

УДК 539.3

## ДЕФОРМУВАННЯ ТА РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ В ОКОЛІ СФЕРОЇДАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

В. П. СИЛОВАНЮК, Р. Я. ЮХИМ, П. В. ГОРБАЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Запропонована модель деформування і руйнування пружно-пластичного тіла з пружним сфероїдальним включенням. Задача зведена до розв'язування інтегро-диференціального рівняння. Методом механічних квадратур отримано його числовий розв'язок. На основі деформаційного критерію зародження тріщини в околі включення встановлені основні параметри, які впливають на локальне руйнування. Результати досліджень подано у вигляді графічних залежностей.

**Ключові слова:** сфероїдальне включення, пластична зона, інтегро-диференціальне рівняння, граничне навантаження.

Міцність твердих тіл залежить від особливостей структури матеріалу та її дефектності. Чужорідні включення і порожнини спричиняють концентрацію напружень у матеріалах. Нижче на основі деформаційного критерію міцності досліджені особливості деформування та руйнування пружно-пластичних тіл в околі пружних сфероїдальних включень.

**Формулювання задачі.** Розглянемо одновісний розтяг безмежного пружно-пластичного тіла, що містить у площині, нормальній до осі навантаження, тонке пружне включення. Поверхню включення вважаємо симетричною відносно площини  $z = 0$  поверхнею обертання (рис. 1).

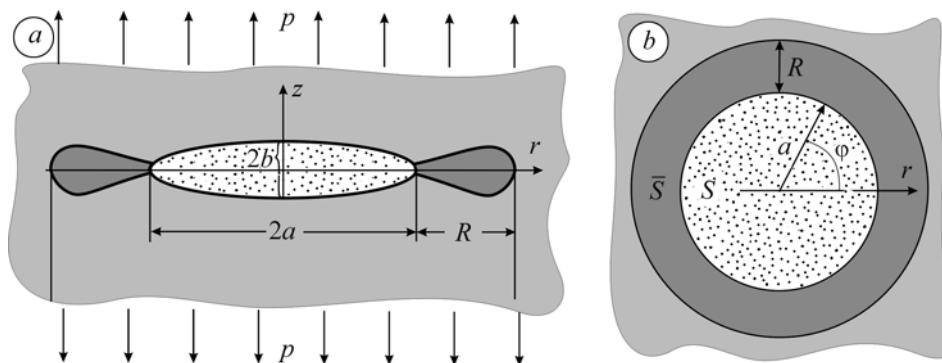


Рис. 1. Схематичне зображення перерізу тіла зі сфероїдальним включенням та зонами передруйнування площинами  $\varphi = 0$  (a) та  $z = 0$  (b).

Fig. 1. Schematic illustration of the body cut with a spheroidal inclusion and pre-fracture zone by planes  $\varphi = 0$  (a) and  $z = 0$  (b).

З ростом навантаження в околі включення формується зона, де матеріал деформується за межі пружності. Уявно виріжемо із тіла включення і зону передруйнування, що до нього прилягає. Їх дію на основний матеріал замінимо, враховуючи

Контактна особа: Р. Я. ЮХИМ, e-mail: romashka@ipm.lviv.ua

малу товщину включення і зони передруйнування та гладкість їх поверхонь, деякими напруженнями на поверхні порожнини. В області контакту матеріалів включення і матриці напруження подамо згідно з моделлю податливого включення [1]

$$\sigma_z(r) = \frac{[u_z^*(r)]}{2h(r)} E_1, \sigma_{rz} = 0, \quad (1)$$

а на межі непружно і пружно деформованого матеріалу напруження приймемо сталими і рівними  $\sigma_T$ :

$$\sigma_z = \sigma_T, \sigma_{rz} = 0. \quad (2)$$

Тут  $2h(r)$  – товщина включення;  $[u_z^*(r)]$  – стрибок переміщень точок поверхні включення;  $E_1$  – модуль Юнга матеріалу включення.

З огляду на малу товщину утвореної порожнини зносимо граничні умови з поверхні на серединну площину ( $z = 0$ ). В результаті осесиметричну задачу про розтяг нескінченного тіла із тонким включенням зведемо до розв'язування такої крайової задачі для кругового розрізу діаметром  $2(a + R)$ :

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p + \frac{[u_z^*]}{2h(r)} E_1, & 0 \leq r \leq a, \\ -p + \sigma_T, & a \leq r \leq a + R, \end{cases}$$

$$u_z = 0, \quad a + R < r < \infty;$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (3)$$

В осесиметричній задачі переміщення і напруження виражають через дві гармонічні функції  $\phi, \psi$ :

$$2\mu u_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} - z \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad 2\mu u_z = \kappa\psi - \frac{\partial\phi}{\partial z} - z \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\sigma_z = 2(1 - \nu) \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu)\psi - \frac{\partial\phi}{\partial z} - z \frac{\partial\psi}{\partial z} \right], \quad (5)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \mu = 2(1 + \nu)/E,$$

де  $\nu, E$  – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга основного матеріалу.

Функції  $\phi, \psi$  можна подати інтегральними розкладами Ханкеля:

$$\phi = \int_0^\infty A_1(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) \frac{d\xi}{\xi}, \quad \psi = \int_0^\infty A_2(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi, \quad (6)$$

де  $A_1(\xi), A_2(\xi)$  – невідомі функції. З умови відсутності дотичних напружень у площині  $z = 0$  встановлюємо зв'язок між функціями  $A_1(\xi)$  і  $A_2(\xi)$ :

$$A_2(\xi) = -A_1(\xi)/(1 - \nu).$$

Тоді, враховуючи співвідношення (5), (6), із двох перших умов (3) отримуємо систему парних інтегральних рівнянь

$$-\int_0^\infty \xi A_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \begin{cases} -p + \frac{[u_z^*]}{2h(r)} E_1, & 0 \leq r \leq a; \\ -p + \sigma_T, & a \leq r \leq a + R; \end{cases}$$

$$\frac{1-\nu}{\mu} \int_0^{\infty} A_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad a+R \leq r < \infty. \quad (7)$$

Диференціюємо друге рівняння із (7) по  $r$  та вводимо позначення невідомих переміщень  $u_z(r)$  поверхні розрізу на проміжку  $0 < r < a+R$ :

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{\mu} \int_0^{\infty} A_1(\xi) J_1(\xi r) \xi d\xi &= \frac{\partial u_z(r)}{\partial z} \Big|_{z=0} = u'_z(r), & 0 < r < a+R, \\ \frac{1-\nu}{\mu} \int_0^{\infty} A_1(\xi) J_1(\xi r) \xi d\xi &= 0, & a+R < r < \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Застосувавши до співвідношень (8) обернене перетворення Ханкеля, із першого рівняння (7) після деяких обчислень отримаємо інтегро-диференціальне рівняння відносно невідомих переміщень поверхні розрізу ( $z=0$ ,  $0 < r < a+R$ ):

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{a+R} K(r,t) u'_z(t) dt = \frac{1-\nu}{\mu} \begin{cases} -p + \frac{[u_z^*(r)]}{2h(r)} E_1, & 0 \leq r \leq a, \\ -p + \sigma_T, & a \leq r \leq a+R, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$K(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{r} K(t/r) + \frac{r^2}{t^2 - r^2} E(t/r), & t < r; \\ \frac{t}{t^2 - r^2} E(r/t), & t > r. \end{cases} \quad (10)$$

Тут  $K(t/r)$ ,  $E(t/r)$  – повні еліптичні інтеграли першого та другого родів. Приймаємо, що  $u_z^*(r) \approx u_z(r) + u_z^0(r)$ ;  $u_z^0(r) = ph(r)/E$  – переміщення точок поверхні включення в однорідному (без включення) тілі під дією зовнішніх зусиль  $p$ .

Якщо до визначити функцію  $u'_z$  на проміжку  $-a-R < r < 0$  та ввести безрозмірні змінні

$$\tau = t/(a+R), \quad \rho = r/(a+R),$$

то рівняння (9) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_1(\rho, \tau) \frac{u'_z((a+R)\tau) d\tau}{\tau - \rho} = \\ &= \frac{1-\nu}{\mu} \left[ -p + \left( p\lambda + \beta \frac{u_z((a+R)\rho)}{h((a+R)\rho)} E_1 \right) \cdot H\left(\frac{a}{a+R} - |\rho|\right) + \sigma_T \cdot H\left(|\rho| - \frac{a}{a+R}\right) \right], \quad (11) \\ & |\rho| \leq 1, \end{aligned}$$

$$K_1(\rho, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau^2 - \rho^2}{|\tau\rho|} K(\tau/\rho) + \frac{|\rho|}{|\tau|} E(\tau/\rho), & |\rho| < |\tau|; \\ E(\rho/\tau), & |\tau| > |\rho|, \end{cases} \quad (12)$$

де  $H(\rho)$  – функція Гевісайда;  $\lambda = E_1/E$ .

Розмір зон передруйнування  $R$  біля включення встановлюємо, як і в  $\delta_c$ -моделі [2], із умови обмеженості напружень на краях розрізу. Сингулярне інтегро-диференціальне рівняння розв'язуємо за допомогою методу квадратурних формул Гаусса–Чебишова (див. напр. [3]). Деформацію у включенні, згідно зі залежністю (1), встановлюємо так:

$$\varepsilon_z^* = \frac{[u_z^*(r)]}{2h(r)}. \quad (13)$$

Зокрема, в точках, близьких до вершини включення ( $r \rightarrow a$ ), це співвідношення можна записати у вигляді

$$\varepsilon_z^* \approx [u_z^*(a)]/(2\rho), \quad (14)$$

де  $\rho$  – радіус кривини вершини включення.

З умови сумісності деформації матеріалів включення та матриці в точці  $x = a$  ( $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z$ ) отримуємо співвідношення для розрахунку максимальної деформації в околі включення:

$$\varepsilon_z^{\max} = \frac{[u_z^*(a)]}{2\rho}. \quad (15)$$

З розв'язку рівняння (11) встановлені розміри зон передруйнування ( $R/a$ ) в околі сфероїдального включення з півосями  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ) (рис. 2). Виявлено (рис. 2a), що за однакових інтенсивності навантаження та радіусів кривини в околі сфероїдального включення утворюються менші зони передруйнування, ніж біля циліндричного еліптичного включення (плоска задача).

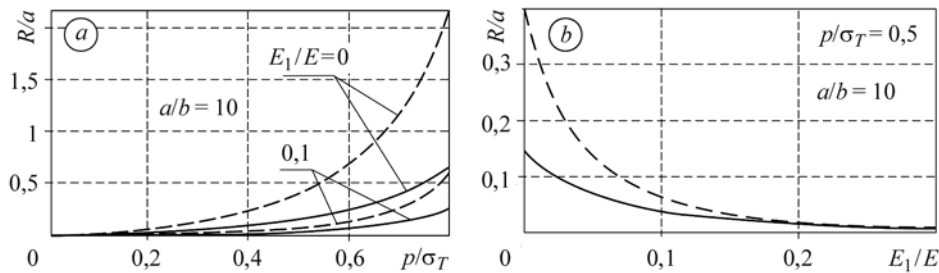


Рис. 2. Залежність розміру зони передруйнування в околі включення від інтенсивності навантаження (a) та жорсткості включення (b) (штрихові лінії – результати розв'язку плоскої задачі про розтяг тіла з еліптичним включенням [4]; суцільні – результати розв'язку просторової задачі).

Fig. 2. Dependence of the process zone dimension near the inclusion on the intensity of external of loading (a) and inclusion rigidity (b) (dashed lines are results of the plane problem solution on tension of a body with an elliptic inclusion [4]; solid lines are results of a 3-D problem solution).

Результати розрахунків про вплив жорсткості матеріалу включення на розмір зон передруйнування в його околі за фіксованого зовнішнього навантаження ілюструє рис. 2b. Як бачимо, зі збільшенням модуля Юнга матеріалу включення розміри зон передруйнування в його околі зменшуються.

Для встановлення граничного навантаження  $p_c$ , коли в околі сфероїдального включення виникне тріщина, використаємо деформаційний критерій міцності, згідно з яким локальне руйнування відбуватиметься тоді, коли максимальна розтягова деформація досягне граничного значення  $\varepsilon_c$ :

$$\varepsilon_{\max} = [u_z^*(a)]/(2\rho) = \varepsilon_c. \quad (16)$$

Вважаємо, що деформативність та міцність включення, а також його адгезія з основним матеріалом достатні для того, щоб початкове руйнування відбулося в матриці в околі включення. Побудовано (рис. 3 і 4) залежності, які відтворюють вплив геометричних та пружних параметрів включення на граничне навантаження.

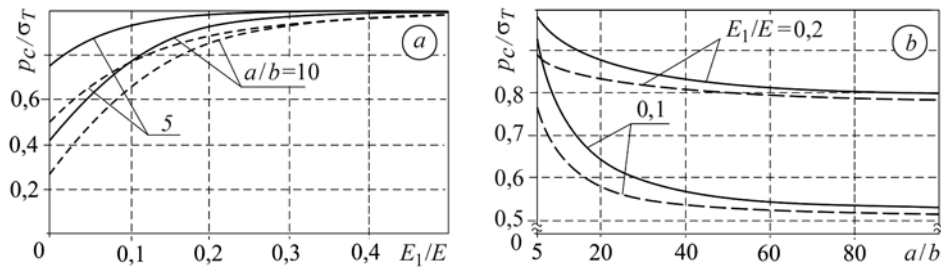


Рис. 3. Залежність граничного навантаження тіла із включенням від жорсткості матеріалу включення (а) та його товщини (b) ( $E\varepsilon_c/\sigma_0 = 10$ ) (пояснення див. рис. 2).

Fig. 3. Dependence critical loading of the body with an inclusion on the inclusion rigidity (a) and inclusion thickness (b) ( $E\varepsilon_c/\sigma_0 = 10$ ) (explanation see in Fig. 2).

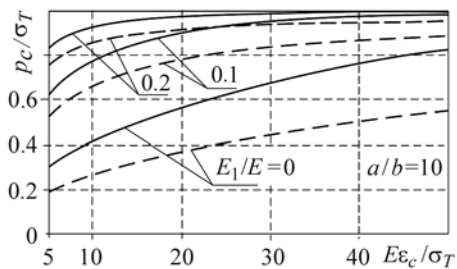


Рис. 4. Вплив граничної деформації матеріалів на граничне навантаження тіла з включенням (пояснення див. рис. 2).

Fig. 4. Influences of critical material deformation on maximum loading of a body with an inclusion (explanation see in Fig. 2).

## ВИСНОВКИ

Деформація в околі сфероїдального включення в пружному ізотропному тілі за одновісного розтягу залежить від інтенсивності прикладених навантажень ( $p$ ), характерного розміру включення ( $a$ ), його товщини ( $h(r)$ ) та механічних властивостей матеріалів ( $E$ ,  $E_i$ ,  $\sigma_T$ ). Небезпечнішими щодо руйнування є наскрізні пластинчасті включення порівняно із внутрішніми сфероїдальними. Різниця в розрахунках плоскої та просторової задач такого типу може сягати 30%.

**РЕЗЮМЕ.** Предложена модель деформирования и разрушения упругопластического тела с упругим сфероидальным включением. Задача сведена к решению интегро-дифференциального уравнения. Методом механических квадратур получено численное решение этого уравнения. На основании деформационного критерия зарождения трещины в окрестности включения установлены основные параметры, влияющие на локальное разрушение. Рассчитано прочность тел со сфероидальными и эллиптическими включениями. Результаты представлены в виде графических зависимостей.

**SUMMARY.** The model of deformation and fracture of an elastic-plastic body with an elastic spheroidal inclusion is proposed. The problem is reduced to the solution of integral-differential equation. The numeral solution of the equation is obtained by the mechanical quadrature. Using the deformation criterion of crack initiation at the inclusion, the main parameters that have an influence on local fracture were found. The strength of bodies with elliptic inclusions was calculated. Results are presented as graphs.

1. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
2. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Силованюк В. П., Юхим Р. Я. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.

Одержано 05.05.2010