УДК 519.217; 519.718; 519.837
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).55-64

В. К. Ясинський[1], С. В. Антонюк[2]

[1] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
професор,
доктор фізико-математичних наук
yasinsk@list.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5434-6427

[2] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
кандидат фізико-математичних наук
violant78@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5357-8987

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ, ПУАССОНОВИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ І ВСІЄЮ ПЕРЕДІСТОРІЄЮ

В даній роботі розглядається стохастична динамічна система Іто-Скорохода з зовнішніми випадковими збуреннями, з марковськими перемиканнями та всією передісторією. Наведені основні означення стійкості сильного розв'язку для такої системи та одержані достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому.

Ключові слова: стохастичні динамічні системи з нескінченною післядією, марковські перемикання, зовнішні збурення, оператор Ляпунова-Красовського, стійкість за ймовірністю, стійкість в середньому квадратичному.

Нехай R^n – n-вимірний дійсний евклідовий простір і $1 \le p < \infty$. X є простором історії, тобто простір $R^n \times D^p_\rho$, де D^p_ρ – простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій $\varphi : R^+ \to R^n$ таких, що

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норма в просторі X вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_X \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p} \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|^p_\rho \right)^{1/p},$$

$$\|\varphi\|^p_\rho < \infty,\ 1 \le p < \infty.$$

Означення 1. *Функція $\rho : R^+ \to R^+$ називаєтья функцією із згладжуючою властивістю, якщо вона задовольняє таким умовам [4]:*

1. ρ – сумовна в R^+;

2. для $\forall z \ge 0$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \overline{K}(z) &\equiv ess \sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le \overline{\overline{K}} < \infty; \\ \underline{K}(z) &\equiv ess \sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{aligned} \tag{1}$$

3. ρ – обмежена в R^+;
4. $\rho > 0$ – строго додатня на $s \in (0, \infty)$;
5. $s\rho(s) \to 0$ коли $s \to \infty$.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний базис [1]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y} = \{y_1, .., y_n\}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, A)$, $A \subset \mathfrak{B}_Y$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ – ланцюг Маркова в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\{w(t), t \geq 0\}$ – R^n-значний вінерів процес, узгоджений з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, а $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$ незалежна від нього центрована пуассонова міра на $(\Theta \times R_+, Z \times B_+)$, для якої $\mathbf{E}\{\tilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$, де Π – деяка σ-скінченна міра на Z.

Розглянемо стохастичну динамічну систему випадкової структури із зовнішніми збуреннями та усією передісторією

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, \xi(t))dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, \xi(t))dw(t)+$$
$$+f_3(\gamma_3)\int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, dt), \ \forall t \geq t_0; \tag{2}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x\,|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g\left(t_k-, x^{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k\right), \tag{3}$$
$$t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\}, \ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \ x^{t_0} = \varphi \in X, \ \eta_{k_0} = h. \tag{4}$$

Тут γ_1, γ_2 – випадкові величини, з функціями розподілу $F_{\gamma_1}(\cdot)$, $F_{\gamma_2}(\cdot)$ відповідно, незалежні від $\xi(t)$ і приростів $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$, $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$; $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ – деякі борелеві функції; векторнозначний функціонал $\{a(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \to R^n$, матричнозначний функціонал $\{b(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \to M_n^n(R^n)$ та векторнозначний функціонал $\{c(t, \varphi, \theta, y)\} : R \times X \times \Theta \times \mathbf{Y} \to R^n$ – вимірні за сукупністю змінних і при кожному $\varphi \in X$ локально обмежені по t, а процес $x^t = (x(t), x^t_\rho)$

$$x^t_\rho(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), \ t_0 \leq s \leq t; \\ \varphi(s-t), \ s > t. \end{cases}$$

Крім того, $\varphi^{t_0} \in X$ з ймовірністю 1 і $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$ та центрованої пуассонової міри $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$ при кожному t.

Означення 2. *Стохастичний процес $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in (-\infty, T]\}$ називається сильним розв'язком задачі (2)-(4), якщо $x(t)$ прогресивно вимірний відносно $\mathfrak{F}_t$ при $t \leq T$, відрізки траєкторій процесу $x^t \in X$ при $t \in [t_0, T]$, $x^{t_0} = \varphi$ з ймовірністю 1 і рівність*

$$x(t) = x(s) + f_1(\gamma_1)\int_s^t a(s, x^s, \xi(t))ds + f_2(\gamma_2)\int_s^t b(s, x^s, \xi(t))dw(s)+$$

$$+f_3(\gamma_3)\int\limits_s^t\int\limits_\Theta c(s,x^s,\theta,\xi(t))\tilde{\nu}(d\theta,ds) \tag{5}$$

виконується з ймовірністю 1 для всіх $s\in[t_k,t_{k+1})$, $t\in(s,t_{k+1})$ *і при* $t_k\geq t_0$*:*

$$x\left(t_k\right)=x(t_k-)+g(t_k-,x^{t_k},\xi(t_k),\eta_k). \tag{6}$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що $\xi(t)$ – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів. Згідно [3] $\{x^t(s),\xi(t)\}$ є марковським процесом, в якому випадкова складова $x(t)\in X$ характеризує зміни вектора стану системи, а $\xi(t)$ – випадкові зміни її структури з врахуванням ланцюга Маркова $\{\eta_k,k\geq 0\}$, що входить як аргумент у функцію відображення $g(\cdot,\cdot,\cdot,\eta_k)$. Цим і пояснюється означення системи (2) як системи випадкової структури.

В роботі [6] встановлені наступні умови існування і єдиності сильного розв'язку задачі (2)-(4):

1) функціонали $a:R\times X\to R^n$, $b:R\times X\to M_n^n(R^n)$, $c:R\times X\times\Theta\to R^n$ вимірні за сукупністю змінних;

2) існує стала $L>0$ така, що

$$|a(t,\varphi_1,y)-a(t,\varphi_2,y)|+|b(t,\varphi_1,y)-b(t,\varphi_2,y)|+$$

$$+\int\limits_\Theta|c(t,\varphi_1,\theta,y)-c(t,\varphi_2,\theta,y)|\,\Pi(d\theta)+|g(t,\varphi_1,y,h)-g(t,\varphi_2,y,h)|\leq L\|\varphi_1-\varphi_2\|_X$$

для $\forall\varphi_1,\varphi_2\in X$, $\forall t\in[t_0,T]$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$;

3) існує стала $C>0$ така, що

$$|a(t,\varphi,y)|+|b(t,\varphi,y)|+\int\limits_\Theta|c(t,\varphi,\theta,y)|\,\Pi(d\theta)+|g(t,\varphi,y,h)|\leq C(1+\|\varphi\|_X)$$

для $\forall t\in[t_0,T]$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

4) $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $f_3(\cdot)$ – деякі борелеві функції,

$$\exists\mathbf{E}\left(f_1(\gamma_1)\right)^l,\ \mathbf{E}\left(f_2(\gamma_2)\right)^l,\ \mathbf{E}\left(f_3(\gamma_3)\right)^l\leq c<\infty,\ l>1.$$

Позначимо через $P_k\left((y,h),A\times B\right)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $\{\xi\left(t_k\right),\eta_k\}$ на k-кроці:

$$P_k\left((y,h),A\times B\right)\equiv\mathbf{P}\left\{\xi\left(t_{k+1}\right)\in A,\eta\left(t_{k+1}\right)\in B\left|\xi\left(t_k\right)=y,\eta\left(t_k\right)=h\right.\right\},$$

для всіх $t_k\geq t_0$, $(y,h)\in\mathbf{Y}\times\mathbf{H}$.

Введемо у розгляд наступну функцію

$$P_k\left((x,y,h),X\times A\times B\right)\equiv$$

$$\equiv\mathbf{P}\left\{x^{t_{k+1}}(t_k,\varphi,y_0,h_0)\in X_1,\xi\left(t_{k+1}\right)\in A,\eta\left(t_{k+1}\right)\in B\right|$$
$$\left|x^{t_k}(t_{k-1},\varphi,y_0,h_0)=x,\xi\left(t_k\right)=y,\eta\left(t_k\right)=h\right\}$$

при всіх $t_k\in S\cup\{t_0\}$, $k\in N\cup\{0\}$, $\varphi\in X$, $A\in\mathfrak{B}_{\mathbf{Y}}$, $B\in\mathfrak{B}_{\mathbf{H}}$.

Означення 3. *Дискретний оператор Ляпунова-Красовського* $(lv_k)(x,y,h)$ *на послідовності вимірних скалярних функцій* $v_k(x,y,h) : X \times Y \times H \to R$, $k \in N \cup \{0\}$ *для динамічної системи* (5) *визначимо рівністю*

$$(lv_k)(x,y,h) \equiv \int\limits_{X\times Y\times H} P_k(x,y,h)(dl \times du \times dz)v_k(l,u,z) - v_k(x,y,h).$$

Означення 4. *Якщо* $t_k = k\beta$ *для всіх* $k \in \mathbf{N}$ *і при деякому* $\beta > 0$ *відображення* a, b, g *не залежать від* t, *процес* $\xi(t)$ *і ланцюг Маркова* $\{\eta_k, k \geq 0\}$ *однорідні, тоді систему* (5)-(6) *називатимемо автономною.*

У випадку автономної системи можна нехтувати індексом k у функції $P((x,y,h), X \times A \times B)$ і дискретний оператор Ляпунова-Красовського можна записати у вигляді

$$(lv)(x,y,h) \equiv \int\limits_{X\times Y\times H} P_k(x,y,h)(dl \times du \times dz)v_k(l,u,z) - v_k(x,y,h).$$

Означення 5. *Функціоналом Ляпунова-Красовського для системи* (5) *назвемо послідовність невід'ємних функцій* $v_k(\varphi,y,h)$, $k \geq 0$, *для яких виконуються умови:*

1) при всіх $k \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in X$ *визначений дискретний оператор Ляпунова-Красовського* $(lv_k)(\varphi,y,h)$;

2) при $r \to \infty$

$$\bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k\in N, y\in \mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi,y,h) \to +\infty;$$

3) при $r \to 0$

$$\underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k\in N, y\in \mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi,y,h) \to 0,$$

причому $\bar{v}(r)$ *і* $\underline{v}(r)$ *– неперервні і монотонні.*

Дослідимо стійкість тривіального розв'язку динамічної системи (2)-(4).

Означення 6. *Розв'язок задачі* (2)-(4) *назвемо:*

– стійким за ймовірністю, якщо для $\forall\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ *можна вказати таке* $\delta > 0$, *що з* $\|\varphi\|_X < \delta$ *випливає, що* $\mathbf{P}\left\{\sup\limits_{T\geq t} \|x^t\|_X > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$ *при всіх* $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

– асимптотично стійким за ймовірністю, якщо для $\forall\varepsilon > 0$ *можна вказати таке* $\delta > 0$, *що з* $\|\varphi\|_X < \delta$ *випливає, що* $\lim\limits_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup\limits_{T\geq t} \|x^t\|_X > \varepsilon\right\} = 0$;

– p-стійким ($p > 0$*), якщо для* $\forall\varepsilon > 0$ *можна вказати таке* $\delta > 0$, *що з* $\|\varphi\|_X < \delta$ *випливає, що* $\mathbf{E}\,\|x^t\|_x^p < \varepsilon$;

– асимптотично p-стійким, якщо для $\forall\varepsilon > 0$ *можна вказати таке* $\delta > 0$, *що з* $\|\varphi\|_X < \delta$ *випливає, що* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}\,\|x^t\|_x^p = 0$.

При $p = 2$ будемо мати стійкість в середньому квадратичному і асимптотичну стійкість в середньому квадратичному. Якщо в попередніх означеннях покласти $\delta = +\infty$, то до відповідних означень додається термін "в цілому".

Введемо позначення

$$|x(\cdot)|_{t_0}^{*}(t) \equiv \sup_{t_0 \le s \le t} |x(s)|.$$

Одержимо спочатку оцінки розв'язку задачі (2)-(4) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$ по значенням розв'язку в точках t_k, $k \ge 0$.

При доведенні будемо використовувати сталі, що виникають в наступних нерівностях теореми існування та єдиності сильного розв'язку, будемо використовувати нерівність Буркхольдера [4]: для довільного $l > 1$ існують сталі c_l такі, що

$$\mathbf{E}\left|\int_{t_0}^{\bullet} \psi(s)dw(s)\right|_{t_0}^{*l}(t) \le c_l \mathbf{E}\left(\int_{t_0}^{t} |\psi(s)|^2 ds\right)^{l/2} \tag{7}$$

для будь-яких F_t-узгоджених процесів $\psi(t,\omega)$, таких, що $\int_0^T \psi^2(t)dt < \infty$ майже напевне.

Також будемо використовувати сталі, що з'являються в таких елементарних нерівностях

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right|^l \le k_l^{(m)} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^l, \; l \ge 0, \tag{8}$$

$$\{a_i\} \subset R, \; m = 1, 2, 3, 4; \; k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1.$$

Лема 1. *Нехай для системи (2)-(4) виконуються умови існування та єдиності розв'язку. Тоді при всіх $k \ge 0$ для сильного розв'язку має місце нерівність:*

$$\mathbf{E}\left\{|x(\cdot)|_{t_k}^{2}(t_{k+1})\right\} \le 15c^2(1+2L^2)\left[\mathbf{E}\,|x(\cdot)|_{t_0}^{2}(t_k) + 2C^2(t_{k+1}-t_k)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{5L^2((t_{k+1}-t_k)^2+4)(t_{k+1}-t_k)\right\}. \tag{9}$$

Доведення. При всіх $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k > t_0$ з (5) легко одержати нерівність

$$|x(t)| \le |x(t_k)| + c\left(\int_{t_k}^{t} |a(\tau, x^\tau, \xi(\tau)) - a(\tau, 0, \xi(\tau))|\, d\tau + \right.$$
$$+ \int_{t_k}^{t} |a(\tau, 0, \xi(\tau))| d\tau + \left(\left|\int_{t_k}^{t} (b(\tau, x^\tau, \xi(\tau)) - b(\tau, 0, \xi(\tau)))\, dw(\tau)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\int_{t_k}^{t} b(\tau, 0, \xi(\tau))\, dw(\tau)\right|\right) + \left(\left|\int_{t_k}^{t}\int_{\Theta} (c(\tau, x^\tau, \theta, \xi(\tau)) - c(\tau, 0, \theta, \xi(\tau)))\, \tilde{\nu}(d\theta, d\tau)\right| + \right.$$
$$\left.\left. + \left|\int_{t_k}^{t}\int_{\Theta} c(\tau, 0, \theta, \xi(\tau)) \tilde{\nu}(d\theta, d\tau)\right|\right)\right).$$

Піднесемо до квадрату обидві частини цієї нерівності, обчислимо sup від одержаного виразу, та візьмемо математичне сподівання. Використовуючи нерівності (7), (8) та умови існування та єдиності розв'язку, матимемо

$$\mathbf{E}\left\{|x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1})\right\} \le 5c^2\left[\mathbf{E}\left\|x^{t_k}\right\|^2_X + 2C^2(t_{k+1}-t_k) + L^2\left((t_{k+1}-t_k)^2+4\right)\times\right.$$

$$\times\int\limits_{t_k}^{t}\mathbf{E}\left\{\left||x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(\tau)\right|/F_{t_k}\right\}d\tau. \tag{10}$$

Використовуючи нерівність Гронуолла легко побачити, що

$$\mathbf{E}\left\{\left||x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(\tau)\right|/F_{t_k}\right\} \le 5c^2\left[\mathbf{E}\left\{\left\|x^{t_k}\right\|^2_X/F_{t_k}\right\} + 2C^2(t_{k+1}-t_k)\times\right.$$

$$\times\exp\left\{5L^2\left((t_{k+1}-t_k)^2+4\right)(t_{k+1}-t_k)\right\}. \tag{11}$$

При $t = t_{k+1}$ сильний розв'язок задачі (2)-(4)

$$x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}-) + g(t_{k+1}-, x^{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})$$

задовольняє нерівність

$$\mathbf{E}\left\{|x(t_{k+1})|^2/F_{t_k}\right\} \le 3\left[\mathbf{E}\left\{|x(t_{k+1}-)|^2/F_{t_k}\right\} + \mathbf{E}\left\{\left|g(t_{k+1}-, x^{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1} -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-g\left(t_{k+1}-, 0, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}\right)\right|^2/F_{t_k}\right\} + \mathbf{E}\left\{\left|g\left(t_{k+1}-, 0, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}\right)\right|^2/F_{t_k}\right\}\right] \le$$

$$\le 3c^2\left[\left(1+2L^2\right)\mathbf{E}\left\{|x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1})/F_{t_k}\right\} + C^2\right]. \tag{12}$$

Оскільки випадкова величина $|x(\cdot)|^{*}_{t_k}(t_{k+1})$ не залежить від σ-алгебри F_{t_k}, то

$$\mathbf{E}\left\{|x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1})/F_{t_k}\right\} = E\left\{|x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1})\right\}.$$

Підставляючи (11) в (12), одержимо (9). Лема доведена.

Позначимо через

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k\in N : t_k \le t\},\ t \ge t_1, \\ 0, t \in [0, t_1). \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай*

1) виконуються умови існування і єдиності сильного розв'язку задачі (2)-(4);

2) існують функціонали Ляпунова-Красовського такі, що в силу системи (5) *виконується нерівність*

$$(lv_k)(\varphi, y, h) \le -a_k(\varphi, y, h),\ k \ge 0, \varphi \in X, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}; \tag{13}$$

3) довжина інтервалів $[t_k, t_{k+1})$ *не перевищує* $\Delta > 0$, $\forall k \ge 0$.

Тоді розв'язок задачі (2)-(4) *асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому.*

Доведення. Позначимо через F_{t_k} мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t \in [t_0, t_k)$ і η_n, $n \le k$. Тоді умовне математичне сподівання обчислимо за формулою

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\right\} =$$

$$= \int\limits_{X\times\mathbf{Y}\times\mathbf{H}} P_k\left((\varphi, y, h)\left(dl \times du \times dz\right) v_{k+1}(l, u, z)\right)\Big|_{\varphi = x^{t_k}, y=\xi(t_k), h=\eta_k}. \tag{14}$$

Далі за означенням дискретного оператора Ляпунова-Красовського одержимо

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\right\} =$$
$$= v_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right) + (lv_k)\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right) \le \bar{v}\left(\left\|x^{t_k}\right\|_X\right). \tag{15}$$

Використовуючи (15), запишемо дискретний оператор Ляпунова-Красовського

$$(lv_k)\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right) = \mathbf{E}\left\{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\right\} -$$

$$- v_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right) \le -a_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right) \le 0. \tag{16}$$

Тоді при $k \ge 0$ має місце

$$\mathbf{E}\left\{v_{k+1}\left(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}\right)/F_{t_k}\right\} \le v_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right).$$

А це означає, що послідовність випадкових величин $\{v_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right)\}$ представляє собою супермартингал відносно F_{t_k} [3].

Далі, взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (16), просумувавши по k від $n \ge k_0$ до N, матимемо

$$\mathbf{E}\left\{v_{N+1}(x^{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1})\right\} - \mathbf{E}\left\{v_n\left(x^{t_n}, \xi(t_n), \eta_n\right)\right\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\left\{(lv_k)\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right)\right\} \le -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\left\{a_k\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right)\right\} \le 0. \tag{17}$$

Далі легко побачити, що

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge t_0}\left\|x^t\left(t_0, \varphi, y, h\right)\right\|_X > \varepsilon_1\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{t_{k_0+n-1}\le t\le t_{k_0+n}} \left\|x^t\left(t_0, \varphi, y, h\right)\right\|_X > \varepsilon_1\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} x^{t_{k_0+n-1}}\left(t_0, \varphi, y, h\right) > \varepsilon_1\right\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} v_{k_0+n-1} x^{t_{k_0+n-1}}\left(x^{t_{k_0+n-1}}, \xi\left(t_{k_0+n-1}\right), \eta_{k_0+n-1}\right) > \bar{v}\left(\varepsilon_1\right)\right\}. \tag{18}$$

Якщо $\|x^{t_k}\|_X \ge r$, то

$$\sup_{k\ge k_0, \left\|x^{t_k}\right\|\ge r} v_k\left(x^{t_k}, \xi\left(t_k\right), \eta_k\right) \ge \inf_{\substack{k\ge k_0, y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, \|\varphi\|_X\ge r}} v_k\left(\varphi, y, h\right) = \bar{v}(r).$$

Використовуючи нерівність для невід'ємних супермартингалів [3] для оцінки правої частини (18), матимемо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} v_{k_0+n-1}x^{t_{k_0+n-1}}\left(x^{t_{k_0+n-1}},\xi\left(t_{k_0+n-1}\right),\eta_{k_0+n-1}\right)>\bar{v}\left(\varepsilon_1\right)\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\bar{v}\left(\varepsilon_1\right)}v_{k_0}\left(\varphi,y,h\right)\leq\frac{\bar{v}\left(x^t\right)}{\bar{v}\left(\varepsilon_1\right)}. \tag{19}$$

З врахуванням (19) нерівність (18) дає можливість гарантувати виконання означення стійкості за ймовірністю в цілому.

З (17) випливає оцінка

$$\mathbf{E}\left\{v_{N+1}(x^{t_{N+1}},\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1})\right\}\leq v_{k_0}\left(\varphi,y,h\right)-$$

$$-\sum_{k=k_0}^{N}\mathbf{E}\left\{a_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)\right\}\leq v_{k_0}\left(\varphi,y,h\right) \tag{20}$$

при всіх $N\geq k_0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

Зауважимо, що послідовність $\{a_k,k\geq 0\}$ представляє собою функціонали Ляпунова-Красовського. А, отже, існують [1] неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\bar{a}(r)$ рівні нулю при $r=0$ і такі, що

$$\underline{a}\left(\|\varphi\|_X\right)\leq a_k\left(\varphi,y,h\right)\leq\bar{a}\left(\|\varphi\|_X\right).$$

При $k\in\mathbf{N}$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

Таким чином із збіжності ряду в лівій частині (20) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{N}\mathbf{E}\left\{a_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)\right\}$$

при всіх $t_0\geq 0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

Тоді, з врахуванням $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0)=0$, одержимо

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{t_k}\left(t_0,\varphi,y,h\right)\right\|_X=0.$$

Звідси випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\bar{v}\left(\|x^{t_k}\left(t_0,\varphi,y,h\right)\|_X\right)$ при $k\to\infty$ для всіх $t_0\geq 0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

Таким чином з властивостей функціонала Ляпунова-Красовського невід'ємний супермарнтингал $v\left(x^{t_k},\xi(t_k),\eta_k\right)$ при $k\to\infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу $\xi(t)$ і послідовності η_k.

Як відомо [3], невід'ємний і обмежений зверху супермартингал має границю з ймовірністю 1. Використовуючи лему 1, одержимо асимптотичну стійкість за ймовірністю в цілому розв'язку задачі (2)-(4). Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, причому функціонали Ляпунова-Красовського* $\{v_k,k\geq 0\},\{a_k,k\geq 0\}$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{array}{c} c_1\left|\varphi\left(0\right)\right|^2\leq v_k\left(\varphi,y,h\right)\leq c_2\left\|\varphi\right\|_X^2, \\ c_3\left|\varphi\left(0\right)\right|^2\leq a_k\left(\varphi,y,h\right)\leq c_4\left\|\varphi\right\|_X^2. \end{array} \tag{21}$$

При деякий $c_i>0$, $i=\overline{1,4}$ *для всіх* $k\in\mathbf{N}$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in X$.

Тоді розв'язок задачі (2)-(4) *асимптотично стійкий в середньому квадратичному в цілому.*

Доведення. Використовуючи (17) для $n = k_0$ в силу (21) очевидними є наступні нерівності

$$\mathbf{E}\left\{\left\|x^{t_{N+1}}\right\|_X^2\right\} \leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\left\{v_{N+1}\left(x^{t_{N+1}}, \xi\left(t_{N+1}\right), \eta_{N+1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\left\{v_{k_0}\left(\varphi, \xi\left(t_{k_0 0}\right), \eta_{k_0}\right)\right\} \leq \frac{c_2}{c_1}\left\|\varphi\right\|_X^2$$

для всіх $N > k_0$, $\varphi \in X$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\}$.

Звідси і випливає стійкість в середньому квадратичному розв'язку задачі (2)-(4).

Використовуючи (17) і другу із нерівностей (21), матимемо

$$\mathbf{E}\left\{\left\|x^{t_{N+1}}\right\|_X^2\right\} \leq \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N}\mathbf{E}\left\{a_k\left(\varphi, \xi\left(t_k\right), \eta_k\right)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_3}\mathbf{E}\left\{v_{k_0}\left(\varphi, \xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\right)\right\} \leq \frac{c_2}{c_3}\left\|\varphi\right\|_X^2.$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $\mathbf{E}\left\{\left\|x^{t_{N+1}}\right\|_X^2\right\}$ для будь-яких початкових даних $x^{t_{k_0}} = \varphi$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\}$.

Таким чином,

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}\left\{\left\|x^{t_k}\right\|_X^2\right\} = 0$$

при всіх $t_0 \geq 0$, що і завершує доведення теореми 3.

Список використаної літератури

1. Андреева Б.А. Колмановский В.Б., Шайхет Л.С. Управление системы с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.
2. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.:Физматгиз, 1969. 859 с.
4. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations.* 1984. Vol.7. Pp. 1-72.
5. Антонюк С.В. Стійкість стохастичних динамічних систем випадкової структур из марковськими збуреннями з усією переісторією. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2013. Вип.24, №2. С. 12-20.
6. Антонюк С. В., Ясинский В. К. Существование l-го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. Вып. 4. С. 141–151.

Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V. Stability of solution of the Ito-Skorokhod stochastic dynamic system of random structure with external random disturbances, Markov switching and all prehistory.

The Ito-Skorokhod stochastic dynamical system with external random disturbances, with Markov switching and all prehistory is considered in this paper. Basic definitions of stability of a strong solution for such systems are introduced and sufficient conditions for asymptotic stability in probability in general and the asymptotic mean square stability in general are received.

Keywords: Ito-Skorokhod stochastic dynamic system withal prehistory, stochastic system of random structure, Markov switchings, Lyapunov-Krasovsky operator, mean square stability.

References

1. Andreeva, B.A., Kolmanovskiy, V.B., & Shaikhet, L.S. (1992). Control of systems with afteraction. *M: Nauka*, 333 p. [in Russian]
2. Gihman, Y.I, & Skorokhod, A.V. (1982). Stochastic dynamic systems and their applications. *Kyiv: Naukova dumka*, 612 p. [in Russian]
3. Dynkin, Ye.B. (1969). Markov processes. *M: Fismatiz*, 859 p. [in Russian]
4. Mizel, V., & Trutzer, V. (1984) Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations, 7*, 1–72.
5. Antoniuk, S.V. (2013). Stability of solutions of stochastic dynamic systems of random structure Markov switchings and all prehistory. *Naukovyy visnyk Uzhgorodskogo universytetu. Mathematics and Informatics. Uzhgorod: Goverla, 24, 2*, 12–20. [in Ukrainian]
6. Antoniuk, S.V., & Yasinskiy, V.K. (2008). Existence of l-th moment of solution of stochastic differential-functional equations with all prehistory. *Cybernetics and system Analysis, 4*, 141–151. [in Ukrainian]

Одержано 24.04.2020