односторонній окіл Y_j, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,n-1}$.

Припустимо, що для деяких $s\in\{1,\dots,l\}$ і $r\in\{l+1,\dots,m\}$ виконуються нерівності

$$\limsup_{t\uparrow\omega}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{\beta\ln|\pi_\omega(t)|}<\beta\sum_{j=0}^{n-1}(n-j-1)(\sigma_{sj}-\sigma_{kj})\ \text{при}\ k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\},\quad (30)$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln|\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1}(n-j-1)(\sigma_{rj} - \sigma_{kj}) \text{ при } k \in \{l+1,\dots,m\} \setminus \{r\}, \tag{31}$$

де

$$\beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

і покажемо, що у даному випадку права частина рівняння (29) задовольняє умову $(RN)_\infty$.

Нехай $z_j : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0,n-1})$ – довільні функції, що задовольняють умови (6). В силу другої з цих умов

$$\ln|z_j(t)| = [n-j-1+o(1)] \ln|\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0,n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

З використанням цих асимптотичних співвідношень, першої з умов (6), зображень

$$\varphi_{kj}(z_j) = |z_j|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(z_j) \quad (j = \overline{0,n-1},\ k = \overline{1,m}),$$

де $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ – повільно змінні функції при $z_j \to Y_j$, а також властивості $\mathcal{M}_2$ повільно змінних функцій, для $k \in \{1,\dots,l\}$ знаходимо

$$\ln \frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} [(\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln|z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - \ln L_{sj}(z_j(t))] =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln|z_j(t)| \left(\sigma_k j - \sigma_{sj} + \frac{Ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|} \right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln|z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)\right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln|\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} [(n-j-1)(\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) + o(1)] =$$

$$= \beta \ln|\pi_\omega(t)| \left(\frac{p_k(t) - p_s(t)}{\beta \ln|\pi_\omega(t)|} + \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1) \right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тут згідно з нерівністю (30) права частина прямує до $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ і тому

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1,\dots,l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогічним чином з використанням нерівностей (31) встановлюємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}=0 \quad \text{при} \quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

В силу цих граничних співвідношень одержуємо зображення

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}=\frac{\alpha_s p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

тобто має місце асимптотичне зображення (7), в якому

$$\alpha_0=\frac{\alpha_s}{\alpha_r},\quad p(t)=\frac{p_s(t)}{p_r(t)},\quad \varphi_j(z_j(t))=\frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t))}\quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{32}$$

Тут $\varphi_j(z_j)$ згідно з властивостями правильно змінних функцій є правильно змінною функцією порядку

$$\sigma_j=\sigma_{sj}-\sigma_{rj}\quad (j=\overline{0,n-1}) \tag{33}$$

при $z_j\to Y_j$, причому її повільно змінна складова є функцією виду

$$L_j(z_j)=\frac{L_{sj}(z_j)}{L_{rj}(z_j)}\quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{34}$$

Таким чином, права частина рівняння (29) задовольняє умову $(RN)_\infty$.

Тому у випадку, коли для деяких $s\in\{1,\dots,l\}$ і $r\in\{l+1,\dots,m\}$ виконуються нерівності (30), (31) і при цьому стала $\gamma=1-\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj}-\sigma_{rj})$ не дорівнює нулю, для рівняння (29) справедливі твердження теорем 1 і 2, у яких замість α_0, σ_j $(j=\overline{0,n-1})$, p і L_j $(j=\overline{0,n-1})$ треба обрати їх вирази з формул (32)–(34).

Висновки. У даній статті для диференціального рівняння загального виду n- го порядку, яке у деякому сенсі є асимптотично близьким до двочленого рівняння з правильно змінними нелінійностями, вперше отримано результати про умови існування $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язків, що є особливим типом у класі, так званих, $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$- розв'язків. Крім того, одержано асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно, та з'ясовано питання про кількість розв'язків з даними асимптотичними зображеннями. Встановленні результати проілюстровано на прикладі одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь n- го порядку.

Список використаної літератури

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Дисс.... д. физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 295 с.
2. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2011. – т. 47, № 5. – С. 628-650.

3. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями//Укр. мат. журн. — 2013. – т.65, N 3. – С.354-380.
4. *Кусик Л. И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Вiсник Одеського нац. ун-ту. — 2012. – т.17. – Вип. 1–2(13–14). – Матем. і механ. – С. 80-97.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. – 1985. – 144с.
6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. – Cambridge university press. Cambridge. – 1987. – 494p.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений//Укр. Мат. Ж. – 2010. – Т.62, №1. – С. 52 - 80.

Одержано 05.04.2018